FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

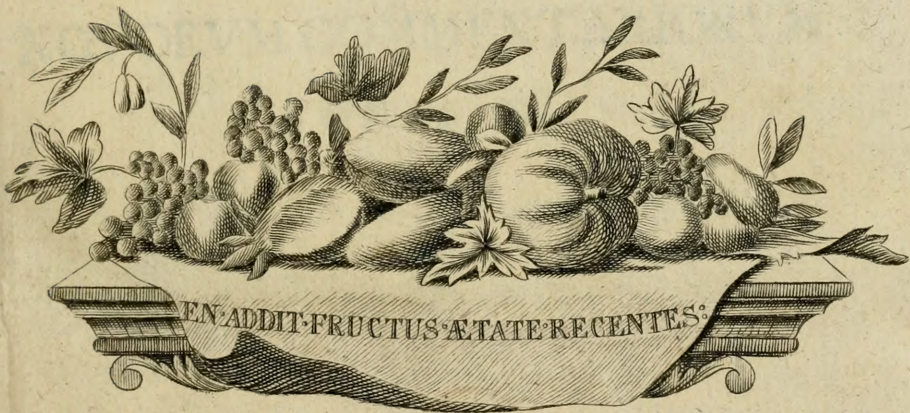
OF NATURAL HISTORY

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

5.06

TOM. XV.

pro Anno MDCCLXX.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXXI.

4/18

·16. 70280 april 28

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XV.

MATHEMATICA.

I.

De Menſura ſortis ad fortuitam rerum naturaliter contingentium ſucceſſionem adplicata.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 5.

Qui probabilitatis calculum ſummo dudum cum acumine excoluit, Illuſtr. Auctor nouum profundiſſimarum hoc de argumento meditationum ſuarum ſiſtit ſpecimen. In tabulis natalitiis magno numero congeſtis non poteſt non digna attentione videri proportio illa, quae in numeris natorum vtriusque ſexus cernitur. Maſculam prolem ſequiori praeualere, obſeruationes abunde docent; id vero vtrum mero caſu, an ex peculiari quadam ipſius naturae ad generandum ſexum maſculinum procliuitate eueniat, quaeſtio eſt altioris indaginis et tanti Geometrae ſtudio digniſſi-

 ma.

ma. Problema hoc intricatiſſimum, quod eo tendit, vt ex ingenti caſuum fortuitorum numero ſortis ipſius modificationes et leges ac regulae illae, ipſi adeo ſorti praeſcriptae, eruantur, Ill. Auctor iam in alia diſſertatione praecedenti Commentariorum Tomo inſerta tractare aggreſſus eſt; binas ſcilicet fingit hypotheſes, in quarum vna natura ad generandum ſexum vtrumque aeque procliuis eſſe, in altera vero maſculino magis fauere ſtatuitur; ex quibus binis vtra ſit vera naturae lex, Ill. Auctor ita inquirit, vt pro vtraque leges probabilitatis computet et cum tabulis anthropologicis conferat atque ita ex calculi cum obſeruationibus conſenſu de hypotheſeos veriſimilitudine iudicet. Poſito igitur partuum annuorum numero $= 2\,N$ quaeritur probabilitas, vt multitudo puellorum ſit $= m$, adeoque ea puellarum $= 2\,N - m$: hanc itaque quaeſtionem Ill. Auctor primo pro priori hypotheſi, qua natura vtrique ſexui aequaliter fauere ſtatuitur, in priori ſua diſſertatione reſoluit; et probabilitatis quaeſitae valorem ita inuenit generaliter expreſſum:

$$\frac{2\,N.}{1.}\frac{(2\,N-1)}{2.}\frac{(2\,N-2)}{3}\cdots\frac{(2\,N-m+1)}{m}\cdot\frac{1}{2^{2\,N}}$$

ex cuius formulae ad varios caſus adplicatione complures elegantes et reconditas concluſiones deriuauit.

Expedito itaque problemate pro priori hypotheſi; Ill. Auctor eandem quaeſtionem in praeſenti diſſertatione etiam pro poſteriori hypotheſi reſoluit, ſtatuendo ſcilicet, naturam maſculae proli magis fauere;

vere, quam alteri, idque in ratione conſtanti $a:b$; qua quidem noua conditione fieri non potuit, quin argumentum euaderet longe intricatius. Primum itaque ex combinationum theoria Ill. Auctor probabilitatis quaeſitae valorem ita definiri inuenit, vt ad formulam modo allegatam inſuper accederet factor $\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N}$, qui quaſi indicem conſtituit differentiae inter probabilitates pro vno eodemque caſu in vtraque hypotheſi computatas. Ante omnia igitur cardo rei in eo verſabatur, vt ex ſufficienti obſeruationum numero valor rationis $\frac{a}{b}$ determinaretur; quae quidem proportio eo innoteſcit exactius, quo plures conferuntur obſeruationes et quo maior eſt in ſingulis ſumma partuum; cum vero diuerſimodae deductiones ex iſtis obſeruationibus formari queant; Ill. Auctor eum modum, quo ſtatuitur eſſe a ad b, vti ſumma puerorum natorum ad ſummam filiarum natarum, ceteris cenſuit praeferendum. Quo igitur conſtituto, ex tabulis Londinenſibus concluditur $\frac{a}{b} = 1,055$; hocque valore Ill. Auctor tanquam veriſimillimo vtitur, omnesque quae in iſta hypotheſi de propoſito problemate quaeſtiones formari poſſunt, reſoluit et concluſiones ex ipſa theoria deductas cum obſeruationibus comparat; vbi quoque tanta cernitur naturae in ipſis ſuis variationibus regularitas et tantus theoriae cum obſeruationibus conſenſus, vt Ill. Auctor aliquot tabulas, conſenſum turbaturas, pro erroneis declarare tuto potuerit erroresque facto examine actu deprehenderit. Neque

tamen

tamen hic conſenſus de limitibus aberrationum arctioribus eſt intelligendus, cum Ill. Auctor oſtenderit obſeruationes etiam ducentorum annorum, Londini inſtituendas, etiamſi fuerint accuratiſſimae, nondum tamen ſufficere ad tollendam haeſitationem 0, 006 in definienda ratione $\frac{a}{b}$, quam legem naturalem in generando vtroque ſexu adpellari conuenit.

Nouum igitur grauiſſimi huius argumenti euolutio ſiſtit ſpecimen, quanto cum acumine inſignis hic Geometra etiam iſtas naturae leges perſcrutetur, quas ea euentuum prorſus fortuitorum ſpecie inuoluiſſe videtur.

II.

Solutio Problematis, quo duo quaeruntur numeri, quorum productum, tam ſumma, quam differentia eorum ſiue auctum ſiue minutum, fiat quadratum.

Auctore L. Eulero pag. 29.

Problema, quod Ill. Auctor in hac diſſertatione euoluit, ad analyſin Diophanteam pertinet, ſeque non ſua ſolum elegantia, ſed et eo commendat, quod ad eius ſolutionem ſingularia requirantur calculi artificia. Quanquam perſpecta problematis natur

tur

tura pateat, id innumerabiles ſolutiones admittere; tamen Ill. Auctor poſt plura demum tentamina binos numeros problemati idoneos inuenire potuit, idque methodo indirecta, quae ad inuentionem plurium eiusmodi numerorum nihil praeſtaret ſubſidii. Idem tamen argumentum cum Ill. Auctor poſtea iterum meditationi ſuae ſubiiceret; caſu fortuito et ſingulari in ſolutionem generalem incidit; quam igitur in praeſenti diſſertatione euoluit vberius, et artificia exponit, quorum ope, ſuperatis problematis difficultatibus, ad iſtam ſolutionem peruenit. Problema in eo conſiſtit, vt ſatisfiat his quatuor aequationibus

$$\text{I. } AB+A+B=0. \quad \text{II. } AB+A-B=0$$
$$\text{III. } AB-A+B=0. \quad \text{IV. } AB-A-B=0.$$

Haud ita difficulter ſtatim iudicari poteſt, iſtos numeros integros eſſe non poſſe; vnde poſito $A=\frac{z}{x}$ et $B=\frac{z}{y}$ et admiſſa ſigni ambiguitate aequationes quatuor adimplendae his duabus formulis repraeſentari poſſunt:

$$\frac{z}{xy}(z+y\mp x)=\square \quad \text{et} \quad \frac{z}{xy}(z-y\mp x)=\square$$

in quibus vt factor poſterior euadat quadratus, facile efficitur, ponendo

$$z=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{(pp-ss)(qq-rr)}{2};$$

praecipua vero difficultas in eo verſatur, vt pro p, q, r, s eiusmodi aſſumantur valores, quibus et alter ille factor communis $\frac{z}{xy}$ quadratum reddatur.

Quodſi igitur modo memorati ipſorum x et y valores in hoc factore ſubſtituantur, formula, quae quadrata eſt efficienda, inde reſultans

$$2pqrs(pp-ss)(qq-rr)(pp+ss)(qq+rr)=\square$$

non quatuor ſolum quantitates diuerſas continet, ſed ſingulae etiam illae quantitates ad quintam vsque dimenſionem aſſurgunt; ex quo facile liquet, problematis huius ſolutionem longe tranſcendere communia illa artificia, quae pro reſolutione eiusmodi quaeſtionum in Analyſeos Diophanteae inſtitutionibus tradi ſunt ſolita. Ad ſuperandam hanc difficultatem Ill. Auctor eo vtitur artificio, vt aliquot ingenioſis poſitionibus factoribus denominatoris fractionis memoratae $\frac{z}{xy}$ tot, quot fieri poteſt, communes diviſores concilientur; quorum multiplicatio cum factores efficiat quadraticos, iis omiſſis quaeſtio ad formulam multo ſimpliciorem $\frac{5mm-6mn+2nn}{2n(2m+n)}$ quadratam efficiendam reuocatur, cui adeo ſtatim ac vnicus caſus idoneus innotuit innumerabilibus modis ſatisfieri poteſt; cum ſcilicet tam numerator, quam denominator quadratum eſſe debeat, eorum quoque productum tale ſit neceſſe eſt; ex hac vero multiplicatione formula reſultat, quae generaliter ita repraeſentari poteſt

$$\alpha\alpha z^4-2\beta.z^3+\gamma.z^2-2\delta z+\varepsilon\varepsilon=\square$$

cuius quidem aequationis reſolutionem et quatuor ipſius z idoneos valores etiam per conſuetas methodos inuenire licet; quemadmodum vero infinite multae

multae ſolutiones erui queant, Ill. Auctor hic vberius exponit. Sub finem diſſertationis, quanquam problema iam fuerit reſolutum, aliae ſuper adduntur transformationes formulae reſoluendae; indeque caſus complures ſpeciales actu euoluuntur, inter quos bini ſequentes in numeris non nimis magnis notatu iprimis digni videntur

$$A = \frac{10033}{648} \quad \text{et} \quad B = \frac{4205}{3872}.$$

III.

Obſeruationes circa radices aequationum.

Auct. L. Euler pag. 51.

In hac diſſertatione Ill. Auctor argumentum pertractat, quod ideo attentione ſua dignum iudicauit, quia id compluribus ſpeculationibus doctrinam ſerierum noua luce illuſtrantibus occaſionem praebere poteſt. Propoſita aequatione algebraica cuiusuis gradus rationali, quae generaliter ita repraeſentari poteſt,

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} \text{ etc.}$$

nota eſt Geometris elegans illa lex, qua ſummae omnium radicum, ſummaeque dignitatum omnium radicum exprimuntur; ita, vt ſi $\int. x^n$ denotet ſummam omnium radicum ad dignitatem n eleuatarum ſit, poſito $n = 1; 2; 3.$ etc.

$$\int. x = A; \int. x^2 = A\int. x + 2B = A^2 + 2B$$

$$\int. x^3 = A; \int. x^2 + B.\int x + 3C = A^3 + 3AB + 3C$$

 vbi

vbi igitur ſummae ſequentes per praecedentes et litteras A, B, C etc. coniunctim vel, illis eliminatis, per ſolas has determinantur.

Ad explorandam legem, qua iſtae formulae progrediuntur, duo potiſſimum ſunt conſideranda: primum ſcilicet modus, quo litterae A, B, C etc. inter ſe combinantur; deinde vero vnciae illae numericae, quibus ſinguli termini afficiuntur, in quarum potiſſimum indole perſpicienda praecipua difficultas cernitur. In prima igitur diſſertationis parte III. Auctor id negotii ſuſcepit, vt formam erueret generalem, quae exprimat $\int x^n$ ſiue ſummam ſingularum radicum ad poteſtatem n eleuatarum. Quam vero cum eſſet adeptus, ſtatim id obſeruauit, inventam ſeriem in infinitum excurrentem non repraeſentare valorem ipſius $\int x^n$, niſi ſub his binis conditionibus, primo vt exponens n ſit numerus integer poſitiuus, deinde vero vt ex iſta ſerie omnes termini reiiciantur, in quibus littera A exponentem negatiuum eſſet adeptura. Noua vero hinc eaque momenti non exigui quaeſtio oritur, quiſnam ſcilicet ſit valor iſtius ſeriei, ſi binarum illarum conditionum ratio non habeatur, adeoque ſi n denotet numerum quemcunque et terminorum ſeriem inuentam conſtituentium nullus excludatur. Reſolutio huius quaeſtionis theorema ſubminiſtrauit elegantiſſimum et vſus habiturum ampliſſimos, iſtam ſcilicet memoratam ſeriem, ſi ad binas illas conditiones non attendatur, non ſummam omnium radicum ad poteſtatem

ſtatem n eleuatarum, ſed poteſtatem ipſam n radicis maximae exprimere; ita, vt ope huius theorematis propoſitae aequationis cuiuscunque:

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} \text{ etc.}$$

radicem maximam non ſolum ipſam, ſed eius etiam poteſtatem quamcunque immo et logarithmum hyperbolicum per ſeries infinitas commode exhibere liceat.

IV.

Problema Algebraicum ob affectiones prorſus ſingulares memorabile.

Auctore L. Eulero pag. 75.

Problema, quod in hac diſſertatione reſoluitur, cum quadratis magicis multum habet affinitatis, ſed ob affectiones prorſus ſingulares longe magis eſt memorabile. Inueniendae nimirum ſunt nouem quantitates A, B, C, D etc. quae ſint eius indolis, vt in quadratum hoc modo diſpoſitae

A, B, C
D, E, F
G, H, I

duodecim his conditionibus ſatisfaciant:

1°. $A^2+D^2+G^2=1$. 4°. $AB+DE+GH=0$
2°. $B^2+E^2+H^2=1$. 5°. $AC+DF+GI=0$
3°. $C^2+F^2+I^2=1$. 6°. $BC+EF+HI=0$.
7°. $A^2+B^2+C^2=1$. 10°. $AD+BE+CF=0$
8°. $D^2+E^2+F^2=1$. 11°. $AG+BH+CI=0$
9°. $G^2+H^2+I^2=1$. 12°. $DG+EH+FI=0$.

Prima obſeruatio , quam Ill. Auctor de hoc problemate adfert , in eo conſiſtit , vt id ad claſſem problematum indeterminatorum referat ; id quod eo magis paradoxum videri omnino debet, cum numerus conditionum adimplendarum ſuperet numerum quantitatum incognitatum ; vnde problema potius pro plusquam determinato habendum foret ; verum natura problematis penitus perſpecta , demonſtrari poteſt , adimpletis 6 prioribus conditionibus , ſex poſterioribus neceſſario ſatisfieri adeoque tres illarum quantitatum arbitrio noſtro relinqui. Haec vero ipſa elegans adfectio , qua problematis euolutio multo redditur ſimplicior , tantum abeſt , vt ſit obuia , vt potius Ill. Auctor eam ſub forma inſignis theorematis proponat , quod demonſtratu difficillimum cenſeri debeat. Praeterea ipſum problema non pro inani luſu ingenii eſt habendum ; ſed in doctrina de natura ſuperficierum ampliſſimi vſus eſt ; quem poſtquam oſtendiſſet Ill. Auctor , primo completam theorematis modo memorati demonſtrationem tradit ; deinde vero problematis ſolutionem ex theoria angulorum petitam ſiſtit ; quae qui-

dem

dem in ſe eſt elegantiſſima, ſed eo defectu laborat, vt ex ea vix quicquam ſubſidii pro reſoluendis aliis huius generis quaeſtionibus magis complicatis repeti queat. Hanc ob rem Ill. Auctor ſolutionem generalem inueſtigare adgreditur eamque non modo ad caſum propoſitum nouem quantitatum, ſed ad complicatiores quoque, quos 16, 25, etc. quantitates incognitae ingrediuntur, adcommodat, immo et oſtendit, quomodo ad 12 priores conditiones nouem aliae adiici potuiſſent, quae vero itidem re ipſa in ſex prioribus neceſſario inuoluuntur. Coronidis loco Ill. Auctor problematis ſolutionem ex methodo Diophantea petitam in numeris rationalibus pro caſu 9 numerorum ſubiungit; ad caſum vero 16 numerorum iſta methodus difficulter accommodatur; alio tamen modo eoque prorſus ſingulari Ill. Auctor et pro hoc caſu ſolutionem latiſſime patentem nactus eſt; in quam tamen cum non niſi diuinando inciderit, ſi quis methodum directam ad talem ſolutionem manuducentem inueſtigauerit, is non Algebrae ſolum communi, ſed methodo etiam Diophanteae inſignia incrementa attuliſſe foret cenſendus.

V.

V.

Solutio Problematis Algebraici de inveſtigatione numerorum continue proportionalium, quorum datur ſumma *a* et ſumma quadratorum *b*.

Auctore And. Ioh. Lexell. pag. 107.

Apud varios Auctores, qui elementa Algebrae expoſuerunt, huiusmodi occurrere ſolent problemata; inuenire quatuor vel quinque terminos progreſſionis geometricae, ex datis eorum ſumma et ſumma quadratorum, generalem autem ſolutionem problematis, quo quotcunque quaeruntur numeri continue proportionales, datis eorum ſumma et ſumma quadratorum, alicubi allatam eſſe non conſtat. Quamuis vero ipſum problema in ſe ſatis ſterile ſit, eius ſolutio tamen ob plura artificia Analytica in ea adhibita attentionem omnino mereri videtur. Ex natura quidem quaeſtionis propoſitae liquet, pro problemate ſoluendo duas proponi aequationes, binas incognitas inuoluentes, adeoque in eo elaborandum eſſe, vt per harum aequationum combinationem, vna harum incognitarum eliminetur, adeoque ſic perueniatur ad aequationem, quae non niſi vnicam incognitam inuoluat. Hoc autem certe minus feliciter ſuccedet, ſi eas incognitas, quas aequationes primitiuae ſuppeditant, in calculo retinere quis velit, tentan-

tentandum igitur eſt, an non ſubſtitutione quadam facili eiusmodi introduci queat quantitas, quae ad ſimpliciſſimam perducat aequationem finalem? Oſtendit autem Cl: huius diſſertationis auctor, ſi ſumma omnium terminorum dicatur a, ſumma quadratorum b, deinde vero primus terminus x^m et vltimus y^m, pro $a+\frac{b}{a}-x^m-y^m$ ſubſtitui poſſe u, et tum quidem calculo abſoluto, u ſemper per aequationes facillimas exprimi, ſi enim numerus terminorum fuerit par, tum gradus aequationis incognitam u inuoluentis exprimetur per numerum dimidium eius quo numerus terminorum deſignatur; ſin vero termini progreſſionis geometricae numero impari occurrant, mulctandus is eſt vnitate, tumque reſidui dimidium capiendo habebitur gradus aequationis per quam incognita u determinatur. Sic ſi notum ſit terminorum numerum eſſe 8, u per aequationem biquadraticam exprimetur, ſimili autem ratione, ſi numerus terminorum ad 9 aſſurgat, aequatio inueniendae u inſeruiens adhuc erit biquadratica, aequationes autem pro u maxime diuerſae ſunt indolis, prouti numerus terminorum eſt vel par vel impar. Inuenta denique quantitate u, progreſſionis Geometricae termini omnes innoteſcunt, quum ſcilicet ſit $u=a+\frac{b}{a}-x^m-y^m$, atque praeterea $y^m-x^m=2\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$, poſito nimirum $2e=a-\frac{b}{a}$.

VI.

De Criteriis integrabilitatis formularum differentialium.

Auctore And. Ioh. Lexell pag. 127.

In calculo integrali res ſane maximi eſt momenti, ea cognoſcere criteria, ex quibus dijudicari poſſit vtrum formula quaedam differentialis integrationem admittat, nec ne? Quemadmodum enim formularum integrabilium integralia facile inueniuntur; ita pro formulis integrabilitatis caractere deſtitutis, talium criteriorum ope facile deteguntur multiplicatores, in quos hae formulae duci debent, vt euadant integrabiles. Quamquam vero varia huiusmodi criteria a Geometris iamdudum ſint inuenta, ſingula tamen eo laborarunt defectu, quod nimis eſſent particularia, inſigne igitur Theorema ab Ill. *Eulero* in Tomo III. *Calculi Integralis* allatum, quo exponitur criterium integrabilitatis pro formula quacunque differentiali binas variabiles x et y et huius differentialia quaecunque continente, eo maiori in pretio habendum eſt, quod omnino generaliſſimum ſit, atque vnica conditione indicet, vtrum formula propoſita differentialis integrationem admittat vel ſecus? Hoc autem Theorema, licet iam demum anno praeterito in nunquam ſatis laudato opere *Calculi Integralis* euulgatum fuit, tamen ad minimum ante

ante 16 annos ab Illuſtris. eius Auctore inuentum fuiſſe certiſſime nobis habemus perſpectum. Quum vero interea Illuſtr. *Eulerus* hoc Theorema cum inſigni quodam Galliae Mathematico communicaſſet, probabile omnino eſt, Illuſtr. Marchionem de *Condorcet* per eum in cognitionem huius Theorematis perveniſſe. Ex Hiſtoria enim Illuſtriſſimae Academ. Scient. Pariſinae pro annis 1764 et 1765 accepimus, modo laudatum Marchionem primum demonſtrationem huius Theorematis cum Illuſtr. Acad. Pariſina communicaſſe, tum vero conſcripto Tractatu de *Calculo Integrali* doctrinam de criteriis integrabilitatis omnino fuſius explicaſſe. Idem vero inſigne Theorema occaſionem quoque ſubminiſtrauit Cl. huius diſſertationis Auctori, inquirendi in criteria formularum differentialium. Quum enim demonſtratio Theorematis modo laudati ab Illuſtr. *Eulero* ex ſolis doctrinae variationis principiis ſit adornata, operae omnino pretium fuit examinare, an non demonſtratio quaedam magis directa, id eſt ex ſolis calculi differentialis principiis eruta, inueniri poſſet. Hunc igitur in finem primum neceſſe erat, eiusmodi veritates calculi differentialis antea cognitas et demonſtratas fundamenti loco ſubſternere, quae huic vſui aptae eſſe poſſent, facile autem perſpicere licuit, omne de criteriis integrabilitatis iudicium peti poſſe, ex notis proprietatibus formularum integrabilium, quae in Inſtit. Calcul. Differ. Illuſtr. *Euleri* P. 1 § 234 et ſeqqu: nec non apud alios de calculo integrali Auctores occurrunt. Cum vero Cl. Auctor diſſertationis prae-

ſentis antequam Theorema *Eulerianum* ſibi proponeret demonſtrandum, inueniſſet eius demonſtrationem multum ſubleuari, ſi primum huius Theorematis conuerſum demonſtraretur, allata igitur Theorematis conuerſi demonſtratione, demonſtrationem Theorematis directi ipſi ſubiunxit. Qua vero ratione in his demonſtrationibus adornandis verſatus ſit, et quae ex iisdem deduxit conſectaria, id ex ipſa diſſertatione melius addiſci poteſt, quam heic recenſione exponi. Inuento itaque ſic criterio integrabilitatis pro formula $V dx$, vbi V functionem quandam variabiles x et y, nec non huius differentialia quaecunque inuoluentem indigitat; progreditur Cl. Auctor ad formulas differentiales complicatiores, quae alias formulas integrales iam inuoluunt, vti $dx\int V\,dx$, $dx\int dx\int V\,dx$ etc. nec non $\int V\,dx\int V'\,dx$, oſtendit autem quomodo pro ſingulis huiusmodi formulis criteria integrabilitatis aſſignari queant. Porro quoniam hucusque ſuppoſitum fuit, quantitatem V non continere niſi binas quantitates x, y cum differentialibus quibuscunque ipſius y, neceſſum omnino erat diſquirere, qualia oriantur criteria integrabilitatis, ſi quantitas V inuolueret non ſolum quascunque quantitates x, y, z, v etc., ſed etiam differentialia quaecunque ipſorum y, z, v, poſito nimirum dx conſtante. Regula autem generalis quae pro his criteriis aſſignandis valet, ita exprimi poterit: „in formula $V\,dx$ quaeuis variabilium y, z, v etc. „ſeorſim pro variabili ſpectetur, reliquis pro con„ſtantibus habitis, et quaerantur quaenam criteria in„tegrabilitatis, pro ſingulis expreſſionibus formulae

„Vdx

„$V dx$ oriantur, haec criteria collectim ſumta prae-
„bebunt caracterem, ex quo diiudicandum ſit vtrum
„formula $V dx$ in qua omnes y, z, v etc. ſimul vt
„variabiles tractantur integrabilis ſit nec ne? Deinde quum in Analyſi nuper conſiderari coeperint formulae integrales duplicatae, Cl. Auctor earum quoque criteria integrabilitatis examinare e re eſſe duxit. Notum autem eſt formulas integrales duplicatas huiusmodi ſignandi ratione $\int\int V\, dx\, dy$ exprimi, cuius expreſſionis ſenſus eſt, primum capi debere integrale ipſius $V\, dx$ poſita ſola x variabili, deinde vero integrale ipſius $dy \int V dx$, poſita ſola y variabili. Quamquam vero pro huiusmodi formulis caracter integrabilitatis non amplius vnica conditione exprimi queat, commode tamen fit, vt omnes hae conditiones vnica aequatione comprehendi queant, ea tantum conditione obſeruata quod non ſolum tota expreſſio euaneſcat, ſed etiam omnes eius termini, qui in iisdem lineis vel horizontalibus vel diagonalibus diſpoſiti ſunt. Hoc autem negotium etiam generaliſſime perficere licet, ſi ſcilicet V praeter x et y, inuoluat alias quascunque quantitates z, u, v etc. cum earum differentialibus, regula enim tum obſeruanda plane ſimilis erit ei, quam modo attulimus. Denique ne quid ad vniverſalitatem huius doctrinae deſideraretur, Cl. Auctor criteria integrabilitatis formularum quoque triplicatarum vt $\int\int\int V\, dx\, dy\, dz$ expoſuit, vbi iterum quamvis numerus criteriorum integrabilitatis inſignis ſit, omnia tamen vnica aequatione ſatis concinna comprehendi poſſunt.

Quum de Illuſtr. Marchionis de *Condorcet* Libro aliter nobis non conſtet, niſi ex modo memorata Hiſtoria Acad. Pariſinae, ignotum omnino nobis eſt in quo diſquiſitiones noſtri Auctoris, cum illis Illuſtr. Marchionis conuenire queant, hoc tamen ex iſta recenſione didicimus nihil ab Illuſt. *Comite* de criteriis integrabilitatis formularum duplicatarum, triplicatarum vel altiorum allatum fuiſſe, vnde ſi haec diſſertatio nihil aliud noui contineret, ſaltem eo nomine commendari mereretur, quod modus inueniendi criteria integrabilitatis formularum duplicatarum triplicatarum, quin et altiorum ab Auctore noſtro ſit indigitatus. Circa diſſertationem autem hanc id imprimis deſiderari videtur quod Cl. Auctor ſuam Theoriam exemplis illuſtrare intermiſerit, quem tamen defectum alia fortaſſis occaſione ſupplebit.

VII.

De curua rectificabili in ſuperficie Sphaerica.

Auctore L. Eulero pag. 195.

Cum ſeculo praeterito Geometrae in magno ſic dicto Problemate Florentino reſoluendo occupati eſſent, etiam ex affinitate materiae problema ab ipſis fuit agitatum, de curuis rectificabilibus in ſuperficie

perficie

perficie ſphaerica deſcribendis, cui tamen quaeſito ſatisfacientem non niſi vnicam lineam curuam inuenire valuerunt. Haec vero circumſtantia tanto magis notatu digna eſt, quod quum ipſa quaeſtio ad analyſin infinitorum indeterminatam pertineat, infinitas ſolutiones admittere videatur, vnde et operae pretium fuit ſolutionem inuentam examinare, vtrum ſcilicet ex ea aliae ſolutiones deriuari poſſint, an vero euidenti ratione probari poſſit, non niſi vnicam hanc ſolutionem poſſibilem eſſe? Hoc autem inſtitutum ita proſecutus eſt illuſtriſſimus huius diſſertationis Auctor, vt poſtquam ex principiis mere analyticis ſolutionem ſatisfacientem deduxerit, tum quoque oſtendat, quomodo ea ex conſiderationibus Geometricis principiis ſcilicet Trigometriae Sphaericae in vſum vocatis, inueniri queat. Hunc in finem primo curuam quaeſitam tamquam datam ſpectando, eius quaerit euolutam, ope elegantiſſimae formulae pro radio oſculi cuiuscunque puncti curuae quaeſitae; tum vero ordine retrogrado, curuam euolutam conſiderans, ſimplicem omnino et concinnam inuenit formulam, pro elemento curuae quaeſitae, per data curuae euolutae definiendo. Si enim curuae euolutae arcus quicunque dicatur s et radius oſculi ipſi reſpondens r, habebitur pro elemento curuae per euolutionem ortae, haec expreſſio $\frac{d\,s\,Sin.\,s}{Tang.\,r}$, quam igitur vt ſolutioni ſatisfiat, integrabilem eſſe oportet. Iam vero euidens eſt, problematis propoſiti ſolutionem ab eo pendere, vt inueniatur curua algebraica in ſuperficie ſphae-

ſphaerica, cuius quicunque arcus arcui alicui circuli maximi ſit aequalis, tum vero vt pro ea curua haec formula $\frac{d\,s\,Sin.\,s}{Tang.\,r}$ abſolute ſit integrabilis, id eſt vt eius integrale per aliquem Sinum, Coſinum vel Tangentem exprimi queat. Facile autem patet his conditionibus ſatisfieri, ſi curua euoluta ſtatuatur circulus minor, cuius radius ad radium Sphaerae rationem teneat rationalem, quorum circulorum quum infinita detur multitudo, videri poſſet infinitas quoque problematis ſolutiones hinc deriuari, quum tamen hae omnes eadem comprehendantur formula, ad vnicam ſolutionem omnes referri poſſunt. Difficillimum autem eſt diiudicare, an praeter circulos minores, aliae quoque deſcribi queant curuae geometricae, proprietatibus ſupra requiſitis gaudentes. Hoc ſaltem facile demonſtrari poteſt, quod omiſſa vltima conditioue, qua ſcilicet requiritur, vt $\frac{d\,s\,Sin.\,s}{Tang.\,r}$ ſit integrabile, infinitae omnino dentur curuae geometricae quarum rectificatio, per arcus circuli maximi exhiberi queat. Si enim curua quaecunque Geometrica in ſuperficie Sphaerica deſcripta proponatur, certo conſtat eius euolutam quoque fore Geometricam et inſuper hac proprietate gaudere, vt ſingulae eius portiones per arcus circulorum maximorum exprimantur, vbi tamen id memorabile eſt, quod adhuc perſpicere non liceat quomodo inuentio eiusmodi curuarum ex principiis mere analyticis inueniri queat, quod ſi praeſtare liceret, maximi ſane eſſet vſus in hac Analyſeos parte vlterius excolenda.

PHYSICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

SECTIO TERTIA.

De motu fluidorum lineari potiſſimum aquae.

Auctore L. Eulero pag. 219.

In hac tertia Sectione Illuſtr. Auctor fluidorum et ſpeciatim aquae eiusmodi conſiderat motum, quo vena fluidi ſecundum certam mouetur directionem et omnes eius particulae per quamcunque ſectionem ad directionem motus perpendicularem eadem feruntur celeritate, cuius igitur motus generalia principia in Capite I. huius Sectionis explicantur. Quamuis autem huiusmodi motus conſideratio, tum imprimis locum obtineat, cum motus fluidorum per tubos anguſtiſſimos definiendus ſit, quippe quum eo caſu directio fluidi cum ipſa directione tubi manifeſto conueniat, atque particularum fluidi celeritas non poſſit eſſe multum diſcrepans; nihilo minus tamen etiam in tubis ſatis amplis, motus fluidi per principia motus linearis, ſaltem ſine ſenſibili errore definiri poteſt, vnde et effluxus aquae ex vaſis etiam ampliſſimis per foramen factus ex his principiis definitus cum expe-

rientia omnino egregie conſentit. Tractatio autem motus linearis multiplicem includit varietatem, habito tum reſpectu ad ipſam figuram tuborum, cum ad ſtatum fluidi per ipſos translati, quum enim ipſi tubi poſſint eſſe vel recti vel curui, hi vero demum plurimum inter ſe differre prouti eorum directrices vel in idem planum incidunt vel ſecus, motus principia pro diuerſa hac figurae ratione ſeorſim definienda ſunt. Deinde conſideratio motus linearis aliquam ſubit variationem, prouti fluidum vel continuo motu ferri ſupponitur vel etiam foramine facto alicubi effluere concipitur. Et denique principia motus diuerſa inuenientur prouti tubi vel in quiete vel mobiles concipiuntur. Hoc igitur capite generalia principia motus linearis per tubos ſiue rectos ſiue curuos cuiuscunque generis ſtabiliuntur. Dum vero ad ſpecialem magis explicationem motus linearis progreditur Illuſtr. Auctor, in genere obſeruat ſuae tractationis diuiſionem ex triplici imprimis fonte deriuari potuiſſe, vel ſcilicet ex ipſa diuerſitate fluidorum, quatenus eorum denſitas conſtans aut variabilis eſt, vel quatenus fluida conſiderantur aut elaſtica, aut non elaſtica, vel denique quatenus tubi conſiderantur aut aeque ampli, aut diuerſae amplitudinis, et quum amplitudinis variatio heic omnino maximi ſit momenti, hinc imprimis diuiſionem operis deriuandam eſſe ratus eſt Illuſtr. Auctor, vnde Capite quoque II^{do}. motum primo aquae per tubos aequaliter amplos explicauit. Sequentes vero caſus motus linearis hic impri-

imprimis conſiderantur, 1°. ſi aqua ſola grauitate animata per tubum curuum continuo fluat. 2°. Si aqua praeter grauitatem, ad vtrumque tubi terminum certis viribus vrgeri concipiatur. 3°. Si aqua in altero termino effluat, in altero vero prematur a vi quacunque. 4to. Si aqua in altero termino effluat, in altero adfluat data vi propulſa. Circa vltimum hunc caſum omnino attentione dignum eſt, ſi vis propellens fuerit conſtans et aequalis datae cuidam magnitudini, celeritatem fluidi fore conſtantem, ſin autem vis illa data hac magnitudine aliquanto ſit maior, celeritatem fluidi continuo augeri, quod quum omnino paradoxum et experientiae contrarium ſit, inde concludere licet, vires ad aquam propellendam adhibitas non eius eſſe indolis, vt eadem intenſitate agant, quacunque celeritate aqua propellitur. Hoc enim pro certo et indubitato tenendum eſt, omnes vires quae ab hominibus, animalibus, aquae fluxu vel vento proficiſcuntur, ita ſe habere, vt aucta celeritate obiecti cui applicantur, debilitentur, atque adeo hac celeritate ad certum gradum increſcente plane euaneſcant. In omni igitur machinarum motu, non tam ad abſolutam quantitatem vis adhibitae, quam potius ad intenſitatem actionis eſt reſpiciendum, quae actio definitur per productum ex vi in celeritatem. Quum itaque hoc productum duplici caſu euaneſcere poſſit primum ſi celeritas $= 0$, tum vero ſi celeritas tanta vt vis euaneſcat, liquet omnino datae cuicunque vi, maximam reſpondere actionem, quae obti-

netur dum productum ex vi in celeritatem fit maximum. Caput III. huius ſectionis, motui aquae in tubis inaequaliter amplis definiendo deſtinatum eſt, problemata autem huius capitis, quum plane ſimilia ſunt iis, quae ex Cap. II^{do} attulimus iis vlterius heic recenſendis non immoramur, notaſſe tantum ſufficiat ex Probl. 55. omnia ea deduci, quae hucusque de effluxu aquae ex vaſis cuiuscunque figurae, afferri ſunt ſolita, quae tamen ita comparata ſunt, vt in plerisque caſibus cum experientia conciliari nequeant, idque imprimis quum ſolutio tantum valeat pro tubis anguſtiſſimis. In Capite Quarto eleuatio aquae ope antliarum exponitur, quum enim haec operatio in vita communi inſignem habeat vſum, eam accuratius explicare, omnino maximi momenti erat. Heic vero non ſolum motus antliarum ſimplicium conſideratur, ſed etiam docetur, quomodo binarum antliarum, vnius aquam haurientis, alterius eam proiicientis, et eadem vi agitatarum motus definiri debeat. Vltimum denique caput motum per tubos diuerſo caloris gradu infectos pertractat, quum enim is ſit caloris effectus vt volumina corporum expandat, adeoque ipſorum denſitatem imminuat, intelligitur in fluidis diuerſo caloris gradu praeditis, denſitatem particularum fluidi variabilem eſſe, hincque aequilibrium turbari, qualis autem hinc oriatur fluidi motus, id ipſum eſt quod Illuſtr. Auctor heic fuſe explicat.

II.

II.

Examen Phyſico - Mechanicum de motu mixto qui laminis elaſticis a percuſſione ſimul imprimitur.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 361.

Notum eſt a percuſſione in laminis varios produci poſſe motus inter ſe diuerſos et quorum vnusquisque peculiari ſua lege definiatur, ſcilicet aut motum progreſſiuum cum rotatorio circa centrum grauitatis coniunctum, aut motum itidem progreſſiuum, cui motus vibratorius accedit. Quum itaque ſic duplex effectus ab eadem producatur cauſſa, vtile omnino erit noſſe, quaenam proportio hos effectus intercedat, in genere enim tenendum eſt motum progreſſiuum tanto debiliorem fore, quanto maior percuſſionis pars impenditur ſiue in motum rotatorium, ſeu vibatrorium producendum, hanc igitur quaeſtionem accuratius exponere praeſenti diſſertatione, Illuſtr. eius Auctor ſibi propoſuit. Quod igitur priorem huius quaeſtionis partem attinet, demonſtratur punctum in quo percuſſio fit, eſſe centrum oſcillationis virgae ex centro rotationis ſuſpenſae et viciſſim centrum hoc rotationis cum ipſo centro oſcillationis virgae ex puncto percuſſionis ſuſpenſae coincidere, tum vero quoque motum rotatorium puncti percuſſi ad motum progreſſiuum

 centri

centri grauitatis virgae in conſtanti eſſe ratione, quae non mutabitur, ſiue fortius ſeu debilius virga percuſſa fuerit. Quemadmodum nunc in laminis inflexibilibus duplex produci poteſt motus, progreſſiuus centri grauitatis et rotatorius, ita in laminis elaſticis praeter motum progreſſiuum motus quoque vibratorius produci ſolet, cuius contemplatio eo maioris eſt vſus, quod leges motuum a percuſſione in corporibus elaſticis productorum communiter ſupponant, omnem effectum in variatione motus progreſſiui conſiſtere. Vt vero nunc proportio inter vtrumque motum definiri poſſit, ſequentem hypotheſin Illuſtr. Auctor fundamenti loco ſuppoſuit; curuam laminae ex vibratione inductam, talem fore vt permutatio vi viua minima pro eadem translatione puncti percuſſi abſoluatur. Hoc vero ſuppoſito demonſtratur punctum percuſſionis fore ipſum centrum oſcillationis curuae iſtius, vnde iam facile proportio inter celeritatem motus progreſſiui et vibratorii determinatur. Maioris igitur facilitatis gratia ſupponere licebit curuam iſtam ſimplicem eſſe parabolam, tumque erit velocitas centri grauitatis, ad velocitatem initialem puncti percuſſi vt 4 : 5, quamuis ſcilicet haec curuatura a vera aliquantum differat, tamen proportiones celeritatum inde deductae, non adeo multum a veris diſcrepabunt. Vt demum maior huic Theoriae fiducia conciliaretur experimentis quibusdam eam illuſtrare Cel. Auctori placuit, normam ſcilicet adhibens tripedalem ex ligno duro, flexili et elaſtico conſtructam, Latit.

10.

10 lin., craſſit. vero $\frac{1}{2}$ lin. eam tabulae horizontali politae impoſuit, in eiusque modo ſuperficiem latam, modo ſuperficiem gracilem percuſſiones fecit ſecundum directionem per centrum grauitatis virgae normalem, tumque ſequentia notauit phaenomena I. Si laminae a tergo vtrique extremitati duo globuli leuiuſculi adponerentur, et laminae ſuperficies lata antrorſum percuteretur, contigit, vt vterque globulus retrorſum, ipſa vero norma antrorſum impetum facerent. II. Idem euenit ſi globuli ab extremitate remouerentur ad diſtantiam duorum, trium vel quatuor pollicum, quin etiam etſi globuli laminae non eſſent contigui, ſed tantillo interuallo remoti. IV. Globulis ad diſtantiam $4\frac{3}{4}$ pollic. ab extremitate remotis, nulla amplius contigit repercuſſio, denique facta etiam percuſſione lateris normae gracilis, ſimilis repercuſſio obſeruata eſt in globulis prope extremitates virgae collocatis.

III.

Genuina principia doctrinae de ſtatu aequilibrii et motu corporum, tam perfecte flexibilium, quam elaſticorum.

Auctore L. Eulero. pag. 381.

Doctrina de figura corporum ſiue flexibilium ſeu elaſticorum, quatenus hucusque a Geometris eſt tractata, non latius extenditur, quam ad fila ſimplicia, quorum figura quam a viribus quibuscunque induunt, eſt explorata, quin etiam hae figurae ad curuas in eodem plano ſitas omnino ſunt reſtringendae. Completam autem Theoriam, pro figura ſiue ſuperficierum ſiue corporum flexibilium, tradere res ſane videtur eſſe tanto difficilior, quo certius conſtat adhuc ne vera quidem principia huius Theoriae eſſe ſtabilita, neque hic Illuſt. *Eulero* propoſitum fuit, eiusmodi laborem ſuſcipere, ſed potius eo anniti, vt huiusmodi principia generalia euolueret ex quibus vniuerſa doctrina de aequilibrio et motu filorum flexibilium et elaſticorum explicari poſſit. Pleraeque enim ſolutiones problematum ad hanc doctrinam pertinentium, a principiis vel particularibus vel ſaltem minus perſpicuis hucusque ſunt deductae, quare eo magis neceſſum fuit genuina principia huius doctri-

doctrinae exponere. Primum igitur problema generale cuius ſolutionem heic adfert Illuſt. Auctor ita exprimitur: Si *filum ſiue perfecte flexile ſiue elaſticum et in ſingulis punctis a viribus quibuscunque ſollicitatum ad ſtatum aequilibrii fuerit perductum, pro ſingulis eius elementis, ſtatum ſiue tenſionis ſiue inflexionis inueſtigare.* Tradita vero ſolutione huius problematis eius applicatio fit, ad quatuor caſus ſpeciales, filorum ſcilicet flexibilium, vniformiter elaſticorum, inaequaliter elaſticorum vel denique eiusmodi filorum elaſticorum quae in ſtatu ſuo naturali datam habent curuaturam. Deinde vt melius intelligantur praecepta generaliter tradita, applicatio quoque facta eſt ad problemata particularia, ſcilicet ad ſolutiones problematum de inueniendis curuis catenaria, velaria et elaſtica, quarum quidem priores inter ſe conueniunt, vti iam dudum eſt obſeruatum. Alterum problema generale heic pertractatum ſequens eſt: *Si filum ſiue perfecte flexile ſiue elaſticum atque in ſingulis punctis a viribus quibuscunque ſollicitatum vtcunque moueatur, principia exponere ex quibus hunc motum definire liceat, ſuppoſito quod totus motus ſemper in eodem plano abſoluatur.* Huius autem problematis ſolutio eo magis ardua cenſenda eſt, quod pleraeque quantitates variabiles eam ingredientes, vt functiones duarum variabilium ſpectari debeant. At commode tamen fit, vt ſolutio huius problematis ad eam prioris reduci queat. Pauciſſima omnino ſunt problemata, quorum ſolutio ad huiusmodi motum reducitur, inter ea vero praeprimis memorabile videtur, id de motu oſcillatorio

cordarum vibrantium de quo vti conſtat in tot diverſas abierunt ſententias ſummi noſtri ſeculi Mathematici. Deinde ad huiusmodi problemata pertinent quoque ea, quae ab Auctoribus de inflexionibus minimis laminarum elaſticarum ſunt tradita, quales igitur aequationes pro vtroque Problemate ſoluendo ex principiis generalibus deducantur, expoſitum quoque heic eſt.

IV.

De Ictu glandium, contra Tabulam exploſarum.

Auctore L. Eulero. pag. 414.

In doctrina de percuſſione corporum eiusmodi ſaepe occurrunt phaenomena, quae primo intuitu haud parum paradoxa et rationi contraria videntur, attentius autem examinata cum legibus naturae optime conſentire deprehenduntur. Horum in numero ſequens omnino memorabile eſt, ſi ianua aperta lapide percutiatur, motu in ipſa generato clauditur, ſin vero ſclopetum contra eam explodatur, immota perſiſtit, glande exploſa eam penitus penetrante. Huius igitur phaenomeni rationem expoſiturus Illuſtr. huius diſſertationis Auctor, ictum glandium contra tabulam exploſarum accuratius exponere conſtituit, vbi quidem duos caſus a ſe inuicem diſtinguendos ſeorſim conſiderat, primum quo tabula immo-

immobilis concipitur, alterum quo ſuper plano horizontali libere eſt mobilis. Quod vero primum attinet caſum, ſi celeritas glandis ante ictum deſignetur per c, altitudo ex qua graue vno min: ſec: libere cadit per g, reſiſtentia tabulae per R et maſſa glandis per M, tumque ſtatuatur $\int \frac{R\,dx}{M} = f$, poſito $x = a$ toti ſcilicet craſſitici tabulae; obſeruat Illuſtr. Auctor glandem penitus per tabulam penetrare ſi fuerit $c > 2\sqrt{gf}$, ſin autem ſit $c < 2\sqrt{gf}$ glandem per tabulam perrumpere non poſſe. Pro caſu ſecundo, ſi retentis reliquis denominationibus, maſſa tabulae exprimatur per N, oſtenditur glandem per tabulam penitus perumpere ſi fuerit $cc > 4gf\frac{M+N}{N}$, quae conditio in eam pro primo caſu manifeſto abit poſito $N = \infty$. Hinc itaque intelligitur eo maiori glandis celeritate opus eſſe vt perumpat, quo leuior ipſa eſt tabula deinde et hinc quoque perſpicitur celeritatem tabulae poſt ictum eo fore minorem, quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, quod vti iam ſupra monuimus primo intuitu omnino abſonum videri potuiſſet. Vlterius quo ſolutiones allatas Illuſt. Auctor magis illuſtraret, eas ad notiones communes, conſeruationis ſcilicet quantitatis motus et virium viuarum reuocare Ipſi placuit, vbi quidem obſeruat vires viuas non penitus conſeruari, ſed aliquam diminutionem pati, tantam ſcilicet, quantam tabulae perforatio requirit. Quum autem in prioribus ſolutionibus reſiſtentia tabulae, tamquam vnice pendens a quantitate x, profunditate ſcilicet penetrationis ſit conſiderata, eiusmodi autem ſaepe occurrere poſſint caſus vbi haec reſiſtentia, non tantum variabilem x,

ſed aliam quoque veluti celeritatem implicet, neceſſum fuit oſtendere, quomodo ſolutiones pro huiusmodi caſibus adornandae ſint. Si enim tabula fluidi proprietate concipiatur praedita, tum nullum omnino eſt dubium, quin reſiſtentia non a variabili x pendeat ſed quadrato celeritatis ſit proportionalis, quoniam igitur tabulae non ſolum motus imprimendus eſt, ſed etiam eius particulae a ſe inuicem divellendae, euidens eſt reſiſtentiam duplicis generis heic conſiderari debere, adeoque totam reſiſtentiam ex duabus partibus componi, quarum prior functioni ipſius x ſit proportionalis, altera vero ipſo quadrato celeritatis.

PHYSICA

PHYSICA

I.

Rariorum Auium Expoſitio.

Auctore Sam. Gottl. Gmelin p. 439.

Varias hic aues Clar. Auctor deſcribit, iconibusque illuſtrat, quas in itinere ſuo per Ruſſicum Imperium facto, inter multa alia naturae producta hactenus obſeruauit. Non quidem omnes nouae prorſus et incognitae ſpecies ſunt, ſed deſiderantur tamen maximam partem accuratiores earum deſcriptiones, et in ſpecie icones, quae rarius apud Auctores inueniuntur. Vtrumque igitur a Clar. Auctore in hac Diſſertatione ſuppeditatur, qui ſecundum partes minutiſſimas non modo et colorum varietates ſingulas has aues verbis depingit, ſed ſingularum quoque partium, vt ſolet, dimenſiones laborioſe adiungit. Gregem ducunt Accipitres quidam: *Accipiter Macrourus*, circa vrbem Woronez, deinde ad omnem Tanain fluuium copioſe obſeruatus, cuius femina a mare adeo diſcrepat, vt pro diuerſa ſpecie facile haberi poſſit. Porro *Accipiter ferox* Aſtrachaniae frequens, *Accipiter Korſchun*, *Aquila Mogilnik* et *Noctua minor* in deſertis ad Tanain reperti. Sequuntur duae ex Gallinarum familia, *Perdix rufa* ſcilicet et *Phaſianus colchicus*, quarum deſcriptiones ab Auctoribus

 tradi-

traditae hic emendantur et ſupplentur. Poſthaec Ardeae quaedam, ea, cui *Kwakwae* nomen indidit Auctor, porro *caſtanea*, *ferruginea* et *niuea*, proponuntur, quae omnes ad Tanais littora primo vere et aeſtate copioſe obſeruantur, autumno vero, vnde venerant, ad mare nigrum redeunt. Has nondum deſcriptas exſtare Clar. Auctor putat. *Numenius igneus* et *viridis*, qui ſequuntur, in ſpecie prior, miris, quibus ornantur, coloribus, e viridi paſſim, paſſimque ex rubro, violaceo, aureis, ſe commendant. Prior auis, dum per aerem volitat, radiis ſolaribus illuſtrata, tota aurea reſplendet, vnde nomen ſortita. Poſterior magis viride tenet. Vtraque ad Tanais littora degit, piſcibus inſectisque victitat, gregatim volat, in altis locis nidificat. Denique Anſeres nonnulli, *Anas erytrocephala* nempe, *Anas Kogolka* et *Onocrotalus* Lin. e quibus hic poſterior, qui ad mare caſpium et nigrum habitat praecipue notabilis eſt, et tandem, poſt maximam, minores quaedam aues proponuntur, quibus etiam Ardea adiungitur, cuius ſpeciem dubiam Clar. Auctor reliquit.

II.
Deſcriptiones Auium.
Auctore I. Lepechin pag. 485.

Paruas quidem maximam partem, ſed egregias ſpecie et nouas auiculus, quas itidem in ſuo itinere

itinere obſeruauit, Clar. Auctor in hac Diſſertatione proponit. Prima earum *Emberiza* eſt *ſuperne rufa, ſubtus flaua, faſcia pectorali transuerſa ferruginea.* Obſeruatur pulchra haec emberizarum ſpecies circa Catharinopolin, vbi pineta imprimis inhabitare conſpicitur. Alia eiusdem generis ſpecies, non minus colorum varietate notabilis, eſt, quae definitur: *Emberiza capite diuerſimode faſciato, corpore ſupra rufeſcente, pectore atque imo abdomine canis.* Haec in iisdem cum priori regionibus inuenta fuit. Deinde motacillae ſpecies ſequitur, cui quidem cum Rubetra luccouenſi Briſſonii magna ſimilitudo eſt, ſed praeterquam, quod mas huius motacillae pectore gaudeat croceo, cuius nullam Briſſonius mentionem fecit, collare quoque illud album et interruptum, quo haec motacillae ſpecies donatur, ſatis eam ab auicula Briſſoniana, vt et a reliquis motacillarum ſpeciebus diſtinguere videtur. Quapropter eadem definitur: *Superne nigricans, torque albo interrupto pectore atque abdomine ſuperiore croceis.* Habitat in Betuletis et in locis paludoſis. Denique Strix proponitur minoris formae, quae Strigi paſſerinae etiam magnitudine multum cedit, ideoque definitur: *Strix capite aurito, e gente ſua minima, corpore toto gryſeo, fuſco, ferrugineo, alboque vario.* Circa Catharinopolin hanc ſpeciem Cl. Auctor invenit. His tandem piſcis adiungitur. *Cyprinus corpore oliuaceo, maculis fuſcis diſtincto, ima corporis parte cinnabarina, pinna ani radiis ſeptem*, itidem Catharinopoli obſeruatus.

III.

III.

Deſcriptio Cyprini Rutili, quem Halawel Ruſſi vocant, hiſtorico-anatomica; pag. 494. nec non

IV.

Deſcriptio Piſcis, e Coregonorum Genere, ruſſice Sig vocati, hiſtorico-anatomica pag. 504.

Auctore I. T. Koelreuter.

Piſces duos Clar. Auctor in his Diſſertationibus ſiſtit Naturae curioſis, quos olim Petropoli examinauerat, quorumque nunc deſcriptionem ad Commentaria noſtra augenda Academiae transmiſit. Eorum prior *Cyprinus* eſt, *pinna ani radiis duodecim, rubicunda* (*Rutilus*) LINN. Poſterior autem, e *Coregonorum* genere in ſecunda Diſſertatione deſcriptus, ille eſt, quem LINNAEVS (Syſt. Nat. Ed. 10. p. 310.). Salmonem Lauaretum vocat. Vtriusque huius piſcis poſtquam externam corporis figuram, habitum, colores, parteſque externas, ad characterem conſtituendum neceſſarias, verbis concinne delineavit, interiores quoque partes ſecundum ſitum, figuram et connexionem inter ſe ſimili ratione Clar. Auctor

Auctor deſcribit , et denique dimenſiones quoque partium externarum adiungit. In poſteriori Lien ex tribus lobis , plane diſtinctis , et nonniſi vaſorum ſanguineorum ope coniunctis , vel , ſi mauis , ex tribus lienibus compoſitus fuit. Notabilis autem eſt primo *Lerneae* quaedam ſpecies , hucusque incognita , quae pinnis Cyprini Rutili praeſertim pectoralibus frequenter adhaerere inuenta eſt , cuiusque ideo iconem ſecundum magnitudinem naturalem factam Clar. Auctor addit. Deinde vermium plane nouum genus, cui Acanthocephalorum nomen impoſuit Auctor , quod primum in Lauareto , deinde etiam in Cyprino Rutilo detexit. Inſident hi vermes plerumque tunicis interioribus inteſtinorum horum piſcium , praecipue duodeni et inferioris partis ventriculi , vbi adeo capite ſuo ſeſe inſinuant , vt difficulter , et ſaepe nonniſi cum iactura capitis extrahi poſſint ; alii tamen libere etiam muco innatantes deprehenſi ſunt. Sedecim eorum in Cyprino Rutilo , ad octoginta vsque in Lauareto inuenit. Plenior horum vermium hiſtoria in Diſſertatione priori exhibetur , cui etiam delineatio eorundem adiuncta eſt.

V.

De Leone. Obſeruationes anatomicae.

Auctore C. F. Wolff pag. 517.

In inquirenda ſtructura corporis leonis eum ſibi ſcopum propoſuit Clar. Auctor, vt, quae huic animali ſingularia et propria eſſent, quaeque ad intelligendas magnas eiusdem vires, ceterasque, quibus praeditum eſt, naturae dotes, conferre poſſent, notaret, cetera, quae vel communia plerisque animalibus et homini forent, vel nihil prorſus in functionibus efficere poſſent, conſiderate omitteret. Viſcera ideo non modo, ſed praecipue quoque muſculos extremitatum anteriorum et nernos ſcrutatus eſt, ſingularumque partium ſtructuram cum ſtructura hominis et felis comparauit. In hac quidem diſſertatione nonniſi muſculi et nerui traduntur. Reliqua, inter quae praecipue obſeruationes quaedam de corde et plenior deſcriptio valuularum veſiculae felleae eminent, ad alium Tomum transferentur.

De muſculis, qui ordine pertractantur, generatim notabile eſt, eorum pleroſque craſſitie non modo et robore inſignes eſſe, (quod ſuſpicari quidem facile potuiſſes) ſed ita quoque fere omnes inveniri applicatos ſuis oſſibus, vt inde etiam magnum

gnum virium ſuarum augmentum nanciſcantur. Sic pectoralis maior, qui in homine prope hypomochlion oſſi humeri inſeritur, ibique ſpatium duorum vix pollicum occupat, ad extremitatem inferiorem huius oſſis vsque plane decurrit ſuis fibris in leone, totumque os humeri ſecundum longitudinem tenet, vnde inſigne virium augmentum huic muſculo reſultare, facile intelligitur. Alii vt alter flexorum cubiti ad angulum longe maiorem, quam in homine, oſſibus ſuis inſeruntur; ali aliis adminiculis ad vires augendas in modo inſertionis gaudent, vti in diſſertatione ipſa de ſingulis muſculis ſub rubrica *de vſu eorundem* legi poteſt. Adeoque non modo validitati muſculorum ſed etiam ſingulari fabricae rationi leo ſuas vires debet. Sed alia eſt in hac re Auctoris obſeruatio, quae palmam priori forte praeripit. Nullum in leone exemplum ſtructurae inuenitur, qua ſcilicet vires muſculorum augerentur, quae non ſimul detrimento eſſet vel varietati vel plenitudini et perfectioni motuum inde pendentium. Vti igitur ſolis viribus inde, iisque adeo ſollicite et adeo conſtanter proſpectum eſſe videmus in hoc animali, vt etiam cum iactura aliorum motuum, et cum ipſorum, quibus vires augentur, imminuta magnitudine hoc factum ſit; ita contra in homine ſolam motuum varietatem eorumque plenitudinem et perfectionem omnibus modis et cum maximo etiam diſpendio virium, ſi aliter fieri non potuit, cultam atque curatam eſſe cognoſcimus. Exempla legas in pectorali muſculo, pag. 519. ſeq. in erectore cer-

vicis pag. 523 ſeq. in flexore cubiti pectorali pag. 526. ſeq denique in eiusdem deltoideo flexore, pag. 529. ſeq.

Duo autem muſculi reſpectu magnitudinis inter omnes in toto corpore leonis eminent, *erector magnus ceruicis*, qui proprius leoni muſculus eſt, et *anconeus magnus.* His muſculis in dilacerandis animalibus leo praecipue vtitur, dum anconei ope praedam ferit ſolumque verſus deprimit, pag. 531. erectoris autem auxilio partem praedae, dentibus prehenſam, ſurſum ducit pag. 524. Erector magnus ceruicis, vtrinque ad collum ſitus, quartam fere eius partem ſua craſſitie ſolus vtrinque efficit. Anconeus magnus ob enormem craſſitiem, qua gaudet, figuram plane inſolitam, cubicam quaſi, induit, vt aeque fere ac longus et latus eſt, craſſus quoque euadat vaſtiſſimus hic muſculus. De neruis hoc modo generatim notamus, eos praeter opinionem tenuiores eſſe inuentos proportione animalis quam hominis nerui ſunt aeque ac felis. Clar. Auctor inexſpectatum hoc phaenomenon explicat, dum oſtendit, animae quidem ad determinandos motus, quos vult in muſculis excitari, minime vero muſculis ad efficiendos hos motus, neruos inſeruire. Inde enim ſequitur, iis tantum animalibus maiori copia neruorum pro muſculis opus eſſe, in quibus, velut in homine, maior motuum varietas et maior dexteritas in motibus dirigendis obtinet; iis, quibus minor in motibus varietas eſt, vti leoni, quamuis cum magna vi hi motus exerceantur, mino-

minorem neruorum copiam ſufficere. Videtur autem hoc proprium et verum neruorum motoriorum officium in phyſiologia minus cognitum fuiſſe.

VI.

Nouae Plantarum Species.

Auctore Erico Laxmanno pag. 553.

Pemptadem plantarum ſibiricarum ab ipſo Cl. Auctore lectarum haec continet Diſſertatio Prima earum eſt noua Veronicae ſpecies ſpica terminali, foliis linearibus dentato pinnatis, quam ob ſtructuram foliorum *pinnatam* nominauit et cum Illuſtr. a Linne communicauit. Syſt. nat. Tom. II. pag. 57. Mantiſſa pag. 24. Secunda eſt noua ſpiraeae ſpecies foliis lanceolatis, integerrimis, glabris, ad baſin anguſtatis, ſeſſilibus, floribus racemoſis, racemis ſimplicibus, caule fruticoſo, Cl. Auctori, ob locum natalem, Altaienſes puta Alpes, *altaienſis*. Tertia eſt Dracocephalum foliis radicalibus cordatis, crematis, petiolatis, caulinis orbiculatis, ſubſerratis, ſeſſilibus floribus verticillatis, bracteis laciniatis, oblongis, *altoienſe* etiam a loco natali ſic dictum. Quarta eſt Robinia *ſpinoſiſſima* foliis iunioris plantae ſparſis, abrupte pinnatis, ſtipulatis, petiolo perſiſtente, lignoſo inque ſpinam acutiſſimam exeunte; adultae vero plantae foliis quaternatis, ſubpetiolatis, faſciculatis, flori-

bus ex faſciculis ſeſſilibus; ſibiriae transbaicalenſis incola. Hunc fruticem, ſi beat. *Gmelinum*, *Stellerum* et *Ammanum* excipias nemo botanicorum oculis vidit: omnes autem cum *Ammano* Deſcr. ſtirp. ruth. pag. 205. pro Robinia pygmaea, quae tamen diverſa eſt ſpecies, habuerunt. Quinta eſt Trifolium *dauricum*, foliis ternatis, foliolis oualibus, integerrimis, venoſis, caule erecto, floribus capitatis, capitulis axillaribus et pedunculatis et ſeſſilibus ex ſingula ala. Ipſae autem Deſcriptiones quas methodo Linneana tradidit in ipſis Commentariis melius leguntur.

ASTRO-

ASTRONOMICA

I.

Obſeruationes non nullae Anno 1767 et 1768 in obſeruatorio Petropoli inſtitutae.

Auctore Stephano Rumovski pag. 565

Referuntur hic non nullae obſeruationes ſuper Eclipſes Satellitum Iouis et vna obſeruatio Tranſitus Lunae per Pleyades, quae non aliud ſunt, quam continuatio earum, quae leguntur in Tomo XII. Comment. Inſerendae igitur illae forent ſequenti Tomo Commentariorum; Verum abſentia Auctoris factum eſt, quod illae ibi non compareant et quod huic demum Tomo ſint reſeruatae.

II.

II.

Obſeruationes Aſtronomicae annis 1769 et 1770. inſtitutae vna cum determinationibus geographicis aliquot locorum Imperii Ruſſici inde deductis.

Auctore W. L. Krafft pag. 571.

In hac diſſertatione continuata ſiſtitur expoſitio obſeruationum aſtronomicarum, quas Cl. Auctor, dum in itinere per imperium ruſſicum verſaretur, compluribus in locis inſtituit. Geographia ruſſica quanquam Aſtronomorum Academicorum laboribus iam eſt inſigniter promota; erant tamen principalia quaedam loca, quorum adcurata poſitio geographica adhuc deſiderabatur. Factum hinc eſt, vt Aſtronomis ad Venerem in Sole obſeruandam ablegatis etiam id negotii daretur, vt obſeruationibus aſtronomicis pro ſcopo geographico inſtituendis inuigilarent. Eiusmodi igitur obſeruationum ſuarum al quot Cl. Auctor in hac diſſertatione non recenſet ſolum, ſed ad calculum quoque reuocat aſtronomicum et determinationes geographicas inde deriuat, quarum hic ſuccinctum exhibuiſſe conſpectum iuuat.

I. *Oppidum Vſa* ſitum eſt

ſub latit. boreali 54°. 42′. 45″

et

et ſub longit. geographica verſus
orientem a Lutetiis Pariſiorum $3^h. 34'. 14''$.

Ibi obſeruata eſt
occultatio ſtellae τ Tauri ſub Luna 1769. Aug.
nou. ſtil. 24. d. $15^h. 50'. 44''$ Temp. ver.

In eodem loco etiam Cometae iſtius inſignis anno 1769 conſpicui obſeruatio a Cl. Auctore inſtituta eſt, quae hic exponitur et cum theoria eius ab Aſtronomis ſtabilita comparatur.

II. *Oppidum Sifran* ſitum eſt
ſub latit. bor. $53°. 9'. 53''$
et a merid. Pariſino verſus orientem diſtat interuallo temporis $3^h. 4'. 19''$.

Ibi obſeruatus eſt
Tranſitus Lunae ad ſtellam ζ Tauri 1770. d. 1. Apr. n. ſt.

Immerſio II. Satellitis Iouis
1770. 29 Martii $14^h. 15'. 9''$. Temp. vero.

Obſeruationem hanc Cl. Auctor cum ſua correſpondente, in oppido Tſcherkaski inſtituta, comparat, indeque errorem inſignem mapparum geographicarum etiam optimarum in poſitione littoris orientalis Maeotidis commiſſum corrigit; cuius veram poſitionem dudum Geographis crucem fixiſſe conſtat.

III. Kiouium ſitum eſt
ſub latit. bor. $50°. 30'$
et ſub long. geogr. a Lutetiis Pariſiorum verſus orientem $1^h. 55'. 10''$.

 Ibi

Ibi obſeruata eſt

Emerſio I. Satellitis Iouis.

1770. d. 14. Aug. n. ſt. $7^h. 49'. 9''$ Temp. vero.

Sub finem diſſertationis ſuae Cl. Auctor ſubiungit obſeruationes miſcellaneas declinationis acus magneticae, Halonis circa Lunam memorabilis, Aurorarum borealium, et Luminis Caſſiniani.

III.

Determinatio Longitudinis Geographicae plurimorum locorum, in quibus Eclipſis Solis Anno 1769. obſeruata fuit.

Auctore A. I. Lexell. pag. 588.

IV.

Longitudo obſeruatorii Petropolitani, ex obſeruatione Eclipſis Solis A. 1769. determinata.

Auctore A. I. Lexell. pag. 645.

Prior harum diſſertationum expoſitionem tradit nouae Methodi, ex obſeruationibus Eclipſium Solis

Solis longitudines locorum definiendi, vna cum eiusdem applicatione ad obſeruationes, quae variis in locis ſuper Eclipſi Solis A. 1769 inſtitutae fuerunt. Quum enim Cl. huius diſſertationis Auctor, dum harum obſeruationum computum inire ſibi propoſuiſſet, atque eum in finem Methodum ſic dictam Nonageſimi adhibere conſtituiſſet; eam inſignibus defectibus laborare et ad calculum ineundum operoſiſſimam eſſe inueniſſet, de eo cogitare coepit, qua ratione haec Methodus ita emendari poſſet, vt non ſolum exactior eſſet, ſed etiam pro calculo nſtituendo facilior. Enim vero quum principale vitium, quo vulgaris Methodus Nonageſimi afficitur, in ipſis formulis pro Parallaxibus tam Latitudinis quam Longitudinis lateat, quippe quae formulae has parallaxes non niſi per approximationes ſuppeditant, et inſuper dum figurae Telluris Sphaeroidicae ratio habenda eſt, correctiones quasdam requirunt; in eo praecipue elaborandum fuit, vt pro his parallaxibus formulae ſimplices et concinnae traderentur. Hunc in finem Cl. Auctor conducere exiſtimauit, ſi diſtantiae aſtrorum non quidem a zenith apparenti, quemadmodum communiter fit computentur, ſed ab alio quodam coeli puncto fixo, illud ſcilicet, quod cum loco obſeruationis ipſoque telluris centro in directum iacet, quod punctum zenith verum appellare licuerit. Deinde quemadmodum in Methodo vulgari Nonageſimi punctum Nonageſimi in Ecliptica definitur, quadrante circuli per Polum eclipticae et zenith apparens tranſeunte, ita in noua hac Methodo, quadrans per

Polum Eclipticae et zenith verum tranſiens definit in Ecliptica punctum, quod licet minus proprie heic punctum Nonageſimi a Cl Auctore nominatum fuit. Huius igitur Puncti Longitudine et altitudine definita, ſimplicibus maxime formulis Parallaxes Longitudinis et Latitudinis determinari poſſunt.

Vlterius etiam hoc in vulgaribus Methodis, Longitudines locorum ex eclipſibus Solis computandi merito deſideratur, quod correctiones Elementorum Aſtronomicorum, Longitudinis et Latitudinis Lunae modo plane peruerſo definiri ſoleant, omiſſis omnino correctiunculis, quibus Parallaxis Lunae et diametri Solis atque Lunae indigere poſſunt. Cl. vero Auctor noſter, non ſolum formulas tradit concinnas, quibus effectus harum correctionum ad tempus coniunctionis Solis et Lunae immutandum exprimitur, ſed etiam modum exponit quo ex binis expreſſionibus pro tempore coniunctionis, ex obſeruato initio et fine Eclipſis deductis, aequatio inueniatur has correctiones tamquam incognitas inuoluens, atque adeo oſtendit ſi tres huiusmodi aequationes habeantur, correctiones has tam exacte definiri poſſe, quam per ipſos errores obſeruationum fieri licet.

Pro caſu quidem praeſenti Eclipſis Solis Anno 1769, vndecim omnino huiusmodi aequationes, ex totidem obſeruationibus initii et finis Eclipſis in iisdem locis inſtitutis deductae ſunt, quae omnes excepta vnica ex obſeruationibus Wardhuſii factis deducta

ducta egregie inter ſe conueniunt, quum tamen ita comparatae ſint, vt nulla ſpes eſſe queat, quaeſitas correctiones ex ipſis cum ſumma praeciſione erui poſſe, hinc quia Parallaxis Lunae iam ſatis exacte definita eſſe videtur, exiſtimauit Cl. Auctor eius correctionem tuto aſſmi poſſe − 3″, quae ſcilicet accommodata eſt hypotheſi, quam pro figura telluris in ſuis calculis adhibuit. Tum vero reliquae correctiones Latitudinis ſcilicet Lunae et diametrorum, facilius determinantur, et prior quidem ſine errore 4″ aut 5″ definiri poterit, poſterior vero ob errores obſervationum multo magis dubia erit, vnde hae correctiones tutiſſime definientur, dum ipſis eiusmodi concilientur valores, quibus adhibitis errores obſeruationum fiunt quam minimi. Hoc vero facto inuenit Cl. Auctor correctionem Latitudinis eſſe − 22″ et ſummae ſemidametrorum Solis et Lunae − 3″, quarum correctionum prior omnino vltra 5″ erronea eſſe nequit, de poſteriori autem vix quicquam certi affirmari poteſt. His autem valoribus correctionum adhibitis, ex momentis coniunctionum Solis et Lunae veris, ſequentium locorum incognitorum Longitudines a Lutetia Pariſiorum deductae ſunt:

	in temp.	
Caua	$0^h.38'.43''$	Occid.
Promont. Lezard.	0. 30. 11	. . .
Hafnia	0. 41. 0	Orient.
Lunda	0. 43. 25	. . .
Gryphiswaldia	0. 45. 34	. . .

Pello	$1^h.26'.56''$ Orient.
Caianeburg	1. 41. 41 . . .
Wardhus	1. 55. 6 . . .
Kola	2. 2. 42 . . .
Vmba	2. 7. 30 . . .
Ponoi	2. 35. 11 . . .
Gurief	3. 18. 37 . . .
Orenburg	3. 31. 5 . . .
Iakutsk	8. 29. 34 . . .

In poſteriori harum diſſertationum determinatio verae Longitudinis obſeruatorii Petropolitani, deducta eſt ex obſeruationibus, quas Celeb. Prof. *Mayer* ſuper partes lucidas diſci Solis durante Eclipſi A. 1769 inſtituit. Selectae autem hunc in vſum ſunt, eae praecipue menſurae partium lucidarum, pro quibus diſtantiae apparentes centrorum Solis et Lunae cum ecliptica aequales conſtituerunt angulos ante et poſt coniunctionom apparentem horum Aſtrorum. Expreſſiones enim quae pro temporibus coniunctionis veris, ex huiusmodi obſeruationibus deducuntur, ita comparatae ſunt, vt ſi ex ipſis ſumatur medium, illud ad veritatem quam proxime accedere debet, correctionibus ſcilicet ex erroribus Tabularum oriundis pro binis obſeruationibus ſe mutuo deſtruentibus. Septem autem paria talium obſeruationum pro Petropoli praebuerunt tempus coniunctionis d. 3. Iun. 1769 $22^h.22'.47''$, quod cum tempore coniunctionis Gre-

Grenouicenſi $20^h. 21'. 32''$ comparatum, praebet Longitudinem obſeruatorii Petropolitani a Grenouicenſi $2^h. 1'. 15''$ adeoque a Pariſino $1^h. 51'. 59''$. Hoc autem exemplo euidenter comprobatur, ex obſeruationibus Eclipſium Solis exactas omnino deduci poſſe determinationes pro Longitudinibus locorum, atque dubia quae ad infringendam certitudinem harum determinationum a nonnullis etiam magni nominis Aſtronomis adferuntur nullius eſſe momenti.

V.

Expoſitio obſeruationum Aſtronomicarum A. 1770 in vrbe Zaricin inſtitutarum.

a Petro Inochodſow. pag. 655.

Obſeruationum in Zaricin inſtitutarum eae heic adferuntur, quibus Latitudo et Longitudo Geographica huius loci determinatur. Et quod Latitudinem quidem attinet, ea ex altitudinibus meridianis Solis concluſa eſt $48°. 42'. 25''$, ex altitudinibus vero plurium fixarum, vti Reguli, Arcturi, α Coronae Borealis, ε et ζ Bootis $48°. 42'. 14''$, vnde medio ſumto $48°. 42'. 20''$ ſine ſenſibili errore aſſumi poterit. Pro Longitudine definienda variae factae ſunt obſeruationes Eclipſium Satellitum Iouis, quarum momenta

momenta partim cum Tab. Cel. *Wargentin* partim etiam cum aliis obſeruationibus correſpondentibus comparata, praebuerunt Longitudinem vrbis Zaricin a Meridiano Pariſino in tempore $2^h. 48'. 30''$ ſeu in Grad. $42°. 7'. 30''$. Declinatio acus magneticae pro hoc loco inuenta fuit $5°$ verſus Occidentem.

VI.

Epitome Obſeruationum Meteorologicarum Petropoli A. 1770. inſtitutarum.

Auctore Ioan. Albert. Euler p. 676.

Obſeruationum Meteorologicarum pro A. 1770. inſtitutarum ſummarium a Celeb. *I. A. Eulero* in hac diſſertatione traditur, iuxta Methodum quam in obſeruationibus A. 1769. inſtituendis ſequutus fuit, et cuius rationem in Tomo praecedenti horum Commentariorum fuſius expoſuit. Maxima altitudo Barometri obſeruata eſt d. 20. Nov. ſcilicet 28, 63 poll. minima die 27. Dec. 26, 76 pollic. Altitudo media per totum annum inuenta eſt 27, 92 et altitudo frequentiſſima 27, 97. Thermometri altitudo maxima obſeruata fuit d. 11. Aug. 103°. ſecundum Therm. Deslil. minima autem d. 6. Martii 186°, adeo vt differentia inter maximam et minimam

mam ſit 83°. Dies quibus Thermometrum infra punctum congelationis deſcendit 138 numerabantur, atque 261 quibus calor vltra 150° thermometri increſceret. Malaciae numeratae ſunt 13, ventus leniores 110, fortes 175 et procelloſi 67, quorum praecipui menſibus Ianuario, Martio et Decembri graſſarunt. Status coeli ſerenus fuit per 87 dies, nebuloſus diebus 51, pluuioſus 137, diebus 77 ninxit, et 3 grando cecidit. Aurorae boreales per totum annum viſibiles fuere 12.

INDEX.

DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Dan. Bernoulli, Continuatio argumenti de menſura ſortis ad fortuitam ſucceſſionem rerum naturaliter contingentium applicata p. 3.

Leon. Euler, Solutio Problematis, quo duo quaeruntur numeri, quorum productum tam ſumma, quam differentia eorum, ſiue auctum ſiue minutum fiat quadratum pag. 29.

Eiusdem, Obſeruationes circa radices aequationum pag. 51.

Eiusdem, Problema Algebraicum ob affectiones prorſus ſingulares memorabile pag. 75.

A. I. Lexell, Solutio problematis algebraici, de inveſtigatione numerorum continue proportionalium, quorum datur ſumma *a* et ſumma quadratorum *b*. pag. 107.

Eiusdem, De criteriis integrabilitatis formularum differentialium pag. 127.

Leon. Euler, De curua rectificabili in ſuperficie Sphaerica pag. 195.

Phyſico-Mathematica.

Leon. Euler, Sectio Tertia de motu fluidorum lineari potiſſimum aquae pag. 219.

D. Ber-

D. Bernoulli, Examen Phyſico-Mechanicum de motu mixto, qui laminis elaſticis a percuſſione ſimul imprimitur pag. 361.

Leon. Euler, Genuina principia doctrinae de ſtatu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium, quam elaſticorum pag. 381.

Eiusdem, De Ictu glandium contra tabulam exploſarum pag. 414.

Phyſica.

Sam. Gottl. Gmelin, Rariorum Auium expoſitio p. 439.

I. Lepechin, Deſcriptiones auium pag. 485.

I. T. Koelreuter, Deſcriptio cyprini rutili, quem Halawel Ruſſi vocant, hiſtorico-anatomica pag. 494.

Eiusdem, Deſcriptio piſcis, e coregonorum genere, Ruſſice Sig (сигъ) vocati, hiſtorico-anatomica pag. 504.

C. F. *Wolff*, De Leone obſeruationes anatomicae pag. 517.

E. *Laxmann*, Nouae plantarum ſpecies pag. 553.

Aſtronomica.

Steph. Rumovski, Obſeruationes nonnullae in obſeruatorio Petropoli inſtitutae pag. 565.

W. L. Krafft, Obſeruationes Aſtronomicae Annis 1769 et 1770. inſtitutae pag. 571.

A. I. Lexell, Determinatio Longitudinis geographicae plurimorum locorum, in quibus Eclipſis Solis A. 1769. obſeruata fuit p. 588.

Eiusdem, Longitudo obſeruatorii Petropolitani, ex obſeruatione Eclipſis Solis A. 1769. determinata pag. 645.

P. Inochodſow, Expoſitio obſeruationum Aſtronomicarum A. 1770. in vrbe Zaricin inſtitutarum pag. 655.

I. A. Euler, Epitome Obſeruationum Meteorologicarum, Petropoli A. 1770. Vet. St. inſtitutarum pag. 676.

MATHEMATICA.

CONTINVATIO ARGVMENTI DE MENSVRA SORTIS AD FORTVITAM SVCCESSIONEM RERVM NATVRALITER CONTINGENTIVM APPLICATA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

In prioribus noſtris de iſto argumento commentationibus hypotheſin examinauimus adeo veriſimilem primo intuitu, vt falſitas eius poſt innumera demum experimenta in ſuſpicionem venire coeperit; aequam intelligo naturae procliuitatem ad vtrumque formandum ſexum. Nunc vero experti omnes vno fatentur ore, naturam ſexui maſculino magis fauere quam alteri aut ſaltem huc vſque magis fauiſſe. Id vero an caeca ſorte an ductu legis naturalis contigit? Equidem prius poſſibile eſt, alterum vero longe veriſimillimum atque

 proba-

probabiliſſimum; negligamus verba atque rem ipſam ponderemus. Sic operae pretium erit vt ſingulorum qui euenire poſſunt, caſuum probabilitatem inquiramus pro hac altera hypotheſi, quod natura in formanda prole maſcula foecundior ſit, quam in altera idque in ratione quacunque data ſed conſtanter eadem quam vocabo a ad b. Nouam quaeſtionem, priori infinities ampliorem, praeter expectationem eleganti ſatisque ſimplici formula circumſcriptam offendi, quam nunc exponam.

§. 2. Sit iterum, ſicuti in paragrapho ſecundo diſſertationis praecedentis, numerus partuum annuorum $= 2\,N$ atque, vt rem ſermone mathematico indicemus, ponamus pro quouis partu ſexum hoc modo definiri, vt in vrna repoſitae ſint ſchedulae partim nigrae pro ſexu maſculo partim albae pro ſexu ſequiore definiendo; fuerit numerus ſchedularum nigrarum $= a$, ſchedularum albarum $= b$: tum cuiusuis partus ſexum ſchedula extracta indicet mox in vrnam reponenda; quod ſi hoc modo ſexus pro 2 N partubus determinetur quaeritur quanta ſit probabilitas vt numerus puellorum fiat praeciſe $= m$ atque adeo numerus puellarum $= 2\,N - m$. Dabit nunc theoria combinationum, ſi modo omnia diſpoſite fuerint ordinata, ſequentem formulam generaliorem, quae verum quaeſitae probabilitatis valorem ſiſtit:

$$\frac{2N}{1}\cdot\frac{(2N-1)}{2}\cdot\frac{(2N-2)}{3}\cdot\frac{(2N-3)}{4}\cdots\cdots\frac{(2N-m+1)}{m.\,2^{2N}}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\times\left(\frac{2\,b}{a+b}\right)^{2N}.$$

§. 3.

§. 3. Miratus ſum ſimplicitatem modi, quo theoria haec generalior complectitur alteram a nobis praemiſſam pro aequiualentia vtriusque ſexus: poſito enim $a = b$ protinus perſpicitur fieri $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N} = 1$ atque adeo formulam prodire plane eandem, quam paragrapho ſecundo primae diſſertationis expoſuimus. At ſi paruula intercedat inaequalitas inter a et b, inſignis ſtatim inde orietur differentia inter probabilitates ad vtramque hypotheſin computatas, quotiescunque pro N numeri aſſumuntur maiores; ſcilicet ſunt ambae probabilitates pro iisdem numeris m et N vt vnitas ad numerum $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N}$, quae ratio plerumque a ratione aequalitatis admodum recedit pro magnitudine numeri m atque haec proprietas criterium nobis ſuppeditat haud ſpernendum in dignoſcenda lege naturae, ſi tabulae natalitiae, pro pluribus annis praeſto ſint. En huius rei exemplum.

Fuerit numerus omnium natorum $= 20000$ ſiue $N = 10000$ ſitque ſermo de ſpeciali caſu, quo iſta natorum ſumma ab vtroque ſexu in duas dirimitur partes perfecte inter ſe aequales: habebimus $m = 10000$; ponatur $\frac{a}{b} = 1.055$, qui valor obſeruationibus non male reſpondet: ſic fiet $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N}$ $= (\frac{1055}{1000})^{10000} \times (\frac{2000}{2055})^{20000} = \frac{1}{1296}$: Igitur probabili-

tas, quae pro hocce caſu militat vtcunque paruula ſit, erit millies ducenties nonagies ſexies maior ſi fuerit $\frac{a}{b} = 1$ quam ſi ſit $\frac{a}{b} = 1.055$; vidimus autem in praecedente noſtra diſſertatione paragrapho ſeptimo probabilitatem pro prima poſitione eſſe $= \frac{1}{177}$; erit ergo probabilitas pro altera poſitione $= \frac{1}{177} \times \frac{1}{1296}$ ſiue $= \frac{1}{229392}$. Huic paruulae probabilitati ſi omnes addamus, quibus numerus *m* infra numerum N deprimitur, quamuis id fieri poſſit decem millibus modis prius quam numerus *m* plane euaneſcat, tamen ſumma omnium harum probabilitatum pro decem mille caſibus non ſit vigeſies maior quam eſt probabilitas pro ſolo caſu, quo ponitur $m = N$: vnde deducitur, ſi quaeſtio fuerit quanta ſit probabilitas vt Londini plures intra annum naſcantur puellae quam pueruli aut ſaltem numero aequali, hanc probabilitatem minorem eſſe quam $\frac{1}{11469}$; veroſimile autem eſt, vt id ſemel contingat in quouis decurſu 12000 annorum propemodum. Tabula paſſim extat, qua ab anno 1664 vsque ad annum 1758 numerus quotannis indicatur tam filiolarum quam puellorum Londini in Eccleſia Epiſcopali baptizatorum, qua videre eſt nunquam intra 95 annos contigiſſe vt numerus puellarum aequalis eſſet, nedum maior, numero puellorum, etiamſi numerus omnium baptismatum annuorum notabiliter minor eſſet quam 20000 atque adeo id multo facilius contingere potuiſſet: anno 1703 puellae maxime ad aequalitatem cum puerulis acceſſerunt; baptizatae nempe fuerunt 7683 puellae atque 7765 pueru-

pueruli: paruum equidem hic fuit diſcrimen at ſuperatu longe difficillimum.

§. 4. Formula in fine paragraphi ſecundi expoſita naturam argumenti noſtri egregie explicat. In hypotheſi prima, qua ponitur $a = b$, decreſcit probabilitas a medio verſus extremitatem alteram; in hypotheſi ſecunda, qua ponitur $a > b$, primo increſcit ad certum terminum vltra quem decreſcit; prope medium, vbi $m = N$, probabilitas in prima hypotheſi admodum excedit probabilitatem in hypotheſi alteta; quia vero in priori decreſcit in altera increſcit, locus erit vbi probabilitas eadem ſit pro vtraque hypotheſi, locus alius vbi probabilitas, in hypotheſi altera, ſit dupla, tripla, quadrupla &c. hoſce nunc locos ſiue valores m definiam: requiritur autem, vt factor $\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N}$ ponatur ſucceſſiue aequalis 1, 2, 3, 4 &c. indeque determinetur numerus m. Incipiamus a prima aequatione atque inueniemus

$$m = \frac{2N(\log.\overline{a+b} - \log.2b)}{\log.a - \log.b}.$$

Vocemus hunc primum valorem A et ſic habebimus ſucceſſiue

$$m = A$$

$$m = A + \frac{\log.2}{\log.a - \log.b}$$

$$m = A + \frac{\log.3}{\log.a - \log.b}$$

$$m = A + \frac{\log.4}{\log.a - \log.b}.$$

Sic

Sic generaliter erit $m = A + \frac{\log. \Phi}{\log. a - \log. b}$ ſi deſideretur vt ambae probabilitates ſe habeant vt 1 Φ. Deſcendamus ad exempla numerica.

§. 5. Sit porro N = 10000 atque $\frac{a}{b} = \frac{1055}{1000}$; habebitur A = 10134 atque generaliter $m = 10134 + \frac{\log. \Phi}{\log. 1.055}$ ſiue, adhibitis logarithmis communibus, $m = 10134 + 43 \log. \Phi$ vnde ſi proponatur ſucceſſiue:

Φ = 1	habebitur	m = 10134
Φ = 2	. . .	m = 10147
Φ = 3	. . .	m = 10154
Φ = 4	. . .	m = 10160
Φ = 5	. . .	m = 10164
Φ = 10	. . .	m = 10177.

Apparet hinc quam enormiter increſcat ratio quae intercedit inter probabilitates pro ambabus poſitionibus $\frac{a}{b} = 1$ et $\frac{a}{b} = 1.055$. Intelligitur ſimul quod quoties numerus puerorum natorum quadraginta tribus auctus ponitur toties ratio inter ambas probabilitates analogas decupletur.

§. 6. Relatio inter Φ et *m* ad logarithmicam pertinet ſic vt operatione ſimpliciſſima numerus *m* indicari poſſit, pro quo ratio Φ datum obtineat valorem. Sit, verbi gratia, pro numeris in praecedente paragrapho aſſumtis, numerus puellorum *m* indicandus, qui decies millies millenis millibus vicibus facilius eueniat, poſito $\frac{a}{b} = 1.055$ quam poſito $\frac{a}{b} = 1$. In hoc exemplo ſit Φ = 10000000000

et

et log. $\Phi = 10$ ergo (§. 5.) $m = 10134 + 430 = 10564$ quis non miretur incredibilem fere probabilitatum differentiam pro caſu, quo numerus puellorum medietatem, paruo numero 564 inter 20000, transgreditur. Quod ſi igitur rariſſimo caſu contigerit vt inter 20000 natos numerati fuerint 10564 pueruli atque adeo 9436 puellae, quis harum rerum intelligens ſtatuet naturam ad vtrumque formandum ſexum eſſe prorſus aequaliter procliuem? Id ſaltem certum eſt, huiuscemodi caſum 1000000000 vicibus probabiliorem fieri, ſi fuerit $\frac{a}{b} = 1.055$, quamuis et tunc quidem vix inter poſſibiles reponi mereatur, quandoquidem ſolius caſus iſtius probabilitas tantum eſt $= \frac{1}{1416050}$. Si porro ita augeatur minima iſta probabilitas, vt comprehendat omnes caſus, quibus numerus puellorum transgreditur numerum 10564, vix inde fiet decies maior, quantum absque inſtituto calculo iudicare poſſum; ſic omnis probabilitas fiet tantum $= \frac{1}{141600}$, qua neglecta affirmare licebit nunquam futurum vt numerus puellorum natorum ad 10564 ex 20000 natis aſcendat, etiamſi ſexui maſculino ſua tribuatur praerogatiua, quam valor $\frac{a}{b} = 1.055$ indicat.

§. 7. Vidimus modo, quam parum veriſimile ſit, vt pro 20000 natis numerus puerorum vnquam ad 10564 aſcendat puellarumque adeo ad 9436 deprimatur ſicque differentia inter vtrumque ſexum ad 1128 euagetur, etiamſi natura ſexui maſculino prae altero faueat in ratione 1055 ad 1000. Huius

 ita-

itaque rei curioſus tabulam conſului Londinenſem ſupra citatam, quam recenſet Cl. *Süsmilch* in parte ſecunda egregii operis ſui, cui in fine adiectae ſunt plurimae huiuscemodi tabulae: inquiſiui annos: vbi numerus puellorum maxime ſuperaret puellas; memorabiles mihi viſi ſunt annus 1676, quo nati dicuntur aut potius baptizati 6552 pueruli et 5847 filiolae, dein a. 1698, quo 8426 maſculi et 7626 filiolae; denique a. 1717, quo indicantur 9630 maſculi et 8845 alterius ſexus. Demonſtraui autem differentias inte vtrumque ſexum mutandas eſſe in ratione ſubduplicata numerorum 2 N vt eadem retineatur probabilitas: hac igitur adhibita correctione inueni nullum eſſe ex tribus annis allegatis, qui maiori attentione dignus ſit, quam ſi pro 20000 natis exceſſus puerorum ſupra puellas fuerit propemodum 900, qui exceſſus multum adhuc deficit ab 1128.

Attamen non reticebo annum 1749 prae omnibus caeteris longe maxime rarum, quo ſcilicet baptizati dicuntur 7288 pueruli ac tantum 6172 filiolae: habemus hic exceſſum puerorum = 1116, dum ſumma natorum ſaltem fuit = 13460: ergo praefatus exceſſus 1116 augendus erit in ratione ſubduplicata numerorum 13460 ad 20000, qua facta reductione praefatus exceſſus mutatur in 1361: iam vero exceſſus iſte notabiliter ſuperat exceſſum 1128, quem non ſine ratione ſuppoſuimus in longiſſima ſerie plurium millium annorum vix ſemel euenturum; igitur mihi perſuadeo errorem irrepſiſſe

in

in alterutrum numerum 6172 et 7288; multo nimirum facilius eſt, vt in tabulas tot numeris refertas atque ſaepiſſime exſcriptas aliquando error irrepat quam vt inaequalitas portentoſa locum inveniat; puto autem loco 6172 filiolarum ſcribendum fuiſſe 6972; hac nempe facta vnius numeri mutatione relatio inter vtrumque ſexum fit maxime probabilis, quae fuerat tantum non impoſſibilis. Errorem ſuſpicatus numerum examinaui, qui indicat ſummam filiolarum baptizatarum intra decennium ab anno 1741 ad finem anni 1750; in tabula pro ſumma ponitur 70322, quae adhibita mea correctione perfecte ipſi rei conuenit: ergo error vel a ſcriptore vel a typographo fuit commiſſus, nec dubito quin annales Londinenſes coniecturam meam ſint confirmaturi.

Liceat verbum addere de tabula baptismali, quam idem auctor pag. 13. affert pro metropoli Auſtriaca; ſola ipſius inſpectio mihi ſtomachum mouit; nil continet, nec vereor dicere, niſi mera figmenta, vagante calamo conſcripta, quam praeſtigioſa ſit haec tabula, absque calculis noſtris vix intelligitur nec miror, quod Cl. *Süsmilch* eam dignatus ſit egregio ſuo operi inſerere, relata retulit fidem vnicuique liberam faciens.

§. 8. Ex praemiſſis intelligitur, quod ſumto numero $m > \frac{2N(\log.\overline{a+b} - \log.2b)}{\log.a - \log.b}$ probabilitas, in hypotheſi $a > b$, admodum ſuperet probabilitatem pro

hypotheſi $a=b$; contrarium obtinet quando ſumitur $m < \frac{2N(\log. \overline{a+b} - \log. 2b)}{\log. a - \log. b}$. Scilicet, retenta ſignificatione litterae Φ, erit tunc ratio inter vtramque probabilitatem expreſſa per $\frac{1}{\Phi}$ et cum ſit $\log. \frac{1}{\Phi} = -\log. \Phi$, habebitur (§. 4.) $m = A - \frac{\log. \Phi}{\log. a - \log. b}$; atque, pro exemplo $m = 10000$, fiet (§. 5.) $m = 10134 - 43 \log. \Phi$, vbi nunc Φ deſignat, quoties probabilitas, in hypotheſi $a > b$, ſuperetur a probabilitate pro hypotheſi $a=b$. Ponatur iterum $\Phi = 10000000000$ atque fiet $m = 10134 - 430$ ſiue $m = 9704$.

Hanc rem ſic intellige. Quaeratur, pro hypotheſi $a=b$, probabilitas vt ſit numerus puerorum $=9704$ et inuenietur iſta probabilitas propemodum $= \frac{1}{277 \times 8000}$ ſiue $= \frac{1}{14160000}$; ſi minimae huius fractiunculae ſumatur $\frac{1}{10000000000}$, habebitur pro hypotheſi $a = 1.055\, b$ probabilitas vt ſit numerus puerorum $= 9704$. Vix animo huiusmodi paruitas concipitur; Denique ſi in ſummam colligantur omnes et ſingulae probabilitates vt numerus puerorum infra 9704 deprimatur atque ponatur ab hac ſummatione probabilitatem fieri decies maiorem, fiet probabilitas vnita $= \frac{1}{141600000000000}$, qua neglecta affirmare licet, fieri non poſſe vt numerus puerorum limites 10564 atque 9704 transgrediatur, ſi fuerit $a = 1.055\, b$ nec numerus puellarum limites 9436 ac 10296.

§. 9. Nunc aliam aggredior quaeſtionem, quisnam ſit numerus m prolis annuae maſculae prae omnibus caeteris maxima probabilitate donatus? Equidem, pro hypotheſi $a=b$, in primo ſchediaſmate

aſſumſi

aſſumſi absque demonſtratione, quia tunc res per ſe clara eſt, faciendum eſſe $m = N$. At cum inaequalitas ſuppponitur inter a et b, quaeſtio praeſens aliam induit faciem. Recurremus ad formulam in fine paragraphi ſecundi expoſitam, quae pro quouis numero m probabilitatem ſuam exprimit, nempe

$$\frac{2N.(2N-1).(2N-2).(2N-3)\ldots(2N-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\ldots\ldots m+2^{2N}} \times \left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N}.$$

In iſta formula valor quidem factoris indefiniti decreſcere incipit ſtatim ac numerus m ponitur $> N$; verum enim vero alter factor variabilis $(\frac{a}{b})^m$ cum continue creſcere pergat, apparet locum eſſe poſſe, vbi productum ex ambobus factoribus ſit maximum; hinc aliqua veluti excentricitas. Locum vero ipſum maximae probabilitatis ex eo definire licebit, quod pro duobus indicibus proximis m et $m+1$ eadem eſſe debeat probabilitas. Poſito autem $\frac{2N.(2N-1).(2N-2)\ldots\ldots(2N-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots\ldots m} = S$ fit probabilitas pro indice $m = S \times \left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2N}$ pariterque pro indice $m+1$ oritur probabilitas $= \frac{2N-m}{m+1} \times S \times \left(\frac{a}{b}\right)^{m+1} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2N}$. Facta igitur aequatione inter ambas probabilitates, reperitur $\frac{2N-m}{m+1} \times \frac{a}{b} = 1$ ſiue $m = \frac{2Na+b}{a+b}$, quia vero terminus $2Na$ veluti incomparabiliter maior eſt quam b, poterit ſimplici-

 ter

ter poni $m = \frac{2Na}{a+b}$ atque numerus puellarum ſiue $2N - m = \frac{2Nb}{a+b}$ ſic vt ambo numeri ſint in ipſa ratione a ad b, quod ipſum formulas noſtras egregie confirmat.

§. 10. Sic igitur in exemplo noſtro, quo poſuimus $2N = 20000$, maxima probabilitas incidit in numerum $m = 10268$; vltra citraque hunc locum probabilitas decreſcit, ab initio quidem lentiſſime, deinde citius, mox enormiter. Notabimus hic in tranſitu quod punctum illud, de quo §. §. 4 et 5 diximus, vbi eadem fit probabilitas pro vtraque hypotheſi, ſit in medio poſitum inter ambo puncta maximae probabilitatis pro vtraque hypotheſi; eſt ſcilicet pro hoc puncto $m = 10134$, qui numerus medius eſt inter 10000 et 10268 atque haec proprietas generaliter locum habet, ſi parua ſit differentia inter a et b.

§. 11. Maxime conducit praefatum locum, qui facit $m = \frac{2Na}{a+b}$ et pro quo maxima oritur probabilitas, conſiderare tanquam punctum fixum omnesque calculos ita ponere vt diſtantia ab hoc puncto tanquam a centro virium examinetur: quae enim dicta ſunt nondum ſatis computum ſubleuant: igitur opera danda eſt vt pro quouis indice dato m probabilitas formula aliqua definita determinetur, ſaltem quam proxime quandoquidem id omni rigore fieri nequit. Hanc viam iniui in primo ſchediasmate nec certe ſine ſucceſſu; qua de re videatur primo paragraphus quintus; deinde decimus octauus.

§. 12.

§. 12. Ponatur, breuitatis gratia, $\frac{2Na}{a+b} = M$, ſic vt M denotet numerum puerorum maxima probabilitate donatum atque ponatur index $m = M + \mu$, vbi μ notabit exceſſum indicis ſupra numerum maximae probabilitati reſpondentem: ponatur praeterea probabilitas, pro indice $M + \mu = \pi$, cuius verum valorem iam ſupra paragrapho ſecundo atque nono indicauimus at formula indefinita, pro magnis numeris incomputabili, expreſſum. Animus fert inquirere rurſus, annon iſti formulae indefinitae alia ſubſtitui poſſit proxime vera et definita: conſiderabimus quantitates μ et π tanquam coordinatas variabiles. Patet autem ex ipſa formula indefinita fore probabilitatem, pro indice proximo $M + \mu + 1$, $= \frac{2N - m}{m + 1} \times \frac{a}{b} \times \pi$ ſiue $\frac{2N - M - \mu}{M + \mu + 1} \times \frac{a}{b} \times \pi$, quae ſi ſubtrahatur a probabilitate praecedente π erit differentia vtriusque probabilitatis $= \pi - \frac{2N - M - \mu}{M + \mu + 1} \times \frac{a}{b} \times \pi$. Iam vero iterum ſupponam hanc differentiam eſſe ad differentiam duorum indicum proximorum, id eſt, ad vnitatem, ſicuti $-d\pi$ ad $d\mu$, quod vtique absque vllo ſenſibili errore ſupponi poteſt ob proximitatem amborum indicum; haec autem ſuppoſitio ſequentem ſubminiſtrat aequationem $-\frac{d\pi}{\pi} = (1 - \frac{2N - M - \mu}{M + \mu + 1} \times \frac{a}{b}) d\mu$. In iſta aequatione pro quantitate M reſtituam eius valorem $\frac{2Na}{a+b}$, vt tanto melius quantitates, quae in fine calculi negligi poſſint, ab inuicem dignoſci queant; facta iſta reſtitutione fit $-\frac{d\pi}{\pi} = (1 - \frac{2Na:(a+b) - \mu a:b}{2Na:(a+b) + \mu + 1}) d\mu$ vel $-\frac{d\pi}{\pi} = \frac{\mu + 1 + \mu a:b}{2Na:(a+b) + \mu + 1} d\mu$ autdenique $-\frac{d\pi}{\pi} = \frac{\mu + 1 + \mu a:b}{M + \mu + 1} d\mu$.

§. 13.

§. 13. Praemiſſa aequatio ita eſt integranda vt poſito $\mu = o$ fiat $\pi = Q$, vbi per Q intelligo probabilitatem maximam, quae locum habet pro indice M aut $\frac{2Na}{a+b}$: Sic prodit

$$\log. \frac{Q}{\pi} = \frac{a+b}{b}\mu - \frac{a+b}{b}(M+1)\log. \frac{M+\mu+1}{M+1} + \log. \frac{M+\mu+1}{M+1}.$$

Quia vero haec aequatio inſeruire tantum debet ſupputandis exemplis, in quibus numerus μ multo minor eſt numero M, quandoquidem in caeteris probabilitas fere euaneſcit nec meretur vt eius ratio habeatur, e re erit in penultimo termino quantitatem $\log. \frac{M+\mu+1}{M+1}$ in ſeriem conuertere; in hac ſerie ſufficiet tres primos conſideraſſe terminos atque ſic ponere

$\log. \frac{M+\mu+1}{M+1} = \frac{\mu}{M+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{M+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{M+1}\right)^3$: hoc modo aequatio ſic poni poterit

$$\log. \frac{Q}{\pi} = \frac{a+b}{b}\left(\frac{\mu\mu}{2(M+1)} - \frac{\mu^3}{3(M+1)^2}\right) + \log. \frac{M+\mu+1}{M+1}$$

vel poſito c pro numero cuius logarithmus hyperbolicus vnitas eſt

$$\frac{Q}{\pi} = \frac{M+\mu+1}{M+1} c^{\frac{a+b}{b}\left[\frac{\mu\mu}{2(M+1)} - \frac{\mu^3}{3(M+1)^2}\right]} \text{ ſiue}$$

$$\frac{\pi}{Q} = \frac{M+1}{M+\mu+1} c^{-\frac{a+b}{b}\left[\frac{2(M+1)}{\mu\mu} - \frac{\mu^3}{3(M+1)^2}\right]}.$$

Quod ſi nos magis a ſcrupuloſitate relaxare velimus, licebit ſimplici vti formula,

$$\frac{\pi}{Q} = c^{-\frac{a+b}{2b}\times\frac{\mu\mu}{M}}.$$

Haec

Haec vero vltima formula perfecte eadem eſt cum ea, quam exhibui in primo ſchediasmate §. 18. et quam paragrapho ſequente paruula tabella confirmaui: poſito namque $a=b$, fit ſimul $M=N$ atque ſic ſimpliciter oritur $\frac{\pi}{Q} = \frac{1}{c^{\frac{\mu\mu}{N}}}$

§. 14. Praemiſſa aequatio tanto erit accuratior, quanto minor ſupponitur differentia inter a et b et quanto ſimul minor eſt numerus μ, quod vtrumque inſtituto noſtro ſatis conuenit: igitur operae pretium erit hanc aequationem vlteriori examini ſubiicere.

Reſtituatur pro litera M valor ipſius paragrapho duodecimo indicatus, nempe $\frac{2Na}{a+b}$: ſic erit exponens $\frac{a+b}{2b} \times \frac{\mu\mu}{M} = \frac{(a+b)^2}{4ab} \times \frac{\mu\mu}{N}$: ponatur $b = 1$ et $a = 1 + \alpha$, vbi α ponitur vnitate multo minor; habebitur $\frac{(a+b)^2}{4ab} = \frac{4+4\alpha+\alpha\alpha}{4+4\alpha} = 1 + \frac{\alpha\alpha}{4+4\alpha}$: hic manifeſte negligi poteſt terminus vnitati adiectus atque adeo poni $\frac{(a+b)^2}{4ab} = 1$, quo facto fit exponens $\frac{a+b}{2b} \times \frac{\mu\mu}{M} = \frac{\mu\mu}{N}$ et ſic poteſt ſimpliciter poni

$$\frac{\pi}{Q} = c^{\frac{-\mu\mu}{N}} \text{ ſiue } = \frac{1}{c^{\frac{\mu\mu}{N}}}.$$

Sic igitur, pro omni valore $\frac{a}{b}$, probabilitas conſtanter eodem modo exprimitur, modo, loco diſtantiae termini a medio, intelligatur per μ diſtantia a termino maxima probabilitate donato, quae profecto proprietas omnem meretur attentionem.

§. 15. Sed et ipſa probabilitas termini, quae maxima eſt, variante ratione $\frac{a}{b}$, proxime eadem manet pro eodem numero μ eodemque numero N, haecque altera proprietas non minus notatu digna eſt atque totum noſtrum argumentum egregie illuſtrat. Id vero ſic demonſtro. Sit in hypotheſi $a = b$, maxima probabilitas $= q$, qualis eſt cum ſumitur $m = N$; deinde, pro eodem numero N, ponatur aliquantilla inaequalitas inter a et b atque pro iſta altera hypotheſi dicatur maxima probabilitas $= Q$; haec autem §. 9. incidit in indicem $\frac{2Na}{a+b}$: ſumatur differentia inter ambos indices N et $\frac{2Na}{a+b}$, quae erit $= \frac{a-b}{a+b}N$. Sic erit (pro hypotheſi $a = b$) probabilitas termini, cuius index indicatur per $\frac{2Na}{a+b}$ $= q : c^{(\frac{a-b}{a+b})^2 N}$, quia ſcilicet pro μ ponendum eſt $\frac{a-b}{a+b}N$; haec vero vltima probabilitas, ſi multiplicetur per $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N}$ dabit, vi paragraphi ſecundi, probabilitatem Q pro eodem indice $\frac{2Na}{a+b}$, qui maxima probabilitate in altera hypotheſi donatus erit. Sic itaque habebitur

$$Q = \frac{q}{c^{(\frac{a-b}{a+b})^2 N}} \times (\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N}$$

vbi ſupponitur $m = N + \mu$ ſiue pro hoc negotio $m = \frac{2Na}{a+b}$, hacque facta ſubſtitutione fit

$$Q = \frac{q}{c^{(\frac{a-b}{a+b})^2 N}} \times (\frac{a}{b})^{2Na:(a+b)} \times (\frac{2b}{a+b})^{2N}.$$

Nunc

Nunc demonſtrabo, quod ſi a et b parum inter ſe differant, cenſeri poſſit factor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2Na:(a+b)} \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N} = c^{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 N}$$

ſic vt poſſit aſſumi $Q = q$: hunc in finem ponatur rurſus $b = 1$ et $a = 1 + \alpha$ intelligendo per α parvulam fractionem; ſic fiet $\frac{2Na}{a+b} = \frac{2+2\alpha}{2+\alpha} N = (1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha\alpha + \frac{1}{8}\alpha^3) N$: ergo, ſumtis logarithmis hyperbolicis, praefata aequalitas demonſtranda abit in hanc alteram:

$$(1 + \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha + \tfrac{1}{8}\alpha^3) N \log. \frac{a}{b} + 2 N \log. \frac{2b}{a+b} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 N.$$

Quod ſi nunc porro pro a et b ſubſtituantur valores $1 + \alpha$ et 1 atque quantitates $\log. \frac{a}{b}$; $\log. \frac{2b}{a+b}$ et $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ in ſeries conuertantur, neglectis terminis in quibus α dimenſionem tertiam tranſcendit, prodibit $\log. \frac{a}{b}$, ſiue $\log. (1 + \alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$; deinde $\log. \frac{2b}{a+b} = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{8}\alpha\alpha - \frac{1}{24}\alpha^3$; denique $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{1}{4}\alpha\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^3$; his autem ſubſtitutis terminis, ſi multiplicationes actu inſtituantur neglectis porro terminis, in quibus α tertiam dimenſionem tranſcendit, aequatio obtinetur perfecte identica. Ergo absque vlla haeſitatione poteſt cenſeri $Q = q$.

Sic argumentum noſtrum, quod prima fronte videbatur valde tenebricoſum, ſubita luce eluceſcit; totum enim negotium in eo poſitum eſt, vt pro quouis valore $\frac{a}{b}$ index μ numeretur a termino maxima probabilitate donato, ſiue vt pro μ accipiatur

tur exceſſus puellorum ſupra numerum $\frac{2Na}{a+b}$: hoc facto erunt variationes probabilitatum in omni exemplo proxime eaedem pro iisdem numeris μ ſiue affirmatiue ſiue negatiue ſumtis. Sed et ipſae probabilitates, vbi maximae ſunt, in omni exemplo, ſine vllo ſcrupulo, eaedem cenſeri poſſunt, modo inter *a* et *b* differentia non admodum magna accipiatur. Sic quoque ratio apparet proprietatis illius, cuius mentionem fecimus §. 10. in fine.

§. 16. Ex praemiſſis patet, quemadmodum probabilitates poſſint quam proxime determinari pro quouis natorum numero, pro quolibet puellorum numero et pro qualibet ratione inter *a* et *b*. En totum proceſſum! Quaeratur primo maxima probabilitas pro hypotheſi $a = b$, quae vi paragraphi ſeptimi prioris ſchediasmatis $= \frac{1.12826}{\sqrt{(\pi N + 1)}}$ atque haec probabilitas proxime eadem manebit, cum maxima eſt, pro omni alia ratione inter *a* et *b*: imo poterit ſimplicius poni probabilitas maxima $= \frac{0.56413}{\sqrt{N}}$: Deinde ſumatur numerus $\frac{2Na}{a+b}$, qui indicat numerum puellorum maxima probabilitate gaudentem, quo facto detur qualiscunque alius puellorum numerus expreſſus formula $\frac{2Na}{a+b} + \mu$; dico fore probabilitatem proxime $= \frac{0,56413}{\sqrt{N}} \times \frac{1}{c^{\mu\mu:N}}$. Nec puto hanc rem commodius ſimulque accuratius confici poſſe, cum magnus eſt numerus N. Si paruulus fuerit iſte numerus, totum negotium omni rigore abſoluetur ope formulae in fine paragraphi ſecundi expreſſae.

ſae. Si denique mediocris, viderit analyſta, vtram alteri formulam praeferre velit.

§. 17. Integrum proceſſum ſingulari exemplo illuſtrabo ex tabulis *Süsmilchianis* ſelecto, quamuis paulo minus idoneo ob enormitatem numeri noſtri μ: ſcilicet Cel. *Süsmilch* in parte ſecunda operis ſui, cui in fine plurimae adiectae ſunt tabulae, pag. 13. tab. IV. refert exemplum pro metropoli Auſtriaca ad annum 1728, quod natae fuerint 3102 filiolae ac 2020 puelli; hic igitur $N = \frac{3102 + 2020}{2} = 2561$ atque poſito rurſus $\frac{a}{b} = 1.055$ fit $\frac{2Na}{a+b} = 2651$: vnde $\mu = 2020 - 2651 = -631$; ergo pro ipſiſſimo hoc caſu ſpeciali probabilitas eſt $= \frac{0.56413}{\sqrt{2561}} \times \frac{1}{c^{155}}$; iſta vero fractiuncula minor eſt, quam vnitas applicata ad vnitatem ſexaginta nouem *nullionibus* praefixam, cuiusmodi paruitas omnem eludit conceptum imo ſi omnes addamus probabilitates, quibus numerus puellorum infra 2021 deſcendere poneretur, vix inde triplicabitur praefata probabilitas: igitur ſi quaeſtio fuerit quanta ſit probabilitas vt inter 5122 natos numerus puellorum infra 2021 deprimatur, dico numerum maiorem quam eſt ternarius ſexaginta octo *nullionibus* praefixus, certari poſſe contra vnum non fore vt hoc contingat: an Viennae contigerit et an tot repetitis vicibus aliud ſimile portentum contigerit, prouti citata tabula refert, iudicent alii. Nec praetexatur fieri poſſe, vt Viennae facilius et frequentius filiolae procreentur ac puelli; in eadem enim tabella ad annum 1724 refertur, puellas ba-

 ptiza-

ptizatas fuiſſe tantum 1422 puerulos autem 3005, quae enormis inaequalitas alteri contraria, ſi rurſus calculo ſubiiciatur, ab omnibus pro *moraliter impoſſibili* habebitur. Tantae profecto irregularitates nec legi naturali nec ſorti vllo modo adſcribi poſſunt.

§. 18. At ſi integer natorum numerus ſit perexiguus, tunc caſus qui apparent maxime extraordinarii, multo minus ſunt improbabiles quam praeſumi poſſit: exemplum allegabo, quod mihi certum eſt. Nempe anno 1763 in paruo Ditionis Baſileenſis oppido, cui nomen *Liechſtahl* eſt, nati ſunt 20 filioli atque 37 puellae. Huiusmodi natorum partitio, vbi numerus puellarum fere duplus eſt puerulorum, equidem non poteſt non eſſe valde rara, at ob natorum paucitatem nihil habet, quod cum praefatis exemplis vllo modo comparari poſſit: Ecce calculum numericum.

Habemus ſcilicet $2N = 57$ atque adeo (ſtante porro $\frac{a}{b} = \frac{1055}{1000}$) $\frac{2Na}{a+b} = 29,26$: igitur $\mu = 20 - 29.26 = -9,26$ atque $\frac{\mu\mu}{N} = 3,01$; hinc $c^{\mu\mu:N} = 20,08$ ergo probabilitas quaeſita $= \frac{0,56413}{20,08\sqrt{28,5}} = \frac{1}{190}$, quae quidem valet pro ipſo caſu, qualis fuit. Igitur pro 57 natis probabile eſt vt intra 190 annos ipſiſſimus ille caſus, qualis contigit, ſemel contingat. Quia vero a ſola puerorum paucitate notabilis fuit, merito adiiciendae ſunt probabilitates ſingulorum caſuum, vbi numerus puellorum magis adhuc ſit depreſſus et tunc ſumma omnium harum probabilitatum aſcendit propemodum ad $\frac{1}{70}$; adeoque ſi nume-

rus

rus omnium obſeruationum annuarum fuerit 70, probabile fuit vt ſemel contingeret id ipſum quod contigit, nempe vt de 57 natis proles maſcula infra 21 deprimeretur: caeterum reductionem probabilitatis $\frac{1}{190}$ ad $\frac{1}{70}$ obiter feci; fateor etiam calculos numericos, ob paruitatem numeri N et magnitudinem relatiuam numeri μ, non omni quidem gaudere accuratione; attamen paruulos eſſe errores, qui facile negligi poſſint, contendo.

§. 19. Intelligimus nunc porro, quod numerando numeros μ ab numero, in quem maxima probabilitas cadit, eadem ſit probabilitas pro eodem numero μ, quaecunque intercedat ratio inter a et b, modo haec ratio parum ab aequalitate recedat, intelligimus, inquam, quod et ſumma probabilitatum pro eodem terminorum numero μ debeat eſſe eadem in primo autem ſchediasmate, tabulam dedi cuius ope determinaui limites intra quos, vt numerus puerorum ſubſiſtat, aequa ſit certatio; iam dico eosdes limites aſſumi poſſe pro ratione qualicunque parum inaequali inter a et b modo fiat vt maxima probabilitas incidat in medium horum limitum. Vidimus autem in fine paragraphi duodecimi pro hypotheſi $a = b$ atque $2N = 20000$, quod hi limites ſint $9952\frac{3}{4}$ et $10047\frac{1}{4}$, qui aequidiſtant a numero 10000, vterque nimirum numero $47\frac{1}{4}$; iam igitur dico quod mutata ratione a ad b eaque poſita $= \frac{1055}{1000}$, manente eodem natorum numero, ſimilis conditio incidet in limites $9952\frac{3}{4} + 268$ et $10047\frac{1}{4} + 268$ ſiue

ſiue in limites $10220\frac{3}{4}$ et $10315\frac{1}{4}$ aequidiſtantes a termino 10268 maxima probabilitate donato, (§ 10.) vbi communis diſtantia iterum eſt $47\frac{1}{4}$. Ergo rurſus aeque probabile eſt vt numerus puellorum hoſce limites transgrediatur vel non transgrediatur. Miratus ſum tantam horum terminorum anguſtiam.

Sed et porro in praecedente ſchediasmate monui paragrapho decimo tertio, diſtantias limitum diminui proxime in ratione ſubduplicata numerorum, qui omnium natorum ſummam indicant. Sic pro 5000 natis aequa erit certatio proxime, fore vt numerus puellorum non maior ſit quam $2500+67+24$ ſiue 2591 nec minor quam $2500+67-24$ ſiue 2543 qui limites ſimpliciter indicantur 2567 ± 24.

Si in Gallia tota proles annua ponatur 600000 erit proles maſcula media $= 308040$ et aequa propemodum erit ſponſio, exceſſum aut defectum prolis maſculae numeratae non fore maiorem quam 260, ſi, cum ſtatu medio conferatur, poſito nimirum $\frac{a}{b} = 1.055$.

§. 20. Haſce de limitibus aeque probabilibus diſquiſitiones vtiles fore ſperabam, vt tutius et accuratius ferri poſſet iudicium de vera lege naturali ſiue de vera proportione inter numeros *a* et *b*: an vbiuis terrarum? an omni tempore ſibi conſtat? an omnes variationes. quae reliquae ſunt. ſorti ſunt adſcribendae? an ipſa lex naturalis aliquam patitur variationem? De his adhuc dum haeſito: nimis parvula

vula videtur differentia inter a et b nimiumque efficaciae ſortis inuoluta quam vt maximo obſeruationum numero accurate determinari poſſit: aliquando ipſi numeri, qui exacte obſeruari potuiſſent, non ſunt omni ſuſpicione certiores. Ratio $a : b$, quam legi naturali adſcribo, non poteſt vtique aliter quam ex magno obſeruationum numero deduci; plures autem, deductiones huiusmodi concipi poſſunt; modus ſimpliciſſimus, quo aſſumitur eſſe a ad b, vt ſumma puellorum natorum ad ſummam filiolarum natarum, mihi adhuc caeteris videtur praeferendus. Attamen non ſpernenda puto criteria, quae in limitibus aequa probabilitate ditatis poſita ſunt; hac de re paulo diſertius dicam.

§. 21. Quo maior eſt ſumma natorum, eo tutior eſt ad rationem $a : b$ determinandam; Per integros 95 annos Londini nati ſunt 737629 filioli atque 698958 puellae; vnde optime ſtatuitur $\frac{a}{b} = \frac{737629}{698958} = 1.055$ (apud *Süsmilchium* paruulo errore ponitur 1.054 vid. pag. 21). Ab hoc valore medio obſeruationes aliquando notabiliter recedunt, etiamſi integra decennia accipiantur: decennium 1721 . . . 1730 exhibet 89217 puellas et 92813 filiolos ſicque $\frac{a}{b} = 1.040$, qui valor inter omnia decennia minimus eſt; maximus fit pro ſeptennio 1664 . . . 1670, quo nati ſunt 37283 puellae et 40306 maſculi; vnde $\frac{a}{b} = 1.081$ ex ſummatione praefati decennii atque ſeptennii emergit $\frac{a}{b} = 1.054$, qui valor cum hypotheſi communi ſatis conuenit. Decen-

nium 1681 . . . 1690 maiorem indicat aberrationem; ponitur enim $\frac{a}{b} = 1.097$; at error fuit commiſſus et ponendum erat 1.056 loco 1.091. huius modi errores ſe ipſos produnt; ſimul autem aliorum commiſſorum errorum, qui nullo modo diuinari poſſunt, metum faciunt. Attamen ponamus verum valorem $\frac{a}{b} = 1.055$ fueritque pro decennnio 1721 . . . 1730, $2N = 182031$ (loco numeri 92813 ſummam prolis maſculae indicantis ponendus erat numerus 92814); ſic prodit numerus $\frac{2Na}{a+b} = 93451$, qui maxima probabilitate gaudet pro numero prolis maſculae indicando; ſorte autem euenit vt numerus iſte tantum eſſet 92814: igitur aberratio ſorti debita hic fuit $= 637$ pro integra generatione 182031: ponamus nunc generationem multo maiorem adhuc, veluti 4000000; vidimus autem paſſim aberrationes pro eodem gradu probabilitatis eſſe in ratione ſupduplicata generationum; erit igitur nunc aberratio aeque probabilis $= 637 \times \sqrt{\frac{4000000}{182031}} = 2986$: ſed eſt porro nunc $\frac{2Na}{a+b} = 2053528$, qui numerus indicat valorem prolis maſculae maxime probabilem, poſito $\frac{a}{b} = 1.055$ atque tunc oritur numerus omnium filiolarum 1946472; ſubtrahamus errorem 2986 ſorti debitum a numero puellorum eundemque addamus numero filiolarum, habebimus numeros 2050542 et 1949458, pro vtroque ſexu, qui eadem facilitate contingere poſſunt pro generatione 4000000 atque numeri 92814 et 89217 contigerunt pro generatione 182031: eſt autem 1949458 : 2050542 $= 1000$:

$=1000 : 1052$: Igitur ſi vel certa ſit poſitio $\frac{a}{b} = 1.055$, poterit tamen contingere vt vel in generatione 4000000 infantum indicetur $\frac{a}{b} = 1.052$: poteſt porro error a ſorte oriundus eadem facilitate contingere in exceſſu tuncque fieret ratio $\frac{a}{b} = 1.058$. Ergo obſeruationes ducentorum annorum Londini inſtituendae, etiamſi fuerint accuratiſſimae, nondum ſufficient ad tollendam haeſitationem 0.006 in ſtabilienda lege naturali ſiue ratione $\frac{a}{b}$. Euagationes multo maiores eſſe poſſunt in generationibus longe minoribus, quod tabulae confirmant.

§. 22. Vnicum ſuperaddam de limitibus mediis vel aeque probabilibus aberrationum ſorti debitarum; ſit ſcilicet rurſus numerus $\frac{2Na}{a+b} \pm \mu$, vbi $\frac{2Na}{a+b}$ exprimit numerum puellorum ſecundum legem naturae et μ aberrationem; vidimus fore pro $2N = 20000$, $\mu = 47\frac{1}{4}$ et pro quocunque alio valore $\mu = 47\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2N}{20000}} = 0,4725\sqrt{N}$; igitur aeque probabile erit vt ſit μ maior vel minor quam $0,4725\sqrt{N}$ atque pro pluribus annis euentus fortuiti huic legi non male reſpondere debent, ſic vt toties proxime vnum contingat quam alterum, nec paruulae inaequalitates valoris $\frac{a}{b}$ hanc proprietatem euertant. Conſului itaque in tabula Londinenſi decennium 1721 - - - - 1730 atque poſito calculo ſucceſſum habui fere ſupra expectationem. En tabellam Londinenſem calculis meis munitam, vbi columna quinta ſupponit $\frac{a}{b} = 1.055$ vel $\frac{2Na}{a+b} = \frac{1055}{2055} \times 2N$;

 columna

columna autem ſeptima ſupponit $\frac{a}{b} = 1.040$ atque adeo $\frac{2Na}{a+b} = \frac{1040}{2040} \times 2N$:

anni	puellae	puelli	ſuma 2 N	$\frac{1055}{2055} \times 2N$	aberratio μ	$\frac{1040}{2040} \times 2N$	aberratio μ
1721	8940	9430	18370	9431	+ 1 NB.	9365	− 65
1722	9014	9325	18339	9414	+ 89	9349	+ 24 NB.
1723	9392	9811	19203	9858	+ 47 NB.	9790	− 21 NB.
1724	9468	9902	19370	9944	+ 42 NB.	9875	− 27 NB.
1725	9198	9661	18759	9630	− 31 NB.	9563	− 98
1726	9203	9605	18808	9655	+ 50	9588	− 17 NB.
1727	9011	9241	18252	9370	+ 129	9305	+ 64
1728	8155	8497	16652	8548	+ 51	8489	− 8 NB.
1729	8324	8736	17060	8758	+ 22 NB.	8697	− 39 NB.
1730	8512	3606	17118	8788	+ 182	8727	+ 121.

Paruula haec tabella integram theoriam noſtram, tam puram quam appropinquatam, egregie confirmat. In columna ſexta aberratio 47 ſigno NB. notata eſt, etiamſi limites definitos tantillum transgrediatur; in columna ſexta ſigna affirmatiua, in columna octaua ſigna negatiua praeualent, cum tamen aberratio ad vtramque partem aequali facilitate oriri poſſit: id ipſum extraordinariae, quae forte contigit, tribuo ſortis energiae: His vero diutius non immorabor contentus methodo expoſita, qua ſimul plura alia argumenta affinia cum ſucceſſu tractari poterunt.

SOLVTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS,

QVO DVO QVAERVNTVR NVMERI, QVORVM PRODVCTVM TAM SVMMA, QVAM DIFFERENTIA EORVM, SIVE AVCTVM SIVE MINVTVM FIAT QVADRATVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Problema hoc mihi ante complures annos Berolini a Centurione quodam Pruſſico erat propoſitum, quod ſe, Lipſiae ab amico accepiſſe aiebat; neque vero ſe neque iſtum amicum ſolutionem vllo modo inuenire potuiſſe. Quaerebat igitur ex me vtrum hoc Problema poſſibile iudicarem nec ne? Statim quidem hoc problema mihi ob elegantiam mirifice placebat et quum facile ſummam ſolutionis difficultatem perſpexiſſem, id omnino dignum iudicaui in quo vires meas exercerem. Tandem vero poſt plura tentamina ſolutionem ſum adeptus, quae ita ſe habebat: Poſitis duobus numeris quaeſitis A et B, inueni $A = \frac{13 \cdot 29^2}{8 \cdot 9^2} = \frac{10933}{648}$ et $B = \frac{5 \cdot 29^2}{32 \cdot 11^2} = \frac{4205}{3872}$.

2. Via

2. Via autem qua ad hanc ſolutionem perveni, ita erat comparata, vt nullo modo mihi liceret, alias ſolutiones inde eruere; etiamſi nullus dubitandi locus relinqueretur, quin hoc problema innumerabiles admitteret ſolutiones. Nuper autem cum in hoc idem argumentum incidiſſem, caſu prorſus fortuito methodus mihi ſe obtulit, infinitas ſolutiones huius Problematis eliciendi. Quod quum caſui prorſus ſingulari ſit acceptum referendum, quaeſtio haec omnino digna mihi eſt viſa, quam accuratius perſcrutarer. Quare primo quidem ſolutionem generalem proponam, deinde vero artificium illud, quod mihi infinitas ſolutiones ſuppeditauit, vberius euoluam.

Solutio Problematis generalis.

3. Si literae A et B denotent ambos numeros quaeſitos, neceſſe eſt, vt ſequentes quatuor formulae quadrata efficiantur:

$$\text{I. } AB+A+B=\square;\quad \text{II. } AB+A-B=\square;$$
$$\text{III. } AB-A+B=\square;\quad \text{IV. } AB-A-B=\square.$$

Quum autem ſtatim pateat, hos numeros integros eſſe non poſſe, ob rationes mox perſpiciendas, eos ita expreſſos aſſumo, vt ſit $A=\frac{z}{x}$ et $B=\frac{z}{y}$, ita vt quatuor ſequentes formulae ad quadrata reducendae habeantur:

$$\text{I. } \tfrac{z}{xy}(z+y+x)=\square;\quad \text{II. } \tfrac{z}{xy}(z+y-x)=\square;$$
$$\text{III. } \tfrac{z}{xy}(z-y+x)=\square;\quad \text{IV. } \tfrac{z}{xy}(z-y-x)=\square.$$

4. Quod

4. Quod ſi ergo factor communis fuerit quadratum, quatuor ſequentes formulas quadrata effici oportet, quas quidem per ambiguitatem ſignorum ita duabus formulis comprehendere licet:

I et II. $z+y\pm x=\square$; III et IV. $z-y\pm x=\square$

Quare quum in genere ſit $aa+bb\pm 2ab=\square$ ſimilique modo $cc+dd\pm 2cd=\square$; ſtatuamus vt ſequitur:

$$z+y=aa+bb;\; x=2ab$$
$$z-y=cc+dd;\; x=2cd$$

Vt autem fiat $2ab=2cd$, ſtatuatur vtrumque $=2pqrs=x$, ſumaturque $a=pq; b=rs; c=pr$; et $d=qs$ eritque

$z+y=aa+bc=ppqq+rrss$ et

$z-y=cc+dd=pprr+qqss$ vnde colligitur

$z=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2}$ et $y=\frac{(pp-ss)(qq-rr)}{2}$ tum vero erit

I. $z+y+x=(a+b)^2=(pq+rs)^2$

II. $z+y-x=(a-b)^2=(pq-rs)^2$

III. $z-y+x=(c+d)^2=(pr+qs)^2$

IV. $z-y-x=(c-d)^2=(pr-qs)^2$

5. Supereſt igitur, vt etiam factor communis $\frac{z}{xy}$ quadratum reddatur, qui euolutus praebet hanc formulam:

$$\frac{z}{xy}=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2pqrs(pp-ss)(qq-rr)}$$

at

at vero in hoc efficiendo ſumma conſiſtit difficultas; quodſi enim numerator in denominatorem ducatur, vt haec formula quadratum fieri debeat:

$$2pqrs(pp-ss)(qq-rr)(pp+ss)(qq+rr)=\square$$

ſingulae litterae ad quinque dimenſiones aſſurgunt, cuiusmodi quaeſtiones in Analyſi Diophantea adhuc non ſunt tractari ſolitae; ceterum iam olim poſt plura tentamina reperi huic conditioni ſatisfieri, ſumendo $p=13$, $s=11$, $q=16$, et $r=11$, vti periculum facienti mox patebit.

6. Quodſi autem quocunque modo huiusmodi valores idonei pro literis $p; q; r; s$ fuerint inuenti, ſolutio problematis inde ita adſtruitur:

Poſita formula $\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2pqrs(pp-ss)(qq-rr)}=\frac{M^2}{N^2}$, primo ambo numeri quaeſiti, ita erunt expreſſi

$$A=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{4pqrs} \quad \text{et} \quad B=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{(pp-ss)(qq-rr)}$$

tum vero conditionibus problematis ita ſatisfiet vt ſit,

I. $\sqrt{(AB+A+B)}=\frac{M}{N}(pq+rs)$

II. $\sqrt{(AB+A-B)}=\frac{M}{N}(pq-rs)$

III. $\sqrt{(AB-A+B)}=\frac{M}{N}(pr+qs)$

IV. $\sqrt{(AB-A-B)}=\frac{M}{N}(pr-qs)$.

Singularis Euolutio noſtrae formulae, quae ad quadratum eſt reuocanda.

7. Quum omnis opera in hac formula reducenda fruſtra conſumatur, quamdiu in ea tot diuerſae

ſae quantitates occurrunt, earumque ſingulae ad tot dimenſiones aſſurgunt, ante omnia elaborandum eſt, vt diuerſis factoribus denominatoris communes diuiſores concilientur; hunc in finem vſus ſum ſequentibus poſitionibus:

$p+s=\alpha\beta$; $p-s=\varepsilon\zeta$; $q+r=\alpha\gamma$; et $q-r=\varepsilon\eta$, ita vt fiat $p=\frac{\alpha\beta+\varepsilon\zeta}{2}$; $s=\frac{\alpha\beta-\varepsilon\zeta}{2}$; $q=\frac{\alpha\gamma+\varepsilon\eta}{2}$ et $r=\frac{\alpha\gamma-\varepsilon\eta}{2}$; tum vero noſtra conditio principalis poſtulat, vt ſit:

$$\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2pqrs.\beta\gamma\zeta\eta.\alpha^2\varepsilon^2}=\frac{M^2}{N^2} \text{ ſiue}$$

$$\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2pqrs.\beta\gamma\zeta\eta}=\frac{M^2}{N^2}.\alpha^2\varepsilon^2.$$

8. Secundo conſtituatur ratio inter litteras r et s, quae ſit vt $f:g$, eritque $f:g::\alpha\gamma-\varepsilon\eta:\alpha\beta-\varepsilon\zeta$ ſiue $g(\alpha\gamma-\varepsilon\eta)=f(\alpha\beta-\varepsilon\zeta)$, vnde colligitur $\alpha(f\beta-g\gamma)=\varepsilon(f\zeta-g\eta)$, quocirca ponamus:

$\alpha=f\zeta-g\eta$; $\varepsilon=f\beta-g\gamma$; tum vero habebitur

$$p=\frac{2f\beta\zeta-g\beta\eta-g\gamma\zeta}{2};\ q=\frac{f\beta\eta+f\zeta\gamma-2g\gamma\eta}{2}$$

$$r=\frac{f(\gamma\zeta-\beta\eta)}{2} \text{ et } s=\frac{g(\gamma\zeta-\beta\eta)}{2}.$$

9. Vt adhuc plures factores in denominatore communes reddamus; faciamus inſuper $q=h\beta\zeta$ vnde haec aequatio emergit:

$2h\beta\zeta=f\beta\eta+f\zeta\gamma-2g\gamma\eta$ ſiue $\beta(2h\zeta-f\eta)=\gamma(f\zeta-2g\eta)$ quam ob rem ponamus $\beta=f\zeta-2g\eta$ et $\gamma=2h\zeta-f\eta$. Ex his autem valoribus porro colligimus:

$\alpha=f\zeta-g\eta$; $\varepsilon=(ff-2gh)\zeta-fg\eta$;

 $p+s$

$$p+s=(f\zeta-g\eta)(f\zeta-2g\eta)=ff\zeta\zeta-3fg\zeta\eta+2gg\eta\eta$$
$$p-s=\zeta((ff-2gh)\zeta-fg\eta)=(ff-2gh)\zeta\zeta-fg\zeta\eta$$
$$q+r=(f\zeta-g\eta)(2h\zeta-f\eta)=2fh\zeta\zeta-(ff+2hg)\zeta\eta+fg\eta\eta$$
$$q-r=\eta((ff-2gh)\zeta-fg\eta)=(ff-2hg)\zeta\eta-fg\eta\eta$$

hincque porro:

$$p=(ff-gh)\zeta\zeta-2fg\zeta\eta+gg\eta\eta$$
$$s=gh\zeta\zeta-fg\zeta\eta+gg\eta\eta=g(h\zeta\zeta-f\zeta\eta+g\eta\eta)$$
$$q=fh\zeta\zeta-2gh\zeta\eta=h\zeta(f\zeta-2g\eta).$$
$$r=fh\zeta\zeta-ff\zeta\eta+fg\eta\eta=f(h\zeta\zeta-f\zeta\eta+g\eta\eta).$$

10. Denique hos valores ita determinemus, vt numerus p diuiſor euadat formulae $qq+rr$, iam vero inuenitur:

$$qq+rr=ffgg\eta^4-2f^3g\zeta^4\eta^3\zeta+(f^4+2ffgh+4gghh)\eta\eta\zeta\zeta$$
$$-2fh(ff+2gh)\eta\zeta^3+2ffhh\zeta^4$$

quare quum ſit $p=gg\eta\eta-2fg\eta\zeta+(ff-gh)\zeta\zeta$, vt p fiat factor illius formulae, ſtatuatur alter factor $ff\eta\eta+t\zeta\eta+u\zeta\zeta$ eritque productum:

$$\begin{array}{lllll} ffgg\eta^4 & -2f^3g\eta^3\zeta & +(f^4-ffgh)\eta\eta\zeta\zeta & +t(ff-gh)\eta\zeta^3 & +u(ff-gh)\zeta^4 \\ & +tgg & -2tfg & -2ufg & \\ & & +ugg & & \end{array}$$

vbi primi termini iam congruunt, ſecundi vero dant $t=0$, tertii $3ffgh+4gghh=ugg$, vnde $u=\frac{3ffh}{g}+4hh$; quarti porro praebent $u=\frac{h(ff+2gh)}{g}$; quinti vero tandem dant $u=\frac{2ffhh}{ff-gh}$. Neceſſe igitur eſt, vt hi tres valores ipſius u inter ſe congruant, primus vero cum ſecundo collatus dat $3ffh$

$+4g$

$+4ghh = hff + 2ghh$, ſeu $2ffh + 2ghh = 0$, ideoque $ff + gh = 0$; at ſecundus tertio aequatus dat $f^4 - ffgh - 2gghh = 0$, ſiue $(ff + gh)(ff - 2gh) = 0$, vtrique ergo conditioni ſatisfit vno eodemque valore $h = -\frac{ff}{g}$.

11. Quoniam igitur inuenimus $h = -\frac{ff}{g}$ reliqui valores ſequenti modo exprimentur:

$$p = 2ff\zeta\zeta - 2fg\zeta\eta + gg\eta\eta$$
$$q = -\frac{ff}{g}.\zeta(f\zeta - 2g\eta) = 2ff\zeta\eta - \frac{f^3}{g}.\zeta\zeta$$
$$r = -\frac{f^3}{g}.\zeta\zeta - ff\zeta\eta + fg\eta\eta$$
$$s = -ff\zeta\zeta - fg\zeta\eta + gg\eta\eta$$

vbi notatu dignum euenit, vt in valoribus p et s producta $f\zeta$ et $g\eta$, tamquam ſimplices quantitates occurrant, quod quidem in litteris q et r non accidit. Verum quia totum negotium, tantum in ratione q ad r verſatur, hi ambo valores multiplicentur per $-\frac{g}{f}$, vt ſit $q = ff\zeta\zeta - 2fg\zeta\eta$ et $r = ff\zeta\zeta + fg\zeta\eta - gg\eta\eta$; hanc ob rem vt formulas noſtras in compendium redigamus atque adeo ad duas quantitates reuocemus, ſtatuamus $f\zeta = m$ et $g\eta = n$, quo facto noſtrae quatuor literae ita ſe habebunt:

$$p = 2mm - 2mn + nn;\quad q = mm - 2mn = m(m - 2n)$$
$$s = -mm - mn + nn;\quad r = mm + mn - nn.$$

12. Quoniam vero res eodem redit ſiue quaepiam litera poſitiue, ſiue negatiue accipiatur, ponamus

$$p = 2mm - 2mn + nn;\quad q = mm - 2mn = m(m-2n)$$
$s = r = mm + mn - nn$; vnde fit
$$p+s = 3mm - mn = m(3m-n)$$
$$p-s = mm - 3mn + 2nn = (m-n)(m-2n)$$
$$q+r = 2mm - mn - nn = (m-n)(2m+n)$$
$$q-r = -3mn + nn = -n(3m-n).$$

Hic ſignum negationis in valore $q-r$, nihil plane turbat, tantum enim opus eſt litteras q et r inter ſe permutari, ita vt ſit
$$p = 2mm - 2mn + nn;\quad q = mm + mn - nn$$
$$s = mm + mn - nn;\quad r = mm - 2mn = m(m-2n)$$
vnde fit
$$p+s = 3mm - mn = m(3m-n)$$
$$p-s = mm - 3mn + 2nn = (m-n)(m-2n)$$
$$q+r = 2mm - mn - nn = (2m+n)(m-n)$$
$$q-r = 3mn - nn \qquad = n(3m-n)$$
quibus valoribus in ſequenti calculo vtemur.

13. His conſtitutis valoribus, pro numeratore noſtrae fractionis habebimus:
$$pp + ss = 5m^4 - 6m^3n + 7mmnn - 6mn^3 + 2n^4, \text{ ſeu}$$
$$pp + ss = (mm+nn)(5mm - 6mn + 2nn) \text{ et}$$
$$qq + rr = 2m^4 - 2m^3n + 3mmnn - 2mn^3 + n^4, \text{ ſiue}$$
$$qq + rr = (mm+nn)(2mm - 2mn + nn)$$
vnde fractio noſtra ad quadratum reducenda erit:
$$\frac{MM}{NN} = \frac{(5mm - 6mn + 2nn).(mm+nn)^2}{2n(2m+n).m^2.(m-n)^2(m-2n)^2(3m-n)^2(mm+mn+nn)^2}$$

hinc-

hincque colligimus :

$$\frac{M}{N} = \frac{mm + nn}{m(m - n)(m - 2n)(3m - n)(mm + mn - nn)} \cdot \sqrt{\frac{5mm - 6mn + 2nn}{2n(2m + n)}};$$

totum ergo negotium huc eſt reductum, vt formula $\frac{5mm - 6mn + 2nn}{2n(2m + n)}$ quadratum efficiatur, id quod infinitis modis praeſtari poſſe manifeſtum eſt, ſtatim atque vnicus caſus innotuerit.

14. Quo haec forma tractabilior reddatur, ponamus $2m - n = l$, vt ſit $n = 2m - l$ et formula ad quadratum reducenda erit :
$\frac{mm - 2ml + 2ll}{(4m - 2l)(4m - l)}$, vbi productum ex numeratore in denominatorem euolutum quippe quod etiam quadratum eſſe debet, perducit ad hanc conditionem
$16m^4 - 44m^3 l + 58mmll - 28ml^3 + 4l^4 = \square$
cuius quum ambo termini extremi iam ſint quadrati per methodos ſatis cognitas facile eſt innumerabiles ſolutiones inueſtigare; quem in finem ponamus $\frac{m}{l} = z$ vt habeamus hanc formulam $16.z^4 - 44.z^3 + 58zz - 28.z + 4 = \square$; quae ponendo $z = y - 2$; tranſit in hanc :

$16y^4 - 172y^3 + 706yy - 1300y + 900 = \square$ vbi iterum ambo extremi termini ſunt quadrata.

15. Ad hoc negotium expediendum, praeſtabit reſolutionem noſtrae aequationis ſiue prioris, ſiue poſterioris in genere docere. Sit igitur propoſita haec aequatio generalis :

$$\alpha\alpha z^4 - 2\beta z^3 + \gamma zz - 2\delta z + \varepsilon\varepsilon = \square;$$

atque pro idoneis valoribus ipſius z ſequentes quatuor formulae per methodos conſuetas reperiuntur.

$$\text{I.}\quad z=\frac{2\alpha(\beta\varepsilon-\alpha\delta)}{2\alpha^3\varepsilon+\beta\beta-\alpha\alpha\gamma}$$

$$\text{II.}\quad z=\frac{2\alpha\varepsilon^3+\delta\delta-\gamma\varepsilon\varepsilon}{2\varepsilon(\alpha\delta-\beta\varepsilon)}$$

$$\text{III.}\quad z=\frac{(2\alpha^3\varepsilon+\alpha\alpha\gamma-\beta\beta)(2\alpha^3\varepsilon-\alpha\alpha\gamma+\beta\beta)}{4\alpha\alpha(2\alpha^4\delta-\alpha\alpha\beta\gamma+\beta^3)}$$

$$\text{IV.}\quad z=\frac{4\varepsilon\varepsilon(2\beta\varepsilon^4-\gamma\delta\varepsilon\varepsilon+\delta^3)}{(2\alpha\varepsilon^3+\gamma\varepsilon\varepsilon-\delta\delta)(2\alpha\varepsilon^3-\gamma\varepsilon\varepsilon+\delta\delta)}$$

vbi quum litterae α et ε pro lubitu tam poſitiue quam negatiue accipi queant, binae priores formulae geminos valores ſuppeditant.

16. Quemadmodum autem innumerabiles huius aequationis ſolutiones inueniri oporteat, ſequenti modo calculus inſtituatur. Sit f valor quicunque per praecedentes formulas inuentus, ita vt noſtra expreſſio $\alpha\alpha z^4-2\beta z^3+\gamma zz-2\delta z+\varepsilon\varepsilon$, poſito $z=f$ fiat quadratum, ſitque propterea

$$\alpha\alpha f^4-2\beta f^3+\gamma ff-2\delta f+\varepsilon\varepsilon=gg;$$

nunc igitur ponatur $z=x+f$ et noſtra aequatio induet hanc formam:

$$\begin{array}{llll}\alpha\alpha x^4+4\alpha\alpha x^3 & +6\alpha\alpha ff & +4\alpha\alpha f^3 & +gg=\square\\ \quad -2\beta & -6\beta f\;\;xx & -6\beta ff\;\;x & \\ & +\gamma & +2\gamma f & \\ & & -2\delta & \end{array}$$

quae aequatio breuitatis gratia ita repraeſentetur:

$$aax^4-2bx^3+cxx-2dx+ee=\square$$

ita vt ſit $aa=\alpha\alpha$; $b=\beta-2\alpha\alpha$; $c=\gamma-6\beta f+6\alpha\alpha ff$, $d=\delta-\gamma f+3\beta ff-2\alpha\alpha f^3$; ac denique

nique $ee = gg$, vbi ſumi poteſt $a = \pm \alpha$ et $e = \pm g$. Tum vero quatuor noui valores pro z inueniuntur ſequentes:

$$\text{I.}\quad z = f + \frac{2a(be - ad)}{2a^3e + bb - aac}$$

$$\text{II.}\quad z = f + \frac{2ae^3 + dd - cee}{2e(ad - be)}$$

$$\text{III.}\quad z = f + \frac{(2a^3e + aac - bb)(2a^3e - aac + bb)}{4aa(2a^3d - aabc + b^3)}$$

$$\text{IV.}\quad z = f + \frac{4ee(2be^3 - cdee + d^3)}{(2ae^3 + cee - dd)(2ae^3 - cee + dd)}$$

quoniam igitur quemcunque valorem pro z hoc modo inuentum aſſumere licet, hinc numerus ſolutionum in infinitum augeri poterit.

17. Poſtquam autem pro z valor quicunque idoneus fuerit inuentus, qui ſit $z = \frac{h}{k}$, ob $z = \frac{m}{l} = \frac{m}{2m - n}$, habebimus $m = h$ et $n = 2h - k$, ex quibus duobus numeris m et n reliquae quantitates ſequenti modo determinantur:

$$p = 2mm - 2mn + nn;\quad q = mm + mn - nn$$

$$s = mm + mn - nn;\quad r = mm - 2mn = m(m - 2n),$$

vbi notaſſe iuuabit eſſe:

$$pp + ss = (mm + nn)(5mm - 6mn + 2nn) \text{ et}$$

$$qq + rr = (mm + nn)(2mm - 2mn + nn) = (mm + nn)p,$$

atque hinc denique ambo noſtri numeri quaeſiti erunt

$$A = \frac{(mm + nn)^2(5mm - 6mn + 2nn)}{4m(m - 2n)(mm + mn - nn)^2} \text{ et}$$

$$B = \frac{(mm + nn)^2(5mm - 6mn + 2nn)(2mm - 2mn + nn)}{(3m - n)^2(m - n)^2 mn(m - 2n)(2m + n)}$$

18. Vt autem etiam innoteſcat, quemadmodum huiusmodi valores inuenti ſatisfaciant, ex binis numeris idoneis

idoneis m et n prodeat formula radicalis $\sqrt{\frac{5mm-6mn+2nn}{2n(2m+n)}} = \frac{\mu}{\nu}$, vnde colligitur $\frac{M}{N} = \frac{(mm+nn)\mu}{\nu m(m-n)(m-2n)(3m-n)(mm+mn-nn)}$, tum vero quoniam ſupra litteras q et r permutavimus, quaternae formulae propoſitae, ſequenti modo ad quadrata reducentur

I. $\sqrt{(AB+A+B)} = \frac{M}{N}(pr+qs) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{(mm+nn)^2}{m(m-2n)(mm+mn-nn)}$

II. $\sqrt{(AB+A-B)} = \frac{M}{N}(pr-qs) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{(mm+nn)(m^4-8m^3n+6mmnn-n^4)}{m(m-n)(m-2n)(3m-n)(mm+mn-nn)}$

III. $\sqrt{(AB-A+B)} = \frac{M}{N}(pq+rs) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{(mm+nn)}{(m-n)(m-2n)}$

IV. $\sqrt{(AB-A-B)} = \frac{M}{N}(pq-rs) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{(mm+nn)}{m(3m-n)}$.

Aliae transformationes formulae reſoluendae.

19. Quum tota quaeſtio huc ſit perducta, vt iſta formula (13) $\frac{5mm-6mn+2nn}{2n(2m+n)}$, ſiue $\frac{(2m-n)^2+(m-n)^2}{2n(2m+n)}$ ad quadratum reuocetur, ponamus $2m-n=t$ et $m-n=u$, ita vt ſit $m=t-u$ et $n=t-2u$, hincque $2m+n=3t-4u$ atque nunc quadratum eſſe debeat $\frac{tt+uu}{(2t-4u)(3t-4u)} = \square$, ſiue $\frac{tt+uu}{(4u-2t)(4u-3t)} = \square$ circa quam formulam obſeruo, numeratorem cum denominatore alios factores communes habere non poſſe praeter 2 et 5. Hinc igitur ſequitur numeratorem $tt+uu$ vel ipſum quadratum eſſe debere vel duplum, vel quintuplum vel decuplum quadratum. Vnde quatuor caſus reſultant, quos ſingulos ſequenti modo euoluamus.

20. Denotent litterae a et b binos cathetos trianguli rectanguli numerici cuius, hypothenuſa ſit $=c$, ita vt ſit $aa+bb=cc$, nunc igitur pro

primo

primo caſu faciamus $tt+uu=cc$, quod fit ſumendo $t=a$ et $u=b$, atque hoc caſu neceſſe eſt, vt fiat

$$(4b-2a)(4b-3a)=\square$$

Pro II^do^ Caſu faciamus $tt+uu=2cc$, quod fit ſumendo $t=a-b$ et $u=a+b$, atque nunc neceſſe eſt vt ſit $(a+3b)(a+7b)=\square$.

Pro III^tio.^ Caſu faciamus $tt+uu=5cc$, quod fit ſumendo $t=a+2b$ et $u=2a-b$; tum enim ob $4u-2t=4a-8b$ et $4u-3t=5a-10b$, formula ad quadratum reducenda erit $(6a-8b)(a-2b)=\square$, hoc eſt $(4b-2a)(4b-3a)=\square$, quae cum Caſu I^mo^ perfecte congruit.

Pro Caſu denique IV^to^, faciamus $tt+uu=10.cc$, quod fit ſumendo $t=3a+b$ et $u=a-3b$, tum enim ob $4u-2t=-14b-2a$, et $4u-3t=-5a-15b$, formula ad quadratum reducenda erit $(3b+a)(7b+a)=\square$, prorſus vti in caſu ſecundo. Verum hic notandum eſt, caſum tertium et quartum adhuc alio modo expediri poſſe. Si enim pro tertio ponamus $t=a+2b$ et $u=b-2a$, ob $4u-2t=-10.a$ et $4u-3t=-2b-11.a$ formula ad quadratum reducenda erit $2a(11a+2b)=\square$.

Pro Caſu quarto autem, ſi ponamus $t=3a+b$ et $u=3b-a$, ob $4u-2t=10b-10a$ et $4u-3t=9b-13.a$, formula ad quadratum reducenda eſt $(a-b)(13a-9b)=\square$. Verum plerumque quoties his duobus caſibus ſatisfieri poteſt toties numeri

 t et

t et u communi factore 5 praediti reperiuntur, ideoque ad nouas ſolutiones non perducunt.

21. His igitur duobus caſibus poſtremis relictis, circa quatuor praecedentes omnino memoratu dignum eſt, quod primus et tertius, tum vero etiam ſecundus et quartus ad eandem formulam perduxerit, quare pro primo et tertio, ſi numeri a et b ita fuerint comparati, vt formula $(4b-2a)(4b-3a)$ fiat quadratum, tum duplici modo inde idonei valores pro t et u obtinentur; priori enim modo habebimus $t=a$ et $u=b$, altero vero modo $t=a+2b$ et $u=2a-b$. Simili modo pro caſibus ſecundo et quarto, ſi fuerit formula $(3b+a)(7b+a)$ quadratum, tum etiam duo caſus oriuntur, alter $t=a-b$ et $u=a+b$, alter vero $t=3a+b$ et $u=a-3b$. Operae igitur pretium erit has geminas reſolutiones accuratius exponere.

I. *Si fuerit* $(4b-2a)(4b-3a)=\square$, *exiſtente* $aa+bb=cc$.

22. Hinc igitur primo ſtatim deducimus fractionem ſupra (18) introductam $\frac{\mu}{\nu}=\frac{cc}{(4b-2a)(4b-3a)}$; deinde pro priori reſolutione habebimus

$$t=a;\ m=a-b$$
$$u=b;\ n=a-2b$$
$$p=aa-2ab+2bb;\ r=(a-b)(3b-a)$$
$$q=aa-ab-bb;\ s=aa-ab-bb$$
$$\frac{p}{s}=\frac{aa-2ab+2bb}{aa-ab-bb};\ \frac{q}{r}=\frac{aa-ab-bb}{(a-b)(3b-a)}$$
$$mm+nn=2aa-6ab-5bb$$

pro

pro altera vero ſolutione

$$t = a + 2b; \quad m = 3b - a;$$
$$u = 2a - b; \quad n = 4b - 3a;$$
$$p = 5(aa - 2ab + 2bb); \quad r = -5(a-b)(3b-a)$$
$$q = -5(aa - ab - bb); \quad s = -5(aa - ab - bb)$$
$$\frac{p}{s} = \frac{aa - 2ab + 2bb}{aa - ab - bb}; \quad \frac{q}{r} = \frac{aa - ab - bb}{(a-b)(3b-a)}$$

vnde manifeſtum eſt has duas ſolutiones a ſe inuicem non differre.

23. Speciales autem ſolutiones, quae ex hac formula primo intuitu deriuantur ſunt ſequentes

a	b	m	n	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{r}$
0	1	-1	-2	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$
4	3	1	-2	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$
12	5	7	2	$\frac{74}{59}$	$\frac{59}{21}$

quarum binae priores ſcopo noſtro non conueniunt, tertia vero idoneam praebet ſolutionem atque adeo ab illa, quam olim iam inueni diuerſam; quum enim ſit $pp + ss = 8957 = 53 \cdot 169$ et $qq + rr = 3922 = 53 \cdot 74$ erunt ambo quaeſiti numeri

$$A = \frac{16 \cdot 53^2 \cdot 74}{4 \cdot 74 \cdot 59^2 \cdot 21} = \frac{16c \cdot 53^2}{4 \cdot 21 \cdot 59^2}$$
$$B = \frac{169 \cdot 74 \cdot 53^2}{2 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19^2} = \frac{169 \cdot 37 \cdot 53^2}{16 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19^2}.$$

24. Conſideremus autem attentius hanc formulam: $(4b - 2a)(4b - 3a) = \square$ et quia numeri a et b, ſunt catheti trianguli rectanguli, atque euidens eſt, pro a ſumi debere parem pro b vero imparem, ſtatuamus $a = 2de$ et $b = dd - ee$, vt ſit hy-

 pothenuſa

pothenuſa $c = dd + ee$, tum vero erit $4b - 2a = 4(dd - de - ee)$ et $4b - 3a = 4dd - 6de - 4ee$, quorum productum quum quadratum eſſe debeat, neceſſe eſt, vt vtriusque quadrans ſiat quadratum, hoc eſt

I°. $dd - de - ee = \square$

II°. $dd - \frac{3}{2}de - ee = \square$,

vbi quum numerorum d et e alter debeat eſſe par, alter impar, etiam poſterior numeris integris conſtat. Quod autem ad priorem attinet, quum ſit $dd - de - ee = (d - \frac{1}{2}e)^2 - 5\frac{e^2}{2}$, ponamus $d - \frac{1}{2}e = rr + 5ss$ et $\frac{1}{2}e = 2rs$, tum enim fiet $dd - de - ee = (rr - 5ss)^2$; at vero habebimus $e = 4rs$ et $d = rr + 2rs + 5ss$ hincque $dd - ee = r^4 + 4r^3s - 2rrss + 20rs^3 + 25.s^4$ et $de = 4r^3s + 8rrss + 20rs^3$, vnde altera conditio poſtulat: $r^4 - 2r^3s - 14rrss - 10rs^3 + 25s^4 = \square$.

25. Statuamus hic $\frac{r}{s} = z$, vt habeamus hanc cormulam $z^4 - 2z^3 - 14zz - 10z + 25 = \square$, quae ſum formula ſupra data (15) comparata praebet: $\alpha = \pm 1$; $\beta = 1$; $\gamma = -14$; $\delta = 5$; $\varepsilon = \pm 5$, vnde pro z quatuor ſequentes expreſſiones elicimus

I°. $z = \frac{2\alpha(\varepsilon - 5.\alpha)}{2\alpha^3\varepsilon + 1 + 14} = \frac{2\alpha(\varepsilon - 5\alpha)}{2\alpha^3\varepsilon + 15} = \frac{2(\alpha\varepsilon - 5)}{2\alpha\varepsilon + 15}$

hinc vel $z = 0$; vel $z = -4$

II. $z = \frac{50.\alpha\varepsilon + 375}{2(5\alpha\varepsilon - 25)} = \frac{10.\alpha\varepsilon + 75}{2(\alpha\varepsilon - 5)}$ hincque

vel $z = \infty$; vel $z = -\frac{5}{4}$

III°. $z = \frac{(2\alpha\varepsilon - 14 - 1)(2\alpha\varepsilon + 14 + 1)}{4(10 + 14 + 1)} = -\frac{125}{100} = -\frac{5}{4}$.

IV°.

$$\text{IV}^{\circ}.\; z = \frac{100\,(1250 + 70.\,25 + 5.\,25)}{(50.\,\alpha\varepsilon - 15.\,25)(50.\,\alpha\varepsilon + 15.\,25)}$$
$$= \frac{4.\,25^2\;125}{25^2(2\,\alpha\varepsilon + 15)(2\,\alpha\varepsilon - 15)} = -\,4.$$

Ex valore $z = -4$ oriuntur valores $r = 4$; $s = -1$; $d = 13$; $e = -16$ hincque $a = 416$ et $b = 87$, vnde oritur $\frac{p}{s} = \frac{23362}{27859}$, et $\frac{q}{r} = \frac{25850}{10199}$; at ex valore $z = -\frac{5}{4}$, habemus $r = 5$; $s = -4$; $d = 65$; $e = -80$, qui per quinarium ad terminos minores reducti praebent vt ante, $d = 13$ et $e = -16$, vbi notaſſe iuuabit ex his valoribus a et b praegrandes numeros pro p, q, r, s eſſe prodituros.

26. At circa binas illas formulas notaſſe iuvabit, vtramque etiam quadrato negatiuo aequari poſſe, verum tum ſolutio eadem exſurgit, niſi quod valores pro a et b fiant negatiui. Ceterum hic notari conuenit, vltimae aequationi etiam valorem $z = -3$ ſatisfacere; etiamſi eum non per methodum conſuetam detexerimus, inde autem fit $r = 3$ et $s = -1$; hincque porro $d = 2$ et $e = -3$; vnde fit $a = -12$ et $b = -5$, quem caſum iam ſupra euoluimus.

II. Si fuerit $(3b + a)(7b + a) = \square$.

27. Hic ſtatim apparet ſumi debere $a = dd - ee$ et $b = 2de$, vt fiat $c = dd + ee$ tum ergo ſequentes duae formulae quadrata eſſe debent $dd + 6\,de - ee = \square$ et $dd + 14\,de - ee = \square$. Quum prior ſit $= (d + 3e)^2 - 10\,ee$; ſi ponamus $\zeta\eta = 10$, ac ſtatuamus $d + 3e = \zeta rr + \eta ss$ et $e = 2rs$ fiet illa formula

 $= (\zeta\zeta$

$= (\zeta\zeta rr - \eta ss)^2$, tum autem erit $d = \zeta rr - 6rs + \eta ss$ et $e = 2rs$; hinc ergo pro altera formula, quae eſt $(d+7e)^2 - 50.ee$, erit $d+7e = \zeta rr + 8rs + \eta ss$ ideoque haec formula abit in $\zeta\zeta r^4 + 16\zeta r^3 s - 116 rrss + 16\eta rs^3 + \eta\eta s^4 = \square$, vnde per methodum ſupra indicatam infinitae ſolutiones inueniri poſſunt; vbi notaſſe iuuabit eſſe vel $\zeta = 1$ et $\eta = 10$, vel $\zeta = 2$ et $\eta = 5$.

28. Quum autem idonei valores pro a et b fuerint inuenti, duplici modo inde litterae t et u definiri poterunt. Priore modo fit $t = a - b$ et $u = a + b$, hinc $m = t - u = -2b$ et $n = -a - 3b$, ideoque $p = mm + (m-n)^2 = aa + 2ab + 5bb$; $q = s = mm + n(m-n) = -aa - 4ab + bb$ et $r = m(m-2n) = -4b(a+2b)$ ita vt ſit

$$\frac{p}{s} = \frac{aa+2ab+5bb}{aa+4ab-bb}; \quad \text{et } \frac{q}{r} = \frac{aa+4ab-bb}{4b(a+2b)}.$$

Poſteriore vero modo fit $t = 3a + b$ et $u = a - 3b$, vnde $m = 2a + 4b$ et $n = a + 7b$, hincque porro ob $m - n = a - 3b$, fit $p = 5(aa + 2ab + 5bb)$

$$q = s = 5(aa + 4ab - bb) \quad \text{et} \quad r = 5.4b(a+2b)$$

ſicque patet hunc poſteriorem caſum ad priorem redire.

29. Simpliciores autem ſolutiones, quas facili negotio diuinando elicere licet ſunt ſequentes:

a	b	m	n	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{r}$
1	0	−0	−1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{0}$
−3	4	−8	−9	$\frac{13}{11}$	$\frac{11}{16}$
−35	12	−24	−1	$\frac{1105}{699}$	$\frac{599}{528}$.

Hic

Hic ſecundus caſus praebet illam ipſam ſolutionem, quam iam olim dederam. His autem duabus formulis pertractatis adiungamus inſuper binas poſtremas ſupra (20) inuentas.

III. *Si fuerit* $2a(11a + 2b) = \square$.

30. Caſus ſimpliciores, qui ſtatim ſe offerunt ſunt:

a	b	m	n	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{r}$
0	1	1, 1	0, 0	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$
4	3	15, 3	20, 4	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$
16	-63	$-15, -3$	80, 16	$\frac{74}{59}$	$\frac{59}{21}$

vbi ex datis a et b, fit $t = a + 2b$ et $u = b - 2a$ hincque, vt ante $m = t - u = 3a + b$ et $n = t - 2u = 5a$. Hae ſolutiones autem iam in ſuperioribus continentur.

IV. *Si fuerit* $(a - b)(13a - 9b) = \square$.

31. Inuentis idoneis valoribus pro a et b, erit $t = 3a + b$ et $u = 3b - a$, hinc $m = 4a - 2b = 2(2a - b)$ et $n = 5(a - b)$, atque ob $m - n = 3b - a$, atque $m - 2n = 2(4b - 3a)$ habebimus $\frac{p}{s} = \frac{17aa - 22ab + 13bb}{11aa + 4ab - 11bb}$ et $\frac{q}{r} = \frac{11aa + 4ab - 11bb}{4(6aa - 11ab + 4bb)}$. Solutiones autem ſimpliciores hinc oriundae ſunt

a	b	m	n	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{r}$
0	1	-2	-5	$\frac{13}{11}$	$\frac{11}{16}$
4	$+3$	10, 2	5, 1	$\frac{1}{1}$	1/[illegible]

vbi

vbi memoratu dignum euenit, quod ſtatim primum tentamen quo $a = c$ et $b = 1$, praebeat ſolutionem iam dudum inuentam.

32. Quod ſi pro vlteriore huius formulae euolutione ponamus $a = 2de$ et $b = dd - ee$, fiet $a - b = ee + 2de - dd$ ſiue mutandis ſignis, vt $(b - a)(9b - 13a) = \square$, erit $b - a = dd - 2de - ee$ et $9b - 13a = 9dd - 26.de - 9ee$, reddamus nunc priorem quadratum, quae quum ſit $(d - e)^2 - 2ee$, ſtatuamus $d - e = rr + 2ss$ et $e = 2rs$, tum enim fiet $dd - 2de - ee = (rr - 2ss)^2$, tum vero alter factor ob $dd - ee = r^4 + 4r^3s + 8rrss + 8rs^3 + 4s^4$, erit $9r^4 - 16r^3s - 68rrss - 32rs^3 + 36.s^4$, vbi caſus primo intuitu ſe offerentes ſunt 1°. $r = 1$, $s = 0$, 2°. $r = 0$, $s = 1$, 3^{tio}. $r = 1$ et $s = -1$, 4to. $r = 2$ et $s = -1$; 5to. $r = 1$ et $s = 2$.

33. Pro horum caſuum primo habemus $d = 1$ et $e = 0$; hinc $a = 0$ et $b = 1$, qui iam occurrit, pro ſecundo habemus $d = 2$ et $e = 0$, hinc $a = 0$ et $b = 1$, qui a praecedente non differt. At pro tertio habemus $d = 1$ et $e = -2$, hinc $a = -4$ et $b = -3$, qui ſupra iam eſt tractatus, pro quarto habemus $d = 2$ et $e = -4$ ſiue $d = 1$ et $e = -2$, vnde fit $a = -4$ et $b = -3$ vt praecedens, pro quinto denique habemus $d = 13$ et $e = 4$, hinc $a = 104$ et $b = 153$, ex quibus numeri praegrandes pro quaeſitis A et B reſultant, quibus non immoramur.

34.

34. Imprimis autem quoque notatu dignus eſt caſus, quo inuenimus $\frac{p}{s} = \frac{2}{1}$ et $\frac{q}{r} = \frac{1}{3}$, ſiue $\frac{q}{r} = \frac{3}{1}$, vnde deducuntur numeri quaeſiti $A = \frac{25}{12}$ et $B = \frac{25}{12}$ ita vt ambo numeri quaeſiti hoc caſu fiant aequales, quod quidem ſcopo problematis minus conuenit. Si enim numeri aequales deſiderentur ob eorum differentiam euaneſcentem quaeſtio huc rediret, vt inueniatur numerus A, ita vt tam $AA + 2A$, quam $AA - 2A$ fiat quadratum, quod quidem eſt facillimum, ſtatuatur enim $AA = \frac{aa+bb}{nn}$ et $2A = \frac{2ab}{nn}$, fiet vtique $\surd(AA + 2A) = \frac{a+b}{n}$ et $\surd(AA - 2A) = \frac{a-b}{n}$; verum nunc requiritur vt $aa + bb$ ſit quadratum, quem in finem ponamus, $a = pp - qq$ et $b = 2pq$, vt fiat $A = \frac{pp+qq}{n}$, eſt vero etiam $A = \frac{2pq(pp-qq)}{nn}$ vnde fit $n(pp+qq) = 2pq(pp-qq)$ et $n = \frac{2pq(pp-qq)}{pp+qq}$, ita vt numerus quaeſitus in genere ſit $A = \frac{(pp+qq)^2}{2pq(pp-qq)}$, tales ergo numeri ſunt ſequentes: $A = \frac{25}{12}$; 2°. $A = \frac{169}{60}$; 3°. $A = \frac{289}{120}$; 4°. $A = \frac{625}{168}$ etc.

35. Pro ſolutionibus autem ad quaeſtionem propoſitam accommodatis, duae in numeris non nimis magnis notatu dignae videntur, quarum prior eſt ea ipſa, quam iam dudum inueni, qua erat $A = \frac{13 \cdot 29^2}{8 \cdot 9^2}$ et $B = \frac{5 \cdot 29^2}{32 \cdot 11^2}$, ſiue $A = \frac{10933}{648}$ et $B = \frac{4205}{3872}$

vnde $\surd(AB + A + B) = \frac{7 \cdot 29 \cdot 37}{16 \cdot 9 \cdot 11}$

$\surd(AB + A + B) = \frac{29^2}{16 \cdot 3 \cdot 11}$

$\surd(AB - A + B) = \frac{29^2}{16 \cdot 9}$

$\surd(AB - A - B) = \frac{29}{48}$.

Pro

Pro altera vero ſolutione orta ex valoribus:

$\frac{p}{s} = \frac{74}{59}$ et $\frac{q}{r} = \frac{59}{21}$ obtinemus:

$A = \frac{13^2 . 53^2}{4 . 21 . 59^2}$ et $B = \frac{13^2 . 37 . 53^2}{16 . 3 . 5^2 . 7 . 19^2}$

vnde $\sqrt{(AB + A + B)} = \frac{13 . 53}{8 . 3 . 7}$

$\sqrt{(AB + A - B)} = \frac{13 . 53^2}{8 . 3 . 5 . 7 . 19}$

$\sqrt{(AB - A + B)} = \frac{13 . 53^2}{8 . 3 . 7 . 59}$

$\sqrt{(AB - A - B)} = \frac{13 . 41 . 47 . 53}{8 . 3 . 5 . 7 . 19 . 59}$.

OBSER-

OBSERVATIONES
CIRCA RADICES AEQVATIONVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Si habeatur aequatio algebraica cuiuſuis gradus ad rationalitatem perducta:

$$x^m = Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + Ex^{m-5} + \text{etc.}$$

quam etiam hac forma exhibere licet

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \text{etc.}$$

ac ponatur

$\int x =$ ſummae omnium radicum
$\int x^2 =$ ſummae quadratorum earundem radicum
$\int x^3 =$ ſummae cuborum
$\int x^4 =$ ſummae biquadratorum
et ita porro;

notum eſt has ſummas ita a ſe inuicem et a litteris A, B, C, D, E etc. pendere vt ſit:

$$\int x = A$$
$$\int x^2 = A\int x + 2B$$
$$\int x^3 = A\int x^2 + B\int x + 3C$$
$$\int x^4 = A\int x^3 + B\int x^2 + C\int x + 4D$$
$$\int x^5 = A\int x^4 + B\int x^3 + C\int x^2 + D\int x + 5E$$
etc.

 II.

II.

Ex hac ergo progreſſionis lege ſingulae hae ſummae poteſtatum ita ſe habebunt euolutae:

$$\int x = A$$

$$\int x^2 = A^2 + 2B$$

$$\int x^3 = A^3 + 3AB + 3C$$

$$\begin{aligned} \int x^4 = A^4 + 4A^2B + 4AC &+ 4D \\ + 2B^2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^5 = A^5 + 5A^3B + 5A^2C &+ 5AD + 5E \\ + 5AB^2 &+ 5BC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^6 = A^6 + 6A^4B + 6A^3C &+ 6A^2D + 6AE + 6F \\ + 9A^2B^2 &+ 12ABC + 6BD \\ &+ 2B^3 \quad + 3CC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^7 = A^7 + 7A^5B + 7A^4C &+ 7A^3D + 7A^2E + 7AF + 7G \\ + 14A^3B^2 &+ 21A^2BC + 14ABD + 7BE \\ &+ 7AB^3 + 7AC^2 + 7CD \\ &+ 7B^2C \end{aligned}$$

vlterius has formas non continuandas eſſe arbitror, cum harum contemplatio ſufficiat, ad legem qua ſingulae formantur explorandam.

III.

Vt ordinem quo in his formis ſingulae litterae A, B, C, D, E etc. inter ſe componuntur, facilius perſpiciamus, litterae A tribuamus vnam dimenſionem, litterae B duas, litterae C tres, litterae

rae D quatuor et ita porro, atque manifeſtum eſt in qualibet forma nonniſi eiusmodi occurrere terminos in quibus dimenſionum numerus ſit exponenti poteſtatum radicum, quarum ſumma exhibetur, aequalis. Ita in forma $\int x^7$ ſinguli termini continent ſeptem dimenſiones, atque adeo omnes termini per mutuam combinationem ſeptem dimenſiones adimplentes in ea reperiuntur, quod etiam de omnibus formis eſt tenendum. Imprimis autem obſeruari conuenit, alias litterarum A, B, C, D etc. poteſtates in has formas non ingredi, niſi quarum exponentes ſint numeri integri et poſitiui, vnde pro quauis poteſtate ſummatoria omnes termini eam conſtituentes ex litterarum A, B, C, D etc. combinatione aſſignantur, quorum quidem numerus ſemper eſt finitus etiamſi ipſa aequatio propoſita in infinitum excurrat.

IV.

Cum igitur pro quauis poteſtate ipſi termini, quatenus ex litteris A, B, C, D etc. conflantur, nullam inuoluant difficultatem, totum negotium ad vncias numericas quibus ſinguli termini ſunt affecti, reducitur. Ad indolem autem harum vnciarum explorandam, ſepoſita prima littera A terminos ſecundum reliquas litteras B, C, D, E etc. ita in ordines diſponi conueniet, vt in primo harum litterarum nulla, in ſecundo ordine ſingulae tantum, in tertio vero binae, in quarto ternae et ita porro reperiantur, hoc modo:

 $\int x = A$

$$\int x = A$$

$$\int x^2 = A^2 + 2B$$

$$\begin{aligned} \int x^3 = A^3 &+ 3AB \\ &+ 3C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^4 = A^4 &+ 4A^2B + 2BB \\ &+ 4AC \\ &+ 4D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^5 = A^5 &+ 5A^3B + 5ABB \\ &+ 5A^2C + 5BC \\ &+ 5A^2D \\ &+ 5E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^6 = A^6 &+ 6A^4B + 9A^2BB + 2B^3 \\ &+ 6A^3C + 12ABC \\ &+ 6A^2D + 6BD \\ &+ 6AE + 3CC \\ &+ 6F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^7 = A^7 &+ 7A^5B + 14A^3BB + 7AB^3 \\ &+ 7A^4C + 21A^2BC + 7B^2C \\ &+ 7A^3D + 14ABD \\ &+ 7A^2E + 7ACC \\ &+ 7AF + 7BE \\ &+ 7G + 7CD \end{aligned}$$

$\int x^8 =$

$$\begin{aligned}\int x^8 = A^8 &+ 8A^6B + 20A^4BB + 16A^2B^3 + 2B^4\\ &+ 8A^5C + 32A^3BC + 24AB^2C\\ &+ 8A^4D + 24A^2BD + 8B^2D\\ &+ 8A^3E + 12A^2CC + 8BC^2\\ &+ 8A^2F + 16ABE\\ &+ 8AG + 16ACD\\ &+ 8H \quad + 8BF\\ &\qquad\quad + 8CE\\ &\qquad\quad + 4DD.\end{aligned}$$

V.

In cuiusque formae ordine primo et ſecundo nulla plane occurrit difficultas, nullumque eſt dubium, quin pro forma $\int x^n$ ſit primus terminus A^n, ſecundus vero ordo ex his conſtet terminis

$$nA^{n-2}B + nA^{n-3}C + nA^{n-4}D + nA^{n-5}E + \text{etc.}$$

ſequentium vero ordinum ratio minus eſt manifeſta. Hanc autem circumſtantiam perpendentes, quod exponens n in omnes quoque ſequentes vncias tanquam factor ingrediatur: deinde etiam quod quaelibet litterarum B, C, D, E etc. combinationes, ſimul permutationum numerum inuoluant, prouti in polynomii poteſtatibus occurrunt; ſi in ſingulis terminis hos binos factores ſeorſim exhibeamus leui adhibita attentione deprehendemus, in genere has formas ita expreſſum iri.

Ordo

Ordo I. *Ordo II.* *Ordo III.*

$$\int x^n = A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}A^{n-4}BB$$
$$+ nA^{n-3}C + \frac{n(n-4)}{1\cdot 2}A^{n-5}\,2BC$$
$$+ nA^{n-4}D + \frac{n(n-5)}{1\cdot 2}A^{n-6}(2BD+CC)$$
$$+ nA^{n-5}E + \frac{n(n-6)}{1\cdot 2}A^{n-7}(2BE+2CD)$$
$$+ nA^{n-6}F + \frac{n(n-7)}{1\cdot 2}A^{n-8}(2BF+2CE+DD)$$
$$+ nA^{n-7}G + \frac{n(n-8)}{1\cdot 2}A^{n-9}(2BG+2CF+2DE)$$

etc. etc.

Ordo IV.

$$+ \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-6}B^3$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-7}\,3B^2C$$
$$+ \frac{n(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-8}(3B^2D+3BC^2)$$
$$+ \frac{n(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-9}(3B^2E+6BCD+C^3)$$
$$+ \frac{n(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-10}(3B^2F+6BCE+3BDD+3CCD$$

etc.

Ordo V.

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-8}B^4$$
$$+ \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-9}\,4B^3C$$
$$+ \frac{n(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-10}(4B^3D+6B^2C^2)$$
$$+ \frac{n(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-11}(4B^3E+12B^2CD+4BC^3)$$
$$+ \frac{n(n-9)(n-10)(n-11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n-12}(4B^3F+12B^2CE+6B^2D^2$$
$$+12BC^2D+C^4)$$

etc.

Ordo

Ordo VI.

$$+\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}A^{n-10}B^5$$
$$+\frac{n(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}A^{n-11}\,5\,B^4C$$
$$+\frac{n(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}A^{n-12}(5\,B^4D+10\,B^3C^2)$$
$$+\frac{n(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}A^{n-13}(5B^4E+20\,B^3CD+10\,B^2C^3)$$
$$+\frac{n(n-10)(n-11)(n-12)(n-13)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}A^{n-14}(5\,B^4F+20\,B^3CE+10\,B^3D^2$$
$$+30\,B^2C^2D+5\,BC^4)$$

etc.

VI.

Hinc ordinem quemcunque in genere euoluere licebit, ſit enim index ordinis $\lambda+1$ ſtatuanturque membra huius ordinis;

$$+\frac{n(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ \lambda}A^{n-2\lambda}.\,O$$
$$+\frac{n(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)\ldots(n-2\lambda)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ \lambda}A^{n-2\lambda-1}.\,P$$
$$+\frac{n(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)\ldots(n-2\lambda-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ \lambda}A^{n-2\lambda-2}.\,Q$$
$$+\frac{n(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)(n-\lambda-6)\ldots(n-2\lambda-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ \lambda}A^{n-2\lambda-3}.\,R$$

etc.

atque valores litterarum O, P, Q, R etc. ita ſe habebunt, vt ſit

$$O+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{etc.}=(B+Cz+Dz^2+Ez^3\ \text{etc.})^\lambda$$

vnde euolutione facta colligimus:

$$O = B^{\lambda}$$

$$P = \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{OC}{B}$$

$$Q = \frac{2\lambda}{2} \cdot \frac{OD}{B} + \frac{\lambda - 1}{2} \cdot \frac{PC}{B}$$

$$R = \frac{3\lambda}{3} \cdot \frac{OE}{B} + \frac{2\lambda - 1}{3} \cdot \frac{PD}{B} + \frac{\lambda - 2}{3} \cdot \frac{QC}{B}$$

$$S = \frac{4\lambda}{4} \cdot \frac{OF}{B} + \frac{3\lambda - 1}{4} \cdot \frac{PE}{B} + \frac{2\lambda - 2}{4} \cdot \frac{QD}{B} + \frac{\lambda - 3}{4} \cdot \frac{RC}{B}$$

$$T = \frac{5\lambda}{5} \cdot \frac{OG}{B} + \frac{4\lambda - 1}{5} \cdot \frac{PF}{B} + \frac{3\lambda - 2}{5} \cdot \frac{QE}{B} + \frac{2\lambda - 3}{5} \cdot \frac{RD}{B} + \frac{\lambda - 4}{5} \cdot \frac{SC}{B}$$

ſiue valoribus iam inuentis ſubſtituendis

$$O = B^{\lambda}$$

$$P = \lambda B^{\lambda - 1} C$$

$$Q = \lambda B^{\lambda - 1} D + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda - 2} C^2$$

$$R = \lambda B^{\lambda - 1} E + \frac{2\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda - 2} CD + \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B^{\lambda - 3} C^3$$

$$S = \lambda B^{\lambda - 1} F + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda - 2}(2CE + DD) + \frac{3\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B^{\lambda - 3} C^2 D + \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B^{\lambda - 4} C^4$$

etc.

VII.

De hac autem forma generali probe eſt tenendum, ea ſummam ſingularum radicum ad dignitatem n eleuatarum neutiquam exprimi, niſi primo exponens n ſit numerus integer poſitiuus, tum vero ex forma generali quae in infinitum excurrit, omnes termini excludantur in quibus littera A exponentem negatiuum eſſet adeptura. Hinc quaeſtio oritur maximi momenti, quinam futurus ſit valor huius formae genera-

generalis, ſi omnes termini in infinitum retineantur? idque ſiue exponens n fuerit ſiue poſitiuus, ſiue negatiuus, ſiue integer ſiue fractus? Hanc igitur quaeſtionem quoniam inde ſpeculationes maxime notatu dignae et in doctrina ſerierum nouam quandam lucem accendentes oriuntur, hic accuratius euoluendam ſuſcepi. Oſtendam autem hac forma generali non ſummam poteſtatum exponentis n, quae ex ſingulis radicibus formantur, ſed potius poteſtatem ſimilem vnius duntaxat radicis eiusque maximae exprimi.

VIII.

Quo hanc inueſtigationem ſimpliciorem reddam a caſu huius aequationis $1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{xx}$ inchoabo, ita vt litterae C, D, E etc. omnes euaneſcant: pro hoc ergo caſu forma noſtra generalis, in cuius valorem inquirimus, erit

$$A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1.2}A^{n-4}B^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}A^{n-6}B^3 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}A^{n-8}B^4 + \text{etc.}$$

Ponamus primo $n = 1$, et ſit valor ſeriei $= s$ vt ſit

$$s = A + \frac{B}{A^1} - \frac{2}{2}.\frac{B^2}{A^3} + \frac{3.4}{2.3}.\frac{B^3}{A^5} - \frac{4.5.6}{2.3.4}.\frac{B^4}{A^7} + \text{etc.}$$

quae reuocatur ad hanc formam;

$$s = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}.\frac{2B}{A} - \frac{1.1}{2.4}.\frac{8B^2}{A^3} + \frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{32B^3}{A^5} - \text{etc.}$$

cuius ſeriei ſumma manifeſto eſt

$$s = \tfrac{1}{2}A + \sqrt{(\tfrac{1}{4}AA + B)}$$

quae eſt aequationis propoſitae radix maior. Tum vero iam conſtat illius ſeriei generalis valorem eſſe $= (\frac{1}{2}A + \sqrt{(\frac{1}{4}AA + B)})^n$: ex quo nullum amplius

 ſupereſt

ſupereſt dubium, quin illa forma generalis poteſtatem exponentis n vnius tantum radicis aequationis, eiusque maioris exprimat, hoc ſaltem caſu.

IX.

In genere autem eadem concluſio hoc modo confici poterit. Denotet $s^{(n)}$ totam illam expreſſionem generalem §. V. exhibitam et in infinitum extenſam, ſintque $s^{(n-1)}$, $s^{(n-2)}$, $s^{(n-3)}$ etc. eiusdem valores, ſi loco n ſcribatur $n-1$, $n-2$, $n-3$ etc. atque ex geneſi illius expreſſionis intelligitur fore

$$s^{(n)}=A\,s^{(n-1)}+B\,s^{(n-2)}+C\,s^{(n-3)}+D\,s^{(n-4)}+\text{etc.}$$

verum ex ipſa aequatione propoſita eſt quoque

$$x^m=A\,x^{m-1}+B\,x^{m-2}+C\,x^{m-3}+D\,x^{m-4}+\text{etc.}$$

vnde ſi hae duae aequationes ſequenti modo repraeſententur:

$$1=\frac{A\,s^{(n-1)}}{s^{(n)}}+\frac{B\,s^{(n-2)}}{s^{(n)}}+\frac{C\,s^{(n-3)}}{s^{(n)}}+\frac{D\,s^{(n-4)}}{s^{(n)}}+\text{etc. et}$$

$$1=\tfrac{A}{x}+\tfrac{B}{x^2}+\tfrac{C}{x^3}+\tfrac{D}{x^4}+\text{etc.}$$

quoniam hoc valet pro omnibus numeris n, ſequitur fore:

$$s^{(n)}=x\,s^{(n-1)}=x^2\,s^{(n-2)}=x^3\,s^{(n-3)}=x^4\,s^{(n-4)}\ \text{etc.}$$

Cum igitur poſito $n=0$, ſit $s^{(0)}=A^0=1$, erit pro n ſcribendo ſucceſſiue numeros 1, 2, 3, 4 etc.

$$s^{(1)}=x;\quad s^{(2)}=x^2;\quad s^{(3)}=x^3;\quad s^{(4)}=x^4;$$

Quare

Quare euictum eſt in genere fore $s^{(n)} = x^n$; hic autem pro x ſumi debere aequationis propoſitae radicem maximam, inde patet, quod ſumto exponente n infinito, quo caſu formae noſtrae pars integra ab vniuerſa non eſt cenſenda discrepare, ſumma poteſtatum infiniteſimarum ad poteſtatem infiniteſimam radicis maximae ſolam reducitur.

X.

En ergo theorema notatu digniſſimum, vſumque habiturum ampliſſimum, quod propoſita aequatione quacunque huius formae:

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \text{etc.}$$

cuius radix maxima ſit $x = m$, expreſſionis ſupra §. V. exhibitae et in infinitum continuatae valor ſit m^n. Quare ſi ſumatur $n = 1$, eadem expreſſio ipſam radicem maximam exprimet; vbi imprimis omni attentione dignum occurrit, quod omnes poteſtates eiusdem radicis per ſimiles expreſſiones infinitas exprimantur; quin etiam ponendo $n = 0$ ob $\frac{m^0 - A^0}{0} = l\frac{m}{A}$, logarithmus hyperbolicus maximae radicis m hoc modo exprimetur:

$$\begin{aligned} lm = lA &+ \frac{B}{A^2} - \frac{3\, B^2}{2\, A^4} && + \frac{4.\,5.\,B^3}{2.\,3\,A^6} \\ &+ \frac{C}{A^3} - \frac{4.\,2\,BC}{2\,A^5} && + \frac{5.\,6.\,3\,B^2C}{2.\,3\,A^7} \\ &+ \frac{D}{A^4} - \frac{5(2BD + CC)}{2\,A^6} && + \frac{6.\,7\,(3B^2D + 3BC^2)}{2.\,3\,A^8} \\ &+ \frac{E}{A^5} - \frac{6(2BE + 2CD)}{2\,A^7} && + \frac{7.\,8\,(3B^2E + 6BCD + C^3)}{2.\,3\,A^9} \\ &\qquad \text{etc.} && \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

 XI.

XI.

Quoniam ergo hinc cuiusque aequationis radicem maximam non ſolum ipſam, ſed etiam eius quamcunque poteſtatem per ſeries infinitas commode exprimere licet, hinc primum pulcherrimam illam ſeriem, quam ſagaciſſimi ingenii vir *Lambertus* in Actorum Helueticorum volumine IV. pro reſolutione aequationum ex tribus tantum terminis conſtantium tradidit, deducere licet. Quemadmodum enim ſupra aequatio haec $1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$ dederat

$$x^n = A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1.\ 2}A^{n-4}B^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-6}B^3 + \text{etc.};$$

ita haec aequatio $1 = \frac{A}{x} + \frac{C}{x^3}$ dabit

$$x^n = A^n + nA^{n-3}C + \frac{n(n-5)}{1.\ 2}A^{n-6}C^2 + \frac{n(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-9}C^3 + \text{etc.}$$

haecque aequatio $1 = \frac{A}{x} + \frac{D}{x^4}$

$$x^n = A^n + nA^{n-4}D + \frac{n(n-7)}{1.\ 2}A^{n-8}D^2 + \frac{n(n-10)(n-11)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-12}D^3 + \text{etc.}$$

ita concludimus pro hac aequatione $1 = \frac{A}{x} + \frac{M}{x^m}$ fore

$$x^n = A^n + nA^{n-m}M + \frac{n(n-2m+1)}{1.\ 2}A^{n-2m}M^2 + \frac{n(n-3m+2)(n-3m+1)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-3m}M^3 + \text{etc.}$$

Statuamus nunc $x = y^\lambda$ et $x^m = y^\mu$, tum vero pro M ſcribamus B et $\frac{n}{\lambda}$ loco n, atque ob $m = \frac{\mu}{\lambda}$ pro reſolutione huius aequationis generalis $1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$ habebimus:

$y^n = A$

$$y^n = A^{\frac{n}{\lambda}} + \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\mu}{\lambda}} B + \frac{n(n+\lambda-2\mu)}{1\cdot 2\,\lambda^2} A^{\frac{n-2\mu}{\lambda}} B^2 + \frac{n(n+2\lambda-3\mu)(n+\lambda-3\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\,\lambda^3} A^{\frac{n-3\mu}{\lambda}} B^3$$

$$+ \frac{n(n+3\lambda-4\mu)(n+2\lambda-4\mu)(n+\lambda-4\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,\lambda^4} A^{\frac{n-4\mu}{\lambda}} B^4 + \text{etc.}$$

XII.

Si igitur aequationis $1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$ radix ipſa deſideretur y, poni oportet $n = 1$, ac fiet:

$$y = A^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} A^{\frac{1-\mu}{\lambda}} B + \frac{1+\lambda-2\mu}{2\,\lambda^2} A^{\frac{1-2\mu}{\lambda}} B^2 + \frac{(1+2\lambda-3\mu)(1+\lambda-3\mu)}{2\cdot 3\,\lambda^3} A^{\frac{1-3\mu}{\lambda}} B^3$$

$$+ \frac{(1+3\lambda-4\mu)(1+2\lambda-4\mu)(1+\lambda-4\mu)}{2\cdot 3\cdot 4\,\lambda^4} A^{\frac{1-4\mu}{\lambda}} B^4 + \text{etc.}$$

quae eſt ipſa ſeries *Lamberti* loco allegato exhibita eoque magis notatu digna videtur, quod coefficientium lex ſatis quidem eſt regularis, verumtamen ita comparata, vt ſi ſeries ipſa proponatur, nulla pateat via eius ſummam inueſtigandi; quod eo magis eſt mirum, quod nihilominus huius ſeriei ſumma non ſolum conſtat, ſed adeo algebraice exhiberi poteſt, cum ſit vna radicum huius aequationis $1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$, eaque maxima. Deinde vero huius ſeriei proprietas maximi ſine dubio eſt momenti, quod omnes eius poteſtates ſimilibus ſeriebus exprimantur.

XIII.

Indolem harum ſingularium ſerierum e re erit in aliquot exemplis perſpexiſſe. Sumamus ergo $\lambda = 3$

et

et $\mu = 2$ vt habeamus hanc aequationem cubicam $y^3 = A + By$, cuius propterea vna radicum erit:

$$y = A^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3} \cdot A^{-\frac{1}{3}} B + 0 A^{-1} B^2 - \tfrac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} A^{-\frac{5}{3}} \left(\tfrac{B}{3}\right)^3 + \tfrac{4 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} A^{-\frac{7}{3}} \left(\tfrac{B}{3}\right)^4$$

$$- \tfrac{6}{2} \cdot - \tfrac{3}{3} \cdot \tfrac{0}{4} \tfrac{3}{5} A^{-3} \left(\tfrac{B}{3}\right)^5 \tfrac{-8}{2} \cdot \tfrac{-5}{3} \cdot \tfrac{-2}{4} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{4}{6} A^{-\frac{11}{3}} \left(\tfrac{B}{3}\right)^6 \text{ etc.}$$

quae expreſſio quo clarior reddatur ſumamus $A = a^3$ et $B = 3b$ vt prodeat huius aequationis $y^3 = 3by + a^3$ radix

$$y = a + \frac{b}{a} + \frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{a^7} + \frac{10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{b^7}{a^{13}} + \frac{16 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot \frac{b^{10}}{a^{19}} \text{ etc.}$$

$$- \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^5} - \frac{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{b^6}{a^{11}} - \frac{14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \cdot \frac{b^9}{a^{17}} - \frac{20 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} \cdot \frac{b^{12}}{a^{23}} - \text{etc.}$$

quae ita concinnius repraeſentatur;

$$y = a + \frac{b}{a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{b^4}{a^7} + \frac{1}{3} \frac{7 \cdot 10}{6 \cdot 7} \cdot \frac{b^7}{a^{13}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 10}{6 \cdot 7} \cdot \frac{13 \cdot 16}{9 \cdot 10} \cdot \frac{b^{10}}{a^{19}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 10}{6 \cdot 7} \cdot \frac{13 \cdot 16}{9 \cdot 10} \cdot \frac{19 \cdot 22}{12 \cdot 13} \cdot \frac{b^{13}}{a^{25}}.$$

$$- \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3}{a^5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 8}{5 \cdot 6} \cdot \frac{b^5}{a^{11}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 8}{5 \cdot 6} \cdot \frac{11 \cdot 14}{8 \cdot 9} \cdot \frac{b^9}{a^{17}} - \frac{1}{3} \frac{5 \cdot 8}{5 \cdot 6} \cdot \frac{11 \cdot 14}{8 \cdot 9} \cdot \frac{17 \cdot 20}{11 \cdot 12} \cdot \frac{b^{12}}{a^{23}} \text{ etc.}$$

XIV.

Hae ſeries accuratiorem euolutionem merentur, ponamus ergo pro priore

$$s = x + \tfrac{1}{3} x^4 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{7 \cdot 10}{6 \cdot 7} x^7 + \ldots M x^{3n+1} + N x^{3n+4} + \text{etc.}$$

et cum eſſe debeat $\frac{N}{M} = \frac{6n+1}{3n+3} \cdot \frac{6n+4}{3n+4}$ haec conditio adimpletur hac aequatione differentiali ſecundi gradus

$$dds = 4x^3 dds + 6xx dx ds - 2xs dx^2$$

quae commode per $2x ds - s dx$ multiplicata integrabilis euadit; reperitur enim integrando:

$$x ds^2 - s dx ds + C dx^2 = 4x^4 ds^2 - 4x^3 s dx ds + xxss dx^2$$

vbi cum ſumto x infinite paruo fiat $s = x$ et $\frac{ds}{dx} = 1$ euidens eſt capi debere $C = 0$ ita vt ſit

($x ds$

$(xds-sdx)ds = 4x^3(xds-sdx)ds + xxssdx^2 = xx(2xds-sdx)^2$
ſeu $\frac{ds^2}{ssdx^2} = \frac{ds}{xsdx} + \frac{x}{1-4x^3}$, vnde radicem extrahendo fit

$$\frac{ds}{sdx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1}{1-4x^3}} \text{ ita vt habeamus:}$$

$$ls = \tfrac{1}{8}lx + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-4x^3)}} = \tfrac{1}{2}lx + \tfrac{1}{3}l\frac{2x\sqrt{x}}{1+\sqrt{(1-4x^3)}}.$$

Hinc ergo erit $s = x\sqrt[3]{\frac{2}{1+\sqrt{(1-4x^3)}}}$.

XV.

Ponamus ergo $\frac{b}{aa} = x$, vt habeamus

$$\frac{y}{a} = 1 + x + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot10}{6\cdot7}x^7 + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot10}{6\cdot7}\cdot\frac{13\cdot16}{9\cdot10}\cdot x^{10} + \text{etc.}$$
$$- \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot8}{5\cdot6}x^6 - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot8}{5\cdot6}\cdot\frac{11}{8}\cdot\frac{14}{9}x^9 - \text{etc.}$$

ſeu

$$\frac{y}{a} = s + 1 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot8}{5\cdot6}x^6 - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot8}{5\cdot6}\cdot\frac{11\cdot14}{8\cdot9}x^9 - \text{etc.}$$

Ponamus ſummam ſeriei $1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{8}{6}\cdot x^6 - \text{etc.} = t$ ac reperiemus vt ante, quoniam lex progreſſionis eſt eadem:

$$ddt = 4x^3ddt + 6xxdxdt - 2xtdx^2$$

cuius integrale propterea eſt quoque

$$xdt^2 - tdxdt = 4x^4dt^2 - 4x^3tdxdt + xxttdx^2$$

quia enim ſumto x infinite paruo fit $t = 1$ et $\frac{dt}{dx} = 0$ conſtans addenda etiam euaneſcit. Porro ergo integrando adipiſcimur:

$$t = x\sqrt[3]{\frac{2}{1-\sqrt{(1-4x^3)}}} \text{ fietque } t = 1 \text{ ſi } x = 0.$$

Quocirca pro radice aequationis $y^3 = 3by + a^3$ habebimus:

$$\frac{y}{a} = s + t = x\sqrt[3]{\frac{2}{1+\sqrt{(1-4x^3)}}} + x\sqrt[3]{\frac{2}{1-\sqrt{(1-4x^3)}}} = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{(1-4x^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{(1-4x^3)}}{2}}$$

exiſtente $x = \frac{b}{aa}$, ideoque

$$y = \sqrt[3]{\frac{a^3-\sqrt{(a^6-4b^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{a^3+\sqrt{(a^6-4b^3)}}{2}}$$

quam eandem expreſſionem regula Cardani ſuppeditat.

XVI.

Euoluamus aliud exemplum aequationis cubicae, ponendo $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, vt ſit $y^3 = Ayy + B$ ac poſito $\frac{B}{A^3} = x$, noſtra forma dat

$$\frac{y}{A} = 1 + x - \frac{4}{2}x^2 + \frac{6.\,7}{2.\,3}x^3 - \frac{8.\,9.\,10}{2.\,3.\,4}x^4 + \frac{10.\,11.\,12.\,13}{2.\,3.\,4.\,5}x^5 - \text{etc.}$$

quae ad hanc legem reducitur continuitatis

$$\frac{y}{A} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + x - \frac{4}{2}x^2 + \frac{6.\,7}{2.\,3}x^3 \ldots \pm Mx^n \mp Nx^{n+1}$$

vt ſit $N = \frac{3(3n-1)(3n+1)}{(2n+1)(2n+2)}M = \frac{27nn-3}{4nn+6n+2}M$.

Ponamus $\frac{y}{A} - \frac{1}{3} = s$, et relatio inter s et x exprimetur per hanc aequationem differentialem ſecundi gradus:

$$4xxdds + 2xdxds + 27x^3dds + 27x^2dxds - 3xsdx^2 = 0$$

quae per $\frac{2ds}{x}$ multiplicata et integrata praebet:

$4xds^2 + 27xxds^2 - 3ssdx^2 = Cdx^2$ vnde colligitur

$$\frac{ds}{\sqrt{(C+3ss)}} = \frac{dx}{\sqrt{(4x+27xx)}}$$

cuius

cuius integratio dat

$$\frac{1}{\sqrt{3}} l\left(s\sqrt{3}+\sqrt{(C+3ss)}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}} l\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}+3x\sqrt{3}+\sqrt{(4x+27xx)}\right)$$

vnde porro elicitur haec aequatio algebraica:

$$s = A\left(1+\frac{27x}{2}+3\sqrt{\left(3x+\frac{81xx}{4}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$+B\left(1+\tfrac{27}{2}x-3\sqrt{\left(3x+\frac{81xx}{4}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

quae euoluta vtique praebet

$$s^3=3ABs+(A^3+B^3)\left(1+\frac{27x}{2}\right)+3(A^3-B^3)\sqrt{\left(3x+\frac{81xx}{4}\right)}$$

aequatio autem aſſumta inter s et x erat

$$s^3 = \tfrac{1}{3}s+\tfrac{2}{27}+x$$

quae in integrali illo completo continetur ſumendo

$A = B = \frac{1}{3}$.

XVII.

Euolutio haec elegantiſſima aequationum tribus tantum terminis conſtantium $1 = \frac{A}{y^\lambda}+\frac{B}{y^\mu}$ eo maiorem attentionem meretur, quod nulla via patet directa, ex ſerie inuenta in genere valorem ſummae y inueſtigandi, etiamſi tandem haec ſumma maxime concinna aequatione algebraica exhiberi poſſit. Quod enim caſus hic pro aequationibus quadraticis et cubicis expedire licuit, ſucceſſus huic circumſtantiae ſoli acceptus eſt referendus, quod harum aequationum reſolutio eſt in poteſtate; vnde non immerito ſuſpicari licet, ſi methodus detegeretur huiusmodi ſeries ſummandi inde eximia ſubſidia ad reſolutio-

 nem

nem aequationum cuiuscunque gradus eſſe redundatura. Simili autem modo euolutio aequationum quaternis terminis conſtantium exhiberi poteſt latisſime patens, quae autem ita eſt comparata, vt ſinguli termini continuo plura membra contineant, quorum tamen ordo ſatis eſt perſpicuus.

XVIII.

Si enim in genere haec fuerit propoſita aequatio quatuor conſtans terminis:

$$1 = \frac{A}{y^{\lambda}} + \frac{B}{y^{\mu}} + \frac{C}{y^{\nu}}$$

atque ponamus $y^n = P + Q + R + S + T$ etc. hae partes P, Q, R, S, T etc. ſequenti modo determinantur:

$$P = A^{\frac{n}{\lambda}}$$

$$Q = \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\mu}{\lambda}} B + \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\nu}{\lambda}} C$$

$$R = \begin{cases} + \frac{n(n+\lambda-2\mu)}{1.\,2\lambda^2} A^{\frac{n-2\mu}{\lambda}} BB \\ + \frac{2n(n+\lambda-\mu-\nu)}{1.\,2\lambda^2} A^{\frac{n-\mu-\nu}{\lambda}} BC \\ + \frac{n(n+\lambda-2\nu)}{1.\,2\lambda^2} A^{\frac{n-2\nu}{\lambda}} CC \end{cases}$$

+

$$S = \begin{cases} + \frac{n(n+\lambda-3\mu)(n+2\lambda-3\mu)}{1.\,2.\,3\,\lambda^3} A^{\frac{n-3\mu}{\lambda}} B^3 \\ + \frac{3n(n+\lambda-2\mu-\nu)(n+2\lambda-2\mu-\nu)}{1.\,2.\,3\,\lambda^3} A^{\frac{n-2\mu-\nu}{\lambda}} B^2 C \\ + \frac{3n(n+\lambda-\mu-2\nu)(n+2\lambda-\mu-2\nu)}{1.\,2.\,3\,\lambda^3} A^{\frac{n-\mu-2\nu}{\lambda}} B C^2 \\ + \frac{n(n+\lambda-3\nu)(n+2\lambda-3\nu)}{1.\,2.\,3\,\lambda^3} A^{\frac{n-3\nu}{\lambda}} C^3 \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} + \frac{n(n+\lambda-4\mu)(n+2\lambda-4\mu)(n+3\lambda-4\mu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-4\mu}{\lambda}} B^4 \\ + \frac{4n(n+\lambda-3\mu-\nu)(n+2\lambda-3\mu-\nu)(n+3\lambda-3\mu-\nu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-3\mu-\nu}{\lambda}} B^3 C \\ + \frac{6n(n+\lambda-2\mu-2\nu)(n+2\lambda-2\mu-2\nu)(n+3\lambda-2\mu-2\nu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-2\mu-2\nu}{\lambda}} B^2 C^2 \\ + \frac{4n(n+\lambda-\mu-3\nu)(n+2\lambda-\mu-3\nu)(n+3\lambda-\mu-3\nu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-\mu-3\nu}{\lambda}} B C^3 \\ + \frac{n(n+\lambda-4\nu)(n+2\lambda-4\nu)(n+3\lambda-4\nu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-4\nu}{\lambda}} C^4. \end{cases}$$

XIX.

Hinc iam quotcunque aequatio contineat terminos

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu} + \frac{C}{y^\nu} + \frac{D}{y^\xi} + \text{etc.}$$

in genere valor poteſtatis indefinitae y^n aſſignari poterit, aequabitur enim ſeriei ex infinito terminorum numero conflatae, qui ex omnibus quantitatum B, C, D etc. combinationibus naſcuntur. Sufficiet igitur in genere terminum huic combinationi $B^\beta C^\gamma D^\delta$

 etc.

etc. reſpondentem definiuiſſe, vbi pro β, γ, δ etc. ſuceſſiue omnes numeri integri poſitiui a cyphra 0, 1, 2, 3 etc. in infinitum ſubſtitui ſunt intelligendi. Ad hunc autem terminum inueniendum primo indagari debet numerus combinationum formae $B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta}$ etc. quem ſtatuamus $= N$ et poſita exponentium ſumma $\beta + \gamma + \delta +$ etc. $= p$ notum eſt fore

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p}{1 \cdot 2 \ldots \beta \cdot 1 \cdot 2 \ldots \gamma \cdot 1 \cdot 2 \ldots \delta \text{ etc.}}$$

deinde ponamus breuitatis gratia $\beta\mu + \gamma\nu + \delta\xi +$ etc. $= q$ atque terminus quaeſitus formae $B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta}$ etc. conueniens erit

$$N \cdot \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n+\lambda-q}{2\lambda} \cdot \frac{n+2\lambda-q}{3\lambda} \cdot \frac{n+3\lambda-q}{4\lambda} \cdots \frac{n+(p-1)\lambda-q}{p\lambda} A^{\frac{n-q}{\lambda}} B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta} \text{ etc.}$$

Omnes ergo hi termini iunctim ſumti verum valorem poteſtatis y^n determinabunt.

XX.

Euolutio aequationis $1 = \frac{A}{y} + By^3$.

Vt exemplum aequationis biquadraticae proferam, hanc aequationem, quae iſtam formam dat $By^4 = y - A$ euoluendam ſuſcipio. Cum igitur ſit $\lambda = 1$ et $\mu = -3$ hanc adipiſcimur ſeriem,

$$y = A + A^4B + \tfrac{8}{2}A^7B^2 + \tfrac{11 \cdot 12}{2 \cdot 3}A^{10}B^3 + \tfrac{14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4}A^{13}B^4 + \tfrac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}A^{16}B^5 \text{ etc.}$$

In hac ſerie quilibet terminus ita pendet a praecedente, vt quisque terminus per praecedentem diviſus praebeat quotum huius formae $4\frac{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}{n(3-1)(3n+1)}A^3B$, ex quo ſummatio huius ſeriei perducitur ad aequationem

tionem differentialem tertii gradus, quae facto $A = \frac{3}{4}u$ et $B = \frac{1}{4}$ vt aequatio propoſita ſit $y^4 = 4y - 3u$ ita ſe habebit

$$32(1-u^3)d^3y - 144uududdy - 86udu^2dy + 5ydu^3 = 0$$

ſumto ſcilicet elemento du conſtante. Quemadmodum autem illa aequatio in hac contineatur, non perſpicitur.

XXI.

Obſeruo autem hanc aequationem integrabilem reddi ſi multiplicetur per y, ſinguli enim termini quatenus fieri poteſt integrati praebent vt ſequitur:

$$\int y d^3y = yddy - \tfrac{1}{2}dy^2 \text{ [per } 32 \text{]}$$

$$\int u^3yd^3y = u^3yddy - \tfrac{1}{2}u^3dy^2 - 3uuydudy + 3uy^2du^2 + \tfrac{9}{2}\int uududy^2 - 3\int yydu^3 \text{ [per } -32 \text{]}$$

$$\int uuyduddy = uuydudy - uyydu^2 - \int uududy^2 + \int yydu^3 \text{ [per } -144 \text{]}$$

$$\int udu^2ydy = \tfrac{1}{2}uy^2du^2 - \tfrac{1}{2}\int yydu^3 \text{ [per } -86 \text{]}$$

$$\int yydu^3 = \int yydu^3 \text{ [per } 5 \text{]}$$

vnde naſcitur haec forma integrata

$$16(1-u^3)(2yddy - dy^2) - 48uuydudy + 5uy^2du^2 = Cdu^2$$

quae ponendo $y = zz$, ob $yy = z^4$, $ydy = 2z^3dz$ et $yddy + dy^2 = yddy + 4zzdz^2 = 2z^3ddz + 6zzdz^2$ ideoque

$$2yddy = 4z^3ddz + 4zzdz^2 \text{ ſeu } 2yddy - dy^2 = 4z^3ddz$$

induit hanc formam:

$$64(1-u^3)z^3ddz - 96uuz^3dudz + 5uz^4du^2 = Cdu^2$$

$$\text{vel } 64(1-u^3)ddz - 96uududz + 5uzdu^2 = \frac{Cdu^2}{z^3}$$

quae

quae ergo hanc aequationem integralem $z^8 = 3zz - 3u$ in ſe complectitur; idque caſu quo conſtans $C = -9$, propterea quod eſt $y = \frac{3}{4}u + \frac{3^4}{4^5}u^4 + \frac{3^7}{4^8}u^7 +$ etc. ideoque ſumto u infinite paruo $z = \frac{1}{2}\sqrt{3u}$.

XXII.

Cum nulla via pateat, hanc aequationem differentialem ſecundi gradus vlterius reducendi, operae pretium erit inueſtigare, quomodo et quatenus ea cum aequatione finita $z^8 = 4zz - 3u$ conueniat. In hunc finem repraeſentemus aequationem differentialem hac forma:

$$Lz^3 ddz + Mz^3 dudz + Nz^4 du^2 = Cdu^2$$

vt ſit $L = 64(1-u^3)$; $M = -96uu$; et $N = 5u$

at aequatio finita differentiata dat

$$8z^7 dz = 8zdz - 3du \text{ ſeu } 8dz(u-zz) = zdu$$

vnde fit porro differentiando:

$$8ddz(u-zz) = 16zdz^2 - 7dudz = \frac{9z^3 - 7uz}{8(u-zz)^2}du^2.$$

Cum ergo ſit

$$\frac{dz}{du} = \frac{z}{8(u-zz)} \text{ et } \frac{ddz}{du^2} = \frac{9z^3 - 7uz}{64(u-zz)^3}$$

prodibit facta ſubſtitutione haec aequatio

$$\frac{(1-u^3)z^4(9zz-7u)}{(u-zz)^3} - \frac{12uuz^4}{u-zz} + 5uz^4 = C \text{ ſeu}$$

$$(1-u^3)z^4(9zz-7u) - (7uu+5uzz)z^4(u-zz)^2 + C(u-zz)^3 = 0$$

quae euoluta et ope aequationis $z^8 = 4zz - 3u$ ad poteſtates ipſius z octaua minores depreſſa perducit ad hanc:

$(9+C)$

$$(9+C)z^6-3(9+C)uz^4+3(9+C)uuzz-(9+C)u^3=0$$

cui valor $C=-9$ manifeſto ſatisfacit.

XXIII.

Plus autem hinc concludere non licet, quam aequationem hanc $z^8=4zz-3u$ contineri in hac aequatione differentio-differentiali:

$$64(1-u^3)z^3ddz-96uuz^3dudz+5uz^4du^2=Cdu^2$$

caſu quo $C=-9$, interim tamen ne hoc quidem caſu integrale completum exhibere licet, in quod praeterea duae quantitates conſtantes ingrediantur. Multo minus autem in genere quicunque valor ipſi C tribuatur, integrationem ſperare poterimus cum ne caſu quidem $C=0$, methodis cognitis integrationem admittat. Ex quo intelligimus ſi aequationes algebraicae, quarum radices hic ad ſeries infinitas perduximus, tertium gradum ſuperent, ſerierum inde natarum ſummas nullius methodi adhuc cognitae ope inueſtigari poſſe.

XXIV.

Coronidis loco adiungam problema inuerſum, quo propoſita huiusmodi aequatione cubica $y^3+py+q=0$, inueſtigari oporteat aequationem differentialem ſecundi ordinis huius formae $ddy+Qdy+Ry=0$, in qua illa contineatur: quae inueſtigatio ſemper ſuccedit; differentiatione enim bis inſtituta, indeque hic loco dy et ddy valoribus ſubſtitutis, vt termini prodeant ſolam quantitatem y eiusque poteſtates continentes, quas ope aequationis $y^3+py+q=0$ infra tertiam deprimere licebit: quo facto ſeorſim ad nihilum re-

redigantur partes cum ab y liberae, tum vero ipſam y eiusque quadratum yy continentes, vbi commode eueniet, vt ſimul ac binis conditionibus fuerit ſatisfactum, tertia ſponte adimpleatur. Hoc autem modo calculum inſtituendo reperietur.

$$Q = \frac{18ppqdp^2 - 2(8p^3 - 27qq)dpdq - 54pqdq^2}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27qq)} + \frac{2pddq - 3qddp}{3qdp - 2pdq}$$

$$R = \frac{6p(dq^3 + pdp^2dq - qdp^3)}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27qq)} + \frac{dqddp - dpddq}{3qdp - 2pdq}$$

Haec autem aequatio per $\frac{4p^3 + 27qq}{(3qdp - 2pdq)^2}(2pdy - ydp)$ multiplicata integrabilis redditur, indeque porro pro y aequatio cubica latius patens quam propoſita elicietur.

XXV.

Aequatio differentialis ſecundi gradus magis fit concinna ſi ponatur $qq = \frac{4p^3x}{27}$, fiet enim

$$ddy - dy\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{dp}{p} - \frac{dx}{2x} - \frac{dx}{2(1+x)}\right) + y\left(\frac{dpddx}{2pdx} - \frac{ddp}{2p} + \frac{3dp^2}{4pp} - \frac{dpdx}{4px} - \frac{dpdx}{4p(1+x)} - \frac{-dx^2}{36x(1+x)}\right) = 0$$

quae per $\frac{x(1+x)}{ppdx^2}(2pdy - ydp)$ multiplicata et integrata praebet

$$\frac{x(1+x)}{pdx^2}\left(dy - \frac{ydp}{2p}\right)^2 = \frac{C}{18} + \frac{yy}{18p}$$

et ponendo $y = z\sqrt{p}$ hinc reperitur

$$\frac{3dz\sqrt{2}}{\sqrt{(C+zz)}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$$

quae denuo integrata dat:

$$(z + \sqrt{(C+zz)})^3 = D\left(\tfrac{1}{2} + x + \sqrt{x(1+x)}\right)$$

unde tandem eruitur:

$$z = \frac{y}{\sqrt{p}} = A\left(\tfrac{1}{2} + x + \sqrt{x(1+x)}\right)^{\frac{1}{3}} + B\left(\tfrac{1}{2} + x - \sqrt{x(1+x)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ac cubo ſumendo

$$z^3 = \tfrac{3}{4}ABz + (A^3 + B^3)\left(\tfrac{1}{2} + x\right) + (A^3 - B^3)\sqrt{x(1+x)}$$

PRO-

PROBLEMA ALGEBRAICVM OB AFFECTIONES PRORSVS SINGVLARES MEMORABILE.

Auctore

L. EVLERO.

Problema, cuius affectiones hic contemplandas ſuſcipio, ita ſe habet:

Inuenire nouem numeros ita in quadratum diſponendos, vt ſatisfiat duodecim ſequentibus conditionibus:

A,	B,	C
D,	E,	F
G,	H,	I

1°. $AA+DD+GG=1$; 4°. $AB+DE+GH=0$
2° $BB+EE+HH=1$; 5°. $AC+DF+GI=0$
3°. $CC+FF+II=1$; 6°. $BC+EF+HI=0$

7°. $AA+BB+CC=1$; 10°. $AD+BE+CF=0$
8°. $DD+E\ +FF=1$; 11°. $AG+BH+CI=0$
9°. $GG+HH+II=1$; 12°. $DG+EH+FI=0$.

Circa hoc problema ſequentia obſeruo.

I. Cum numerus conditionum implendarum ſuperet numerum quantitatum determinandarum, problema hoc plusquam determinatum videtur. Vtcunque enim conditiones praeſcriptae perpendantur, nulla alia relatio, qua aliquae in reliquis iam conti-

neantur, in iis deprehenditur, niſi quod ſumma conditionum 7°. 8°. 9° conueniat cum ſumma conditionum 1°. 2°. 3°; vnde vnica harum duodecim conditionum in reliquis iam contineri videtur; qua remota tamen adhuc vndecim conditiones relinquuntur, quae binario numerum quantitatum incognitarum excedunt. Hic equidem tantum de eiusmodi relatione loquor, quae has conditiones conſideranti occurrit, reuera enim aliquot neceſſariae relationes inter eas intercedunt, quae autem vix ante animaduertuntur, quam problema perfecte fuerit ſolutum.

II. Deinde obſeruo hoc problema non ſolum non eſſe plusquam determinatum, ſed adeo eſſe indeterminatum, ita vt nouem numerorum quaeſitorum tres pro lubitu accipere liceat, nihiloque minus omnibus conditionibus praeſcriptis ſatisfieri queat. Dummodo enim ſex prioribus conditionibus fuerit ſatisfactum, reliquae ſex ſponte implentur atque omnino fieri non poteſt, vt ſex prioribus ſatisfiat quin ſimul omnibus ſatisfiat. Quocirca problema propoſitum eiusdem prorſus indolis maneret etiamſi ſex poſteriores conditiones plane omitterentur; ac tum ei inſigne Theorema iſtud adiungi poſſet.

Quodſi nouem numeri A, B, C, D, E, F, G, H, I *ita fuerint comparati, vt 6 prioribus conditionibus ſatisfaciant tum etiam neceſſario ſex poſterioribus ſatisfaciant.*

Quod Theorema pro difficillimo demonſtratu venditare non dubito, neque video quomodo demonſtra-

monſtratio adornari queat, niſi ſolutio problematis ſuerit explorata.

III. Neque vero hoc problema pro otioſa ſpeculatione ſeu mero luſu ingenii eſt habendum, ſed potius in doctrina de ſuperficierum natura eſt maximi momenti. Cum enim natura ſuperficiei per aequationem inter ternas coordinatas tribus axibus inter ſe normalibus parallelas exprimi ſoleat, talis aequatio mutandis axibus in infinitum variari poteſt, etiamſi axium communis interſectio in eodem puncto ſtatuatur. Quoniam igitur eadem ſuperficies infinitis aequationibus diuerſis inter ternas coordinatas definiri poteſt, plurimum intereſt earum characterem communem noſſe, qui in eo conſiſtit, vt ſi coordinatae ternis quibusdam axibus datis parallelae ſint x, y, z; quae autem aliis quibuscunque axibus conſtituuntur parallelae, fuerint X, Y, Z eorum relatio mutua ſemper huiusmodi formulis contineatur:

$$X=Ax+By+Cz;\quad Y=Dx+Ey+Fz;\quad Z=Gx+Hy+Iz$$

qui nouem coefficientes ita comparati ſint neceſſe eſt, vt inde fiat: $XX+YY+ZZ=xx+yy+zz$, quandoquidem his formulis quadratum interualli quo ſuperficiei punctum ab initio coordinatarum diſtat, exprimitur. Quod fieri nequit, niſi hae ſex aequationes habeant locum:

$$AA+DD+GG=1,\ BB+EE+HH=1,\ CC+FF+II=1$$
$$AB+DE+GH=0,\ AC+DF+GI=0,\ BC+EF+HI=0$$

quae ſunt ipſae ſex priores conditiones noſtri problematis.

IV. Quocunque autem modo hoc problema ſecundum Algebrae praecepta tentetur, ob tantum incognitarum numerum ſemper ad calculos vehementer intricatos peruenitur, ex quibus neutiquam ſolutionem commodam expectare liceat. Theoriam quidem angulorum in ſubſidium vocando, haud difficulter ſolutio ſatis concinna obtinetur, verum haec methodus vix ad alias huius generis quaeſtiones magis complicatas traduci poterit: veluti ſi circa 16, 25, 36 etc. numeros, pariter in quadratum diſponendos ſimilis quaeſtio inſtituatur, vt ſumma quadratorum per ſingulas columnas tam verticales quam horizontales ſumtorum vnitati aequetur, ſimul vero ſummae productorum ſecundum binas columnas itidem tam verticales quam horizontales ad nihilum redigantur Methodum ergo etiam ad has quaeſtiones patentem, quae vtique in Analyſi maximi momenti eſt putanda deinceps ſum expoſiturus, poſtquam demonſtrationem Theorematis §. 11. memorati, atque ſolutionem problematis initio propoſiti ope ſinuum et coſinuum tradidero.

Demonſtratio Theorematis §. 11. propoſiti.

V. Aſſumo ergo nouem numeros noſtros A, B, C, D, E, F, G, H, I ita eſſe comparatos vt ſit

1°.

$$1^\circ.\ AA+DD+GG=1;\quad 4^\circ.\ AB+DE+GH=0$$
$$2^\circ.\ BB+EE+HH=1;\quad 5^\circ.\ AC+DF+GI=0$$
$$3^\circ.\ CC+FF+II=1;\quad 6^\circ.\ BC+EF+HI=0$$

quarum tres poſteriores ita repraeſento:

$$4^\circ.\ AB=-DE-GH;\quad 5^\circ.\ AC=-DF-GI;$$
$$6^\circ.\ BC=-EF-HI$$

vnde concludo ſore:

$$\frac{4^\circ.\ 5^\circ}{6^\circ.}\ \ldots\ \frac{AABC}{BC}=AA=-\frac{(DE+GH)(DF+GI)}{EF+HI}$$

qui valor ipſius AA in prima aequatione poſitus dat:

$$-(DE+GH)(DF+GI)+(EF+HI)(DD+GG)$$
$$=EF+HI$$

factaque euolutione:

$$-DEGI-DFGH+DDHI+EFGG=EF+HI$$

cuius aequationis primum membrum manifeſto in hos factores reſoluitur:

$$(DH-EG)(DI-FG)=EF+HI.$$

VI. Cum igitur ſit $EF+HI=-BC$, erit

$$BC=(EG-DH)(DI-FG)$$

ſimilique modo colligetur fore

$$AC=(FH-EI)(EG-DH)\ \text{et}$$
$$AB=(DI-FG)(FH-EI)$$

quarum duarum poſteriorum productum per primam diuiſum praebet

$$AA=(FH-EI)^2\ \text{hincque}\ A=\pm(FH=EI)$$

quia autem ſingulos numeros tam negatiue quam poſitiue capere licet, ambiguitas ſigni nullam variationem

tionem inferre eſt cenſenda, vnde ſumto ſuperiori habebimus:

$$A=FH-EI;\ B=DI-FG;\ C=EG-DH.$$

Cum autem ex rei natura columnas verticales inter ſe permutare liceat, hinc per analogiam concludimus fore

$$D=BI-CH;\ E=CG-AI;\ F=AH-BG$$
$$G=CE-BF;\ H=AF-CD;\ I=BD-AE.$$

VII. En ergo nouem nouas determinationes, quae in ſex conditionibus praeſcriptis neceſſario inuoluuntur, et quas inſuper ad 12 conditiones initio propoſitas adiicere potuiſſemus. Verum hae ipſae nouem determinationes, quas ſequenti modo indicabo:

$13^\circ.\ A=FH-EI;\ 16^\circ.\ D=BI-CH;\ 19^\circ.\ G=CE-BF;$
$14^\circ.\ B=DI-FG;\ 17^\circ.\ E=CG-AI;\ 20^\circ.\ H=AF-CD;$
$15^\circ.\ C=EG-DH;\ 18^\circ.\ F=AH-BG;\ 21^\circ.\ I=BD-AE;$

facile ad conditiones ſex poſteriores initio propoſitas deducunt.

Nam formulae 13°. per D, 14°. per E et 15°. per F multiplicatae et in vnam ſummam collectae dant:

$$AD+BE+CF=\begin{matrix}+DFH+DEI+EFG\\-DEI-EFG-DFH\end{matrix}=0$$

quae eſt ipſa conditio 10° initio propoſita, ſimilique modo 13°. G + 14°. H + 15°. I dabit conditionem

nem 11°. et 16° G + 17°. H + 18°. I conditionem 12°. ita vt ſit:

$$10°.\ AD+BE+CF=0,\quad 11°.\ AG+BH+CI=0;\quad 12°.\ DG+EH+FI=0.$$

VIII. Denique ſi in formula nro. 13°. valores literarum E et F ex formulis 17° et 18°. ſubſtituantur, emergit haec aequatio:

$$A=AHH-BGH-CGI+AII=A(HH+II)-G(BH+CI)$$

at ex aequatione 11°. eſt $BH+CI=-AG$, vnde colligitur:

$$A=A(GG+HH+II),$$ ideoque vel $A=0$ vel $$GG+HH+II=1.$$

Cum autem ſimili modo ex formulis 14°. 15°. 16°. 17° et 18° eliciantur aequationes:

$$B=B(GG+HH+II);\quad D=D(GG+HH+II)$$
$$C=C(GG+HH+II);\quad E=E(GG+HH+II)$$
$$\text{et } F=F(GG+HH+II)$$

neque litterae A, B, C, D, E, F omnes ſimul euaneſcant, neceſſe eſt ſit $GG+HH+II=1$ quae eſt conditio 9°. hocque modo oſtenditur eſſe:

$$7°.\ AA+BB+CC=1;\quad 8°.\ DD+EE+FF=1;\quad 9°.\ GG+HH+II=1$$

quae eſt demonſtratio completa theorematis propoſiti.

Solutio Problematis initio propoſiti.

IX. Statuamus $A=\text{coſ.}\,\zeta$, et cum conditiones 1° et 7°. praebeant:

$$DD + GG = \text{ſin.}\,\zeta^2 \text{ et } BB + CC = \text{ſin.}\,\zeta^2$$

his ingenere ſatisfaciemus ponendo:

$B = \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta$; $C = \text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta$; $D = \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$; $G = \text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta$.

Conſiderentur iam conditiones 17° et 21°. quae factis his ſubſtitutionibus induent has formas:

17°. $E = \text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta - I\,\text{coſ.}\,\zeta$, ſeu $E + I\,\text{coſ.}\,\zeta = \text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta$

21°. $I = \text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta - E\,\text{coſ.}\,\zeta$ ſeu $I + E\,\text{coſ}\,\zeta = \text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta$.

Hinc $17° - 21°.\text{coſ.}\,\zeta$ et $21° - 17°.\text{coſ.}\,\zeta$ dant:

$$E(1 - \text{coſ.}\,\zeta^2) = \text{ſin.}\,\zeta^2(\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin}\,\theta - \text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta)$$
$$I(1 - \text{coſ.}\,\zeta^2) = \text{ſin.}\,\zeta^2(\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta - \text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta)$$

vnde colligitur:

$E = \text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta - \text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta$ et $I = \text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta - \text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta$.

X. Simili modo conditiones 18° et 20° modo ante demonſtratae, factis ſubſtitutionibus ſuppeditant has aequationes:

18°. $F = H\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta$ ſeu $F - H\,\text{coſ.}\,\zeta = -\text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta$

20°. $H = F\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{ſin}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta$ ſeu $H - F\,\text{coſ.}\,\zeta = -\text{ſin}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta$

vnde formae $18° + 20°.\text{coſ.}\,\zeta$ et $20° + 18°.\text{coſ.}\,\zeta$ producunt

$$F(1 - \text{coſ.}\,\zeta^2) = -\text{ſin.}\,\zeta^2(\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta + \text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta)$$
$$H(1 - \text{coſ.}\,\zeta^2) = -\text{ſin.}\,\zeta^2(\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta)$$

vnde ob $1 - \text{coſ.}\,\zeta^2 = \text{ſin.}\,\zeta^2$ elicitur

$F = -\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta - \text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta$; et $H = -\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta - \text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta$

ſicque

ſicque nouem numeri conditionibus praeſcriptis ſatisfacientes ita ſunt definiti, vt tres anguli ζ, η, θ arbitrio noſtro relinquantur, in quo criterium ſolutionis completae cernitur.

XI. Solutio ergo completa noſtri problematis ita ſe habet, vt nouem numeri quaeſiti ſequentes ſortiantur valores:

$A=\cos.\zeta$	$B=\sin.\zeta\cos.\eta$	$C=\sin.\zeta\sin.\eta$
$D=\sin.\zeta\cos.\theta$	$E=\sin.\eta\sin.\theta-\cos.\zeta\cos.\eta\cos.\theta$	$F=-\cos.\eta\sin.\theta-\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\theta$
$G=\sin.\zeta\sin.\theta$	$H=-\sin.\eta\cos.\theta-\cos.\zeta\cos.\eta\sin.\theta$	$I=+\cos.\eta\cos.\theta-\cos.\zeta\sin.\eta\sin.\theta$

quibus valoribus non ſolum ſex conditiones priores, quibus problema determinatur, ſed etiam ſex poſteriores, atque adeo etiam nouem nouae §. VII. exhibitae, adimplentur. Haecque ſolutio iſtum praeſtat vſum, vt inde facili negotio ſolutiones in numeris rationalibus, quotcunque libuerit, reperire liceat, tres ſcilicet angulos ζ, η, θ ita capi opus eſt, vt eorum tam ſinus quam coſinus rationaliter exprimantur. Hinc ſolutio ſatis ſimplex prodibit ſumendo

$$\cos.\zeta=\tfrac{3}{5};\quad \sin.\zeta=\tfrac{4}{5};\quad \cos.\eta=\tfrac{3}{5};\quad \sin.\eta=\tfrac{4}{5};\quad \cos.\theta=\tfrac{5}{13};\quad \sin.\theta=\tfrac{12}{13}.$$

Methodus Generalis huiusmodi problemata reſoluendi.

XII. Methodus generalis, quam hic ſum traditurus, ex principio ſupra §. III. memorato eſt petita, vbi oſtendi problema propoſitum eo redire,

vt ex ternis variabilibus x, y, z aliae tres X, Y, Z per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y + \gamma z$ ita determinentur, vt fiat $X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$, haecque determinatio maxime ſit generalis; tum enim coefficientes trium harum formularum $\alpha x + \beta y + \gamma z$ pro nouis variabilibus X, Y, Z reſultantium, erunt ipſi illi nouem numeri, qui in problemate deſiderantur. Hic igitur duae conditi one probe ſunt perpendendae, quarum altera eſt, vt valores ipſarum X, Y, Z ſimpliciter per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y + \gamma z$ exprimantur, altera vero vt tum fiat $X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Niſi enim illa conditio adeſſet, quaeſtio foret per methodum Diophanteam ſolutu facilis, dum tantum trium quadratorum ſumma in tria alia quadrata reſolui deberet, id quod nihil habet difficultatis.

XIII. Quoniam vero rem eo deducere animus eſt, vt methodus ad quaeſtiones continuo magis complicatas extendi queat, a caſu ſimpliciſſimo exordiar, quo propoſitis tantum duabus variabilibus x et y, ex iis aliae duae X et Y per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y$ definiri debeant vt fiat $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$. Hunc in finem poſito

$$X = \alpha x + \beta y \quad \text{et} \quad Y = \gamma x + \delta y$$

neceſſe eſt, fiat:

$$\alpha\alpha + \gamma\gamma = 1; \ \beta\beta + \delta\delta = 1; \ \alpha\beta + \gamma\delta = 0.$$

Statuamus ergo $\alpha = \text{coſ.}\, \zeta$ et $\beta = \text{coſ.}\, \eta$, vt habeatur $\gamma = \text{ſin.}\, \zeta$ et $\delta = \text{ſin.}\, \eta$, ſicque duabus prioribus

bus conditionibus ſatisfiat: tum vero tertia dabit $\operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{coſ.}\eta + \operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{ſin.}\eta = \operatorname{coſ.}(\zeta - \eta) = 0$, ex quo erit $\zeta - \eta = 90°$, ideoque $\eta = \zeta - 90°$, ac propterea $\operatorname{coſ}\eta = \operatorname{ſin.}\zeta$ et $\operatorname{ſin.}\eta = -\operatorname{coſ.}\zeta$. Vnde patet ſi capiatur:

$$X = x\operatorname{coſ.}\zeta + y\operatorname{ſin.}\zeta \text{ et } Y = x\operatorname{ſin.}\zeta - y\operatorname{coſ.}\zeta$$

fore $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$.

XIV. Hoc lemmate praemiſſo ex propoſitis tribus variabilibus x, y, z primo alias tres x', y', z' ita definio vt ſit

$$x' = x\operatorname{coſ.}\zeta + y\operatorname{ſin.}\zeta;\quad y' = x\operatorname{ſin.}\zeta - y\operatorname{coſ.}\zeta;\quad \text{et } z' = z$$

hoc enim modo certo erit

$$x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz.$$

Deinde ex his ſimili modo alias tres x'', y'', z'' deduco, vt ſit

$$x'' = x';\quad y'' = y'\operatorname{coſ.}\eta + z'\operatorname{ſin.}\eta;\quad z'' = y'\operatorname{ſin.}\eta - z'\operatorname{coſ.}\eta$$

atque hinc tandem quaeſitas X, Y, Z, ita definio:

$$X = z''\operatorname{coſ.}\theta + x''\operatorname{ſin.}\theta;\quad Y = y'';\quad Z = z''\operatorname{ſin.}\theta - x''\operatorname{coſ.}\theta$$

ſic enim vtique fiet:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x''x'' + y''y'' + z''z'' = x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz.$$

XV. Ex hac autem triplici poſitione ſequitur fore:

$$x'' = x\operatorname{coſ.}\zeta + y\operatorname{ſin.}\zeta;\ y'' = x\operatorname{ſin.}\zeta\operatorname{coſ}\eta - y\operatorname{coſ.}\zeta\operatorname{coſ.}\eta + z\operatorname{ſin.}\eta;\ z'' = x\operatorname{ſin.}\zeta\operatorname{ſin.}\eta - y\operatorname{coſ.}\zeta\operatorname{ſin.}\eta - z\operatorname{coſ.}\eta$$

tum vero

$$X = x(\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta) - y(\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta - \text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta) - z\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta$$

$$Y = x\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta - y\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta + z\,\text{ſin.}\,\eta$$

$$Z = x(\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta - \text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta) - y(\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta) - z\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta$$

quae formulae cum ante inuentis conueniunt.

XVI. Hanc ſolutionem eſſe generalem vel inde patet, quod ea complectatur tres angulos arbitrarios ζ, η, θ, qui per tres transformationes quas inſtituimus, ſunt introducti. Vis enim huius methodi in hoc conſiſtit, vt quauis transformatione duae tantum quantitates varientur, dum ſcilicet in earum locum duae aliae vna cum angulo arbitrario introducuntur, tertia manente immutata. Hinc duae operationes iam quidem ſolutionem problematis ſuppeditant, ſed nondum completam, ob defectum vnius quantitatis arbitrariae. Quamobrem tot transformationes inſtitui oportet donec tot huiusmodi quantitates arbitrariae fuerint ingreſſae quot ad maximam ſolutionis extenſionem requiruntur. Supra autem iam obſeruaui, cum quaeſtio circa nouem numeros verſetur ac tantum ſex conditiones praeſcribantur, tres eorum manere indeterminatos, quemadmodum etiam in ſolutione hic data ob angulos ζ, η, θ arbitrio noſtro relictos, tres numeri A, B, D pro lubitu accipi poſſunt.

XVII.

XVII. Hinc autem dubium naſci poſſet, quod cum qualibet transformatione nouus angulus introducatur, aucto transformationum numero noſtri problematis ſolutio multo adhuc generalior obtineri poſſet. Verum tamen qui huius rei periculum facere voluerit, mox animaduertet, nouum angulum introductum cum aliquo praecedentium in vnum coaleſcere ita vt quotcunquae transformationes ſuſcipiantur, numerus angulorum vere arbitrariorum non vltra ternarium augeri queat. Adiiciamus enim inſuper hanc transformationem ponendo:

$X' = X$; $Y' = Y \operatorname{coſ.} \lambda - Z \operatorname{ſin.} \lambda$; et $Z' = Y \operatorname{ſin.} \lambda + Z \operatorname{coſ.} \lambda$ fietque

$$X' = x(\operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{ſin.}\eta \operatorname{coſ.}\theta + \operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{ſin.}\theta) + y(\operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{ſin.}\theta - \operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{coſ.}\eta \operatorname{coſ.}\theta) - z \operatorname{coſ.}\eta \operatorname{coſ.}\theta$$

$$Y' = x(\operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{coſ.}\eta \operatorname{coſ.}\lambda - \operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{ſin.}\eta \operatorname{ſin.}\theta \operatorname{ſin.}\lambda + \operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{coſ.}\theta \operatorname{ſin.}\lambda) - y(\operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{coſ.}\eta \operatorname{coſ.}\lambda - \operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{ſin.}\eta \operatorname{ſin.}\theta \operatorname{ſin.}\lambda - \operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{coſ.}\theta \operatorname{ſin.}\lambda) + z(\operatorname{ſin.}\eta \operatorname{coſ.}\lambda + \operatorname{coſ.}\eta \operatorname{ſin.}\theta \operatorname{ſin.}\lambda)$$

$$Z' = x(\operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{coſ.}\eta \operatorname{ſin}\lambda + \operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{ſin.}\eta \operatorname{ſin}\theta \operatorname{coſ.}\lambda - \operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{coſ.}\theta \operatorname{coſ.}\lambda) - y(\operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{coſ.}\eta \operatorname{ſin.}\lambda + \operatorname{coſ.}\zeta \operatorname{ſin}\eta \operatorname{ſin.}\theta \operatorname{coſ.}\lambda + \operatorname{ſin.}\zeta \operatorname{coſ.}\theta \operatorname{coſ.}\lambda) + z(\operatorname{ſin}\eta \operatorname{ſin.}\lambda - \operatorname{coſ.}\eta \operatorname{ſin.}\theta \operatorname{coſ.}\lambda)$$

vbi etſi quatuor anguli adſunt ζ, η, θ et λ, tamen inde non plures tribus coefficientes pro lubitu aſſignare licet: quod quidem non facile perſpicitur, et nonniſi per plures ambages oſtendi poſſe videtur: cum tamen ex rei natura res ſit prorſus manifeſta.

XVIII. Etiamſi maxime arduum videatur has quatuor quantitates indeterminatas ad tres revocare

vocare haecque inueſtigatio omnino ſingulares calculi euolutiones poſtulet, tamen ratio in eo ſita haud difficulter deprehenditur, quod bis inter easdem quantitates cognomines y et z transformatio ſit inſtituta. Scilicet in ſecunda quantitates y', z' in y'', z'' ope anguli η et in quarta quantitates cognomines Y et Z ope anguli λ in Y' et Z' ſunt transformatae. Quae duae transformationes ſi immediate ſe exciperent ponendo exempli gratia

primum $y' = y\,\text{coſ.}\zeta + z\,\text{ſin.}\zeta$; $z' = y\,\text{ſin.}\zeta - z\,\text{coſ}\,\zeta$

tum vero $y'' = y'\,\text{coſ.}\eta + z'\,\text{ſin.}\eta$; $z'' = y'\,\text{ſin.}\eta - z'\,\text{coſ.}\eta$

coniunctim prodiret:

$$y'' = y\,\text{coſ.}(\zeta - \eta) + z\,\text{ſin.}(\zeta - \eta) \text{ et}$$
$$z'' = -y\,\text{ſin.}(\zeta - \eta) + z\,\text{coſ.}(\zeta - \eta)$$

ſicque duplex illa transformatio manifeſto vnicae ope anguli $\zeta - \eta$ factae aequiualeret. Quod etiam euenire eſt intelligendum, etiamſi huiusmodi binae transformationes inter quantitates cognomines non immediate ſe excipiant.

XIX. Hinc cum quaelibet transformatio inter duas tantum quantitates variabiles inſtituatur, hanc regulam ſtabiliri conuenit, vt hae transformationes ſemper inter binas variabiles diuerſi nominis ſuſcipiantur; quo pacto numerus transformationum ita determinatur, vt plures forent inutiles. Ita cum in noſtro problemate tres habeantur quantitates variabiles litteris x, y, z indicatae, plures quam tres transformationes locum habere nequeunt, dum vna inter

x et

x et y, alia inter x et z, et tertia inter y et z inſtituitur hoc modo

$x' = x\,\text{coſ.}\zeta + y\,\text{ſin.}\zeta$	$x'' = x'\,\text{coſ.}\eta + z'\,\text{ſin.}\eta$	$x''' = x''$
$y' = x\,\text{ſin.}\zeta - y\,\text{coſ.}\zeta$	$y'' = y'$	$y''' = y''\,\text{coſ.}\theta + z''\,\text{ſin.}\theta$
$z' = z$	$z'' = x'\,\text{ſin.}\eta - z'\,\text{coſ.}\eta$	$z''' = y''\,\text{ſin.}\theta - z''\,\text{coſ.}\theta$

vbi in prima quantitas nominis z, in ſecunda nominis y, in tertia vero nominis x inuariata relinquitur.

XX. Hanc regulam obſeruantes methodum hanc per iſtiusmodi transformationes procedentem facile ad eiusmodi problemata accommodare poterimus, quibus plures quam tres quantitates variabiles proponuntur, quas ſimili modo in alias totidem transformari oporteat, vt quadratorum ſumma maneat eadem. Pluribus ſcilicet transformationibus inter binas tantum inſtituendis opus erit, vbi tantum erit cauendum, ne inter binas cognomines bis transformatio inſtituatur. Quo obſeruato, ſolutio non ante erit completa, quam inter omnes binas diuerſi nominis tales transformationes fuerint abſolutae cuiusmodi diuerſae combinationes habebuntur ſex, ſi quatuor propoſitae ſint quantitates, decem vero ſi quinque et ita porro. Cuiusmodi problemata aliquot cum ſolutionibus hic ſubiungam.

Problema.

Quatuor quantitates v, x, y, z ita in alias per huiusmodi formulas $\alpha v + \beta x + \gamma y + \delta z$ transformare, vt ſumma quadratorum maneat eadem

 vel

vel ponendo.

$$V = Av + Bx + Cy + Dz;\quad Y = Iv + Kx + Ly + Mz$$

$$X = Ev + Fx + Gy + Hz;\quad Z = Nv + Ox + Py + Qz$$

hos ſedecim coefficientes ita definire vt fiat

$$VV + XX + YY + ZZ = vv + xx + yy + zz$$

quem in finem ſequentibus 10 conditionibus ſatisfieri oportet:

$1^\circ.\ AA + EE + II + NN = 1;\quad 5^\circ.\ AB + EF + IK + NO = 0$

$2^\circ.\ BB + FF + KK + OO = 1;\quad 6^\circ.\ AC + EG + IL + NP = 0$

$3^\circ.\ CC + GG + LL + PP = 1;\quad 7^\circ.\ AD + EH + IM + NQ = 0$

$4^\circ.\ DD + HH + MM + QQ = 1;\quad 8^\circ.\ BC + FG + KL + OP = 0$

$9^\circ.\ BD + FH + KM + OQ = 0$

$10^\circ.\ CD + GH + LM + PQ = 0.$

XXI. Cum hic ſedecim numeri ex 10 conditionibus inueniendi proponantur, euidens eſt eorum ſex arbitrio noſtro relinqui, ſeu quod eodem redit ſolutionem completam ſex quantitates arbitrarias complecti debere. Methodum autem ante expoſitam ſequentes reuera ſolutionem ſex transformationibus abſolui deprehendimus, quae ita repraeſentari poſſunt:

I.	II.	III.
$x^{I} = x\,\text{coſ.}\,\alpha + y\,\text{ſin.}\,\alpha$	$x^{II} = x^{I}\,\text{coſ}\,\beta + z^{I}\,\text{ſin}\,\beta$	$x^{III} = x^{II}\,\text{coſ.}\,\gamma + v^{II}\,\text{ſin.}\,\gamma$
$y^{I} = x\,\text{ſin.}\,\alpha - y\,\text{coſ.}\,\alpha$	$y^{II} = y^{I}$	$y^{III} = y^{II}$
$z^{I} = z$	$z^{II} = x^{I}\,\text{ſin.}\,\beta - z^{I}\,\text{coſ.}\,\beta$	$z^{III} = z^{II}$
$v^{I} = v$	$v^{II} = v^{I}$	$v^{III} = x^{II}\,\text{ſin.}\,\gamma - v^{II}\,\text{coſ.}\,\gamma$

IV.

IV.	V.	VI.
$x^{IV}=x^{III}$	$x^{V}=x^{IV}$	$x^{VI}=x^{V} \quad = X$
$y^{IV}=y^{III}\cos.\delta+z^{III}\sin.\delta$	$y^{V}=y^{IV}\cos.\varepsilon+v^{IV}\sin.\varepsilon$	$y^{VI}=y^{V} \quad = Y$
$z^{IV}=y^{III}\sin.\delta-z^{III}\cos.\delta$	$z^{V}=z^{IV}$	$z^{VI}=z^{V}\cos.\zeta+v^{V}\sin.\zeta=Z$
$v^{IV}=v^{III}$	$v^{V}=y^{IV}\sin.\varepsilon-v^{IV}\cos.\varepsilon$	$v^{VI}=z^{V}\sin.\zeta-v^{V}\cos.\zeta=V$

in quas formulas reuera ſex anguli arbitrarii ingrediuntur vt ſolutionis completae indoles poſtulat.

XXII. Iam perſpicuum eſt ope harum reductionum nouas quantitates X, Y, Z, V ita per primum aſſumtas x, y, z, v expreſſum iri, vt fiat $X = Ax + By + Cz + Dv$, ſimiliterque etiam reliquae vnde facta euolutione coefficientes ipſarum x, y, z, v in quatuor formis pro X, Y, Z, V oriundis ipſos eos ſedecim numeros praebebunt, qui requiruntur, pro ſolutione problematis propoſiti. Quae cum per ſe ſint manifeſta, non opus eſſe arbitror ſingulos valores harum ſedecim litterarum euoluere. Ceterum cum in harum ſex transformationum prima binae litterae x et y in ſecunda x et z in tertia x et v, in quarta y et z in quinta y et v et in ſexta z et v ſint transformatae, quae ſunt omnes combinationes poſſibiles; in hoc ipſo etiam continetur criterium ſolutionis completae.

XXIII. Quoniam autem hic occurrunt quatuor quantitates x, y, z, v in ſingulis operationibus duae transformationes binarum inſtitui poſſunt, quo pacto euolutio valorem quaeſitorum non mediocriter ſubleuatur, vti iterum cauendum ne inter easdem

 binas

binas litteras plus vna transformatione ſuſcipiatur. Sic autem totum negotium tribus operationibus abſolui poterit hoc modo.

I.	II.	III.
$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$	$x'' = x'\cos\gamma + z'\sin\gamma$	$x''' = x''\cos\varepsilon + v''\sin\varepsilon = X$
$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha$	$y'' = y'\cos\delta + v'\sin\delta$	$y''' = y''\cos\zeta + z''\sin\zeta = Y$
$z' = z\sin\beta + v\sin\beta$	$z'' = x'\sin\gamma - z'\cos\gamma$	$z''' = y''\sin\zeta - z''\cos\zeta = Z$
$v' = z\sin\beta - v\cos\beta$	$v'' = y'\sin\delta - v'\cos\delta$	$v''' = x''\sin\varepsilon - v''\cos\varepsilon = V.$

Harum formularum euolutio pro ſedecim numeris quaeſitis ſequentes praebet valores:

$$A = \left\{\begin{matrix} +\cos\alpha\cos\gamma\cos\varepsilon \\ +\sin\alpha\sin\delta\sin\varepsilon \end{matrix}\right\}; \quad B = \left\{\begin{matrix} +\sin\alpha\cos\gamma\cos\varepsilon \\ -\cos\alpha\sin\delta\sin\varepsilon \end{matrix}\right\};$$

$$C = \left\{\begin{matrix} +\cos\beta\sin\gamma\cos\varepsilon \\ -\sin\beta\cos\delta\sin\varepsilon \end{matrix}\right\}; \quad D = \left\{\begin{matrix} +\sin\beta\sin\gamma\cos\varepsilon \\ +\cos\beta\cos\delta\sin\varepsilon \end{matrix}\right\}$$

$$E = \left\{\begin{matrix} +\sin\alpha\cos\delta\cos\zeta \\ +\cos\alpha\sin\gamma\sin\zeta \end{matrix}\right\}; \quad F = \left\{\begin{matrix} -\cos\alpha\cos\delta\cos\zeta \\ +\sin\alpha\sin\gamma\sin\zeta \end{matrix}\right\};$$

$$G = \left\{\begin{matrix} +\sin\beta\sin\delta\cos\zeta \\ -\cos\beta\cos\gamma\sin\zeta \end{matrix}\right\}; \quad H = \left\{\begin{matrix} -\cos\beta\sin\delta\cos\zeta \\ -\sin\beta\cos\gamma\sin\zeta \end{matrix}\right\}$$

$$I = \left\{\begin{matrix} +\sin\alpha\cos\delta\sin\zeta \\ -\cos\alpha\sin\gamma\cos\zeta \end{matrix}\right\}; \quad K = \left\{\begin{matrix} -\cos\alpha\cos\delta\sin\zeta \\ -\sin\alpha\sin\gamma\cos\zeta \end{matrix}\right\};$$

$$L = \left\{\begin{matrix} +\sin\beta\sin\delta\sin\zeta \\ +\cos\beta\cos\gamma\cos\zeta \end{matrix}\right\}; \quad M = \left\{\begin{matrix} -\cos\beta\sin\delta\sin\zeta \\ +\sin\beta\cos\gamma\cos\zeta \end{matrix}\right\}$$

$$N = \left\{\begin{matrix} +\cos\alpha\cos\gamma\sin\varepsilon \\ -\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon \end{matrix}\right\}; \quad O = \left\{\begin{matrix} +\sin\alpha\cos\gamma\sin\varepsilon \\ +\cos\alpha\sin\delta\cos\varepsilon \end{matrix}\right\};$$

$$P = \left\{\begin{matrix} +\cos\beta\sin\gamma\sin\varepsilon \\ +\sin\beta\cos\delta\cos\varepsilon \end{matrix}\right\}; \quad Q = \left\{\begin{matrix} +\sin\beta\sin\gamma\sin\varepsilon \\ -\cos\beta\cos\delta\cos\varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

XXIV. Circa hos autem ſedecim valores, quibus decem conditiones in problemate allatae implentur, hanc inſignem proprietatem locum habere obſeruo, vt iisdem quoque ſequentibus decem conditionibus ſatisfiat:

11°. $AA+BB+CC+DD=1$; 15°. $AE+BF+CG+DH=0$
12°. $EE+FF+GG+HH=1$; 16°. $AI+BK+CL+DM=0$
14°. $II+KK+LL+MM=1$; 17°. $AN+BO+CP+DQ=0$
14°. $NN+OO+PP+QQ=1$; 18°. $EI+FK+GL+HM=0$
19°. $EN+FO+GP+HQ=0$
20°. $IN+KO+LP+MQ=0$.

Quod eſt Theorema prorſus memorabile ac ſimile ei, quod initio circa nouem tantum numeros demonſtraui. Eo autem modo, quo ibi demonſtrationem adornaui, hic quidem ob litterarum multitudinem vti non licebit; ſed quoniam ad hos valores generales ſucceſſiue peruenire docui, demonſtratio ita conuenientiſſime conficietur, vt ſi haec proprietas in valoribus quibusque antecedentibus, locum habuerit, eadem quoque in ſequentibus per transformationem inde deriuatis locum habere oſtendatur.

XXV. Conſideremus igitur valores quoscunque intermedios qui per quatuor primitiuas quantitates x, y, z, v ita definiantur, vt ſit

$$x^{(n)}=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}z+\mathfrak{D}v;\quad y^{(n)}=\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}y+\mathfrak{G}z+\mathfrak{H}v$$
$$z^{(n)}=\mathfrak{I}x+\mathfrak{K}y+\mathfrak{L}z+\mathfrak{M}v;\quad v^{(n)}=\mathfrak{N}x+\mathfrak{O}y+\mathfrak{P}z+\mathfrak{Q}v$$

vbi coefficientes ita ſint comparati, vt ſupra memoratis conditionibus ſatisfaciant; ſcilicet vt ſit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{D}\mathfrak{D}=1\,; \quad \mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H}=0$$
$$\mathfrak{E}\mathfrak{E}+\mathfrak{F}\mathfrak{F}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\mathfrak{H}\mathfrak{H}=1\,; \quad \mathfrak{A}\mathfrak{I}+\mathfrak{B}\mathfrak{K}+\mathfrak{C}\mathfrak{L}+\mathfrak{D}\mathfrak{M}=0$$
$$\mathfrak{I}\mathfrak{I}+\mathfrak{K}\mathfrak{K}+\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{M}\mathfrak{M}=1\,; \quad \mathfrak{A}\mathfrak{N}+\mathfrak{B}\mathfrak{O}+\mathfrak{C}\mathfrak{P}+\mathfrak{D}\mathfrak{Q}=0$$
$$\mathfrak{N}\mathfrak{N}+\mathfrak{O}\mathfrak{O}+\mathfrak{P}\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}=1\,; \quad \mathfrak{E}\mathfrak{I}+\mathfrak{F}\mathfrak{K}+\mathfrak{G}\mathfrak{L}+\mathfrak{H}\mathfrak{M}=0$$
$$\mathfrak{E}\mathfrak{N}+\mathfrak{F}\mathfrak{O}+\mathfrak{G}\mathfrak{P}+\mathfrak{H}\mathfrak{Q}=0$$
$$\mathfrak{I}\mathfrak{N}+\mathfrak{K}\mathfrak{O}+\mathfrak{L}\mathfrak{P}+\mathfrak{M}\mathfrak{Q}=0$$

quae conditiones vtique in prima poſitione locum habent, vbi eſt $x^{(n)}=x$, $y^{(n)}=y$, $z^{(n)}=z$, $v^{(n)}=v$; ſiquidem tum habetur:

$$\mathfrak{A}=1\,; \quad \mathfrak{E}=0\,; \quad \mathfrak{I}=0\,; \quad \mathfrak{N}=0$$
$$\mathfrak{B}=0\,; \quad \mathfrak{F}=1\,; \quad \mathfrak{K}=0\,; \quad \mathfrak{O}=0$$
$$\mathfrak{C}=0\,; \quad \mathfrak{G}=0\,; \quad \mathfrak{L}=1\,; \quad \mathfrak{P}=0$$
$$\mathfrak{D}=0\,; \quad \mathfrak{H}=0\,; \quad \mathfrak{M}=0\,; \quad \mathfrak{Q}=1.$$

XXVI. Ponamus ex illis valoribus per tranſformationem ſequentes ita deriuari

vt poſito	prodeant hi valores deriuati
$x^{(n+1)}=x^{(n)}\text{coſ.}\theta+y^{(n)}\text{ſin.}\theta$	$x^{(n+1)}=\mathfrak{A}'x+\mathfrak{B}'y+\mathfrak{C}'z+\mathfrak{D}'v$
$y^{(n+1)}=x^{(n)}\text{ſin.}\theta-y^{(n)}\text{coſ.}\theta$	$y^{(n+1)}=\mathfrak{E}'x+\mathfrak{F}'y+\mathfrak{G}'z+\mathfrak{H}'v$
$z^{(n+1)}=z^{(n)}$	$z^{(n+1)}=\mathfrak{I}'x+\mathfrak{K}'y+\mathfrak{L}'z+\mathfrak{M}'v$
$v^{(n+1)}=v^{(n)}$	$v^{(n+1)}=\mathfrak{N}'x+\mathfrak{O}'y+\mathfrak{P}'z+\mathfrak{Q}'v$

eritque:

$$\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\theta+\mathfrak{E}\,\text{ſin.}\theta\,; \quad \mathfrak{E}'=\mathfrak{A}\,\text{ſin.}\theta-\mathfrak{E}\,\text{coſ.}\theta\,; \quad \mathfrak{I}'=\mathfrak{I}\,; \quad \mathfrak{N}'=\mathfrak{N}$$
$$\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}\,\text{coſ.}\theta+\mathfrak{F}\,\text{ſin.}\theta\,; \quad \mathfrak{F}'=\mathfrak{B}\,\text{ſin.}\theta-\mathfrak{F}\,\text{coſ.}\theta\,; \quad \mathfrak{K}'=\mathfrak{K}\,; \quad \mathfrak{O}'=\mathfrak{O}$$
$$\mathfrak{C}'=\mathfrak{C}\,\text{coſ.}\theta+\mathfrak{G}\,\text{ſin.}\theta\,; \quad \mathfrak{G}'=\mathfrak{C}\,\text{ſin.}\theta-\mathfrak{G}\,\text{coſ.}\theta\,; \quad \mathfrak{L}'=\mathfrak{L}\,; \quad \mathfrak{P}'=\mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{D}'=\mathfrak{D}\,\text{coſ.}\theta+\mathfrak{H}\,\text{ſin.}\theta\,; \quad \mathfrak{H}'=\mathfrak{D}\,\text{ſin.}\theta-\mathfrak{H}\,\text{ſin.}\theta\,; \quad \mathfrak{M}'=\mathfrak{M}\,; \quad \mathfrak{Q}'=\mathfrak{Q}.$$

Vnde

Vnde quidem hae conditiones iam ſponte implentur:

$\mathfrak{I}'\mathfrak{I}'+\mathfrak{K}'\mathfrak{K}'+\mathfrak{L}'\mathfrak{L}'+\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'=1$; $\mathfrak{I}'\mathfrak{N}'+\mathfrak{K}'\mathfrak{O}'+\mathfrak{L}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{M}'\mathfrak{Q}'=0$
$\mathfrak{N}'\mathfrak{N}'+\mathfrak{O}'\mathfrak{O}'+\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}'=1$.

XXVII. Reliquis vero etiam conditionibus ſatisfieri facile oſtenditur; erit enim:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{C}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{D}' = \left.\begin{array}{l} +(\mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{D}\mathfrak{D})\,\text{coſ.}\,\theta^2 \\ +(\mathfrak{E}\mathfrak{E}+\mathfrak{F}\mathfrak{F}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\mathfrak{H}\mathfrak{H})\,\text{ſin.}\,\theta^2 \\ +2(\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H})\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta \end{array}\right\}$$

$$= \left.\begin{array}{l} +1.\,\text{coſ.}\,\theta^2 \\ +1.\,\text{ſin.}\,\theta^2 \\ +0.\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta \end{array}\right\} = 1$$

quod ſimili modo de ſumma quadratorum ſecundae columnae $\mathfrak{E}'\mathfrak{E}'+\mathfrak{F}'\mathfrak{F}'+\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'+\mathfrak{H}'\mathfrak{H}'$ oſtenditur. Deinde etiam res manifeſta eſt circa ſummam productorum:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{I}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{K}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{L}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{M}' = \left.\begin{array}{l} -(\mathfrak{A}\mathfrak{I}+\mathfrak{B}\mathfrak{K}+\mathfrak{C}\mathfrak{L}+\mathfrak{D}\mathfrak{M})\,\text{coſ.}\,\theta \\ +(\mathfrak{E}\mathfrak{I}+\mathfrak{F}\mathfrak{K}+\mathfrak{G}\mathfrak{L}+\mathfrak{H}\mathfrak{M})\,\text{ſin.}\,\theta \end{array}\right\} = 0$$

pariterque etiam circa has ſummas:

$\mathfrak{A}'\mathfrak{N}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{O}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{Q}'=0$; $\mathfrak{E}'\mathfrak{I}'+\mathfrak{F}'\mathfrak{K}'+\mathfrak{G}'\mathfrak{L}'+\mathfrak{H}'\mathfrak{M}'=0$
et $\mathfrak{E}'\mathfrak{N}'+\mathfrak{F}'\mathfrak{O}'+\mathfrak{G}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{H}'\mathfrak{Q}'=0$

vnde tantum relinquitur haec:

$\mathfrak{A}'\mathfrak{E}'$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{E}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{F}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{H}'=\left.\begin{aligned}&+(\mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{D}\mathfrak{D})\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta\\&-(\mathfrak{E}\mathfrak{E}+\mathfrak{F}\mathfrak{F}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\mathfrak{H}\mathfrak{H})\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta\\&+(\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H})\,\text{ſin.}\,\theta^2\\&-(\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H})\,\text{coſ.}\,\theta^2\end{aligned}\right\}$$

$$=\left.\begin{aligned}&+\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta\\&-\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta\\&+0\,\text{ſin.}\,\theta^2\\&-0\,\text{coſ.}\,\theta^2\end{aligned}\right\}=0$$

XXVIII. Cum igitur harum decem conditionum veritas in poſitione prima, vti iam oſtendi, ſit manifeſta, etiam in poſitione ſecunda per transformationem binarum inde deducta quoque ſubſiſtet, hincque etiam in omnibus ſequentibus poſitionibus ſimili modo ex praecedentibus deductis. Quocirca etiam ſolutio generalis ſex transformationibus vti in §. 21. abſoluta ita erit comparata, vt non ſolum decem conditionibus in problemate praeſcriptis, ſed etiam alteris illis decem §. 24. commemoratis ſatisfaciat: hocque ita vt decem prioribus conditionibus ſatisfieri nequeat, quin ſimul decem poſterioribus ſatisfiat. Atque hinc iam facile colligitur eandem proprietatem etiam in problematibus, vbi ſimilis quaeſtio circa 25. 36 pluresque numeros inſtituitur, ſemper locum habere debere. Progredior igitur ad ſequens.

Problema.

Inuenire 25 numeros A, B, C, D etc. ita in formam quadrati diſponendos:

vt

vt ſummae quadratorum ex ſingulis columnis tam verticalibus quam horizontalibus deſumtorum

$$\begin{matrix} A, & B, & C, & D, & E \\ F, & G, & H, & I, & K \\ L, & M, & N, & O, & P \\ Q, & R, & S, & T, & U \\ V, & W, & X, & Y, & Z \end{matrix}$$

vnitati aequentur, ſummae productorum autem ex binis columnis ſiue verticalibus ſiue horizontalibus formatorum euaneſcant.

XXIX. Ex praecedentibus intelligitur hoc problema eo reduci, vt ſumtis iſtis 25 numeris pro coefficientibus, quinque variabiles u, v, x, y z per huiusmodi formulas in alias transformentur:

$$U = Au + Bv + Cx + Dy + Ez$$
$$V = Fu + Gv + Hx + Iy + Kz$$
$$X = Lu + Mv + Nx + Oy + Pz$$
$$Y = Qu + Rv + Sx + Ty + Uz$$
$$Z = Vu + Wv + Xx + Yy + Zz$$

vt fiat:

$$UU + VV + XX + YY + ZZ = uu + vv + xx + yy + zz.$$

Quod ergo problema, cum quinque quantitates 10 combinationes diuerſas binarum admittant, per decem transformationes ſucceſſiue in binis inſtituendas, reſoluetur, hoc modo:

I.	II.	III.
$u^{I}=u\,\text{coſ}.\alpha+v\,\text{ſin}.\alpha$	$u^{II}=u^{I}\text{coſ}.\beta+x^{I}\text{ſin}.\beta$	$u^{III}=u^{II}\text{coſ}.\gamma+y^{II}\text{ſin}.\gamma$
$v^{I}=u\,\text{ſin}.\alpha-v\,\text{coſ}.\alpha$	$v^{II}=v^{I}$	$v^{III}=v^{II}$
$x^{I}=x$	$x^{II}=u^{I}\text{ſin}.\beta-x^{I}\text{coſ}.\beta$	$x^{III}=x^{II}$
$y^{I}=y$	$y^{II}=y^{I}$	$y^{III}=u^{II}\text{ſin}.\gamma-y^{II}\text{coſ}.\gamma$
$z^{I}=z$	$z^{II}=z^{I}$	$z^{III}=z^{II}$
IV.	**V.**	**VI.**
$u^{IV}=u^{III}\text{coſ}.\delta+z^{III}\text{ſin}.\delta$	$u^{V}=u^{IV}$	$u^{VI}=u^{V}$
$v^{IV}=v^{III}$	$v^{V}=v^{IV}\text{coſ}.\varepsilon+x^{IV}\text{ſin}.\varepsilon$	$v^{VI}=v^{V}\text{coſ}.\zeta+y^{V}\text{ſin}.\zeta$
$x^{IV}=x^{III}$	$x^{V}=v^{IV}\text{ſin}.\varepsilon-x^{IV}\text{coſ}.\varepsilon$	$x^{VI}=x^{V}$
$y^{IV}=y^{III}$	$y^{V}=y^{IV}$	$y^{VI}=v^{V}\text{ſin}.\zeta-y^{V}\text{coſ}.\zeta$
$z^{IV}=u^{III}\text{ſin}.\delta-z^{III}\text{coſ}\,\delta$	$z^{V}=z^{IV}$	$z^{VI}=z^{V}$
VII.	**VIII.**	**X.**
$u^{VII}=u^{VI}$	$u^{VIII}=u^{VII}$	$u^{IX}=u^{VIII}$
$v^{VII}=v^{VI}\text{coſ}.\eta+z^{VI}\text{ſin}.\eta$	$v^{VIII}=v^{VII}$	$v^{IX}=v^{VIII}$
$x^{VII}=x^{VI}$	$x^{VIII}=x^{VII}\text{coſ}.\theta+y^{VII}\text{ſin}.\theta$	$x^{IX}=x^{VIII}\text{coſ}.\varkappa+z^{VIII}\text{ſin}.\varkappa$
$y^{VII}=y^{VI}$	$y^{VIII}=x^{VII}\text{ſin}.\theta-y^{VII}\text{coſ}.\theta$	$y^{IX}=y^{VIII}$
$z^{VII}=v^{VI}\text{ſin}.\eta-z^{VI}\text{coſ}.\eta$	$z^{VIII}=z^{VII}$	$z^{IX}=z^{VIII}\text{ſin}.\varkappa-z^{VIII}\text{coſ}.\varkappa$

X.

$$u^{X}=u^{IX}\quad=\!=\!=\quad U$$
$$v^{X}=v^{IX}\quad=\!=\!=\quad V$$
$$x^{X}=x^{IX}\quad=\!=\!=\quad X$$
$$y^{X}=y^{IX}\text{coſ}.\lambda+z^{IX}\text{ſin}.\lambda=Y$$
$$z^{X}=z^{IX}\text{ſin}.\lambda-z^{IX}\text{coſ}.\lambda=Z.$$

XXX. His ergo operationibus decem anguli arbitrarii introducuntur, in quo character ſolutionis completae ſeu generalis conſiſtit. Cum enim conditiones ex columnis verticalibus petitae problemati ſoluendo ſufficiant, indeque alterae conditiones ad colum-

columnas horizontales ſpectantes ſponte impleantur; quadratorum ſummae praebent 5, producta vero ex binis 10 aequationes; ita vt omnino 15 conditionibus ſit ſatisfaciendum; quare cum 25 numeri inueſtigandi proponantur, ex iis decem adhuc manebunt indeterminati, in quo etiam ſolutio hic data egregie conſentit, dum plures quam 10 transformationes, quae quidem circa binas quantitates diuerſas inſtituantur, locum habere nequeunt.

XXXI. Quo illarum formularum euolutio facilior reddatur, qualibet operatione duae transformationes coniungi poſſunt, prorſus vt in ſolutione praecedentis probl matis eſt factum. Has autem coniunctiones ita capi conuenit, vt quantitas ſolitaria nullam mutationem patiens in omnibus ſit diuerſa: id quod euenit ſi binae praecedentium transformationum hoc modo coniungantur:

(I. VIII), (II, VII), (III, IX), (IV, VI), (V, X)

vnde ſequentes quinque transformationes oriuntur:

I.	II.	III.
$u^{I}=u\,\text{coſ}\,\alpha+v\,\text{ſin.}\,\alpha$	$u^{II}=u^{I}\text{coſ.}\,\gamma+x^{I}\text{ſin.}\,\gamma$	$u^{III}=u^{II}\text{coſ.}\,\varepsilon+y^{II}\,\text{ſin.}\,\varepsilon$
$v^{I}=u\,\text{ſin}\,\alpha-v\,\text{coſ.}\,\alpha$	$v^{II}=v^{I}\text{coſ.}\,\delta+z^{I}\,\text{ſin.}\,\delta$	$v^{III}=v^{II}$
$x^{I}=x\,\text{coſ}\,\beta+y\,\text{ſin.}\,\beta$	$x^{II}=u^{I}\text{ſin.}\,\gamma-x^{I}\text{coſ.}\,\gamma$	$x^{III}=x^{II}\text{coſ}\,\zeta+z^{II}\text{ſin.}\,\zeta$
$y^{I}=x\,\text{ſin}\,\beta-y\,\text{coſ.}\,\beta$	$y^{II}=y^{I}$	$y^{III}=u^{II}\text{ſin.}\,\varepsilon-y^{II}\text{coſ.}\,\varepsilon$
$z^{I}=z$	$z^{II}=v^{I}\text{ſin.}\,\delta-z^{I}\,\text{coſ}\,\delta$	$z^{III}=x^{II}\text{ſin.}\,\zeta-z^{II}\text{coſ}\,\zeta$

IV.	V.
$u^{IV} = u^{III} \text{coſ.}\,\eta + z^{III} \text{ſin.}\,\eta$	$u^{V} = u^{IV}$
$v^{IV} = v^{III} \text{coſ.}\,\theta + y^{III} \text{ſin.}\,\theta$	$v^{V} = v^{IV} \text{coſ.}\,\varkappa + x^{IV} \text{ſin.}\,\varkappa$
$x^{IV} = x^{III}$	$x^{V} = v^{IV} \text{ſin.}\,\varkappa - z^{IV} \text{coſ.}\,\varkappa$
$y^{IV} = v^{III} \text{ſin.}\,\theta - y^{III} \text{coſ.}\,\theta$	$y^{V} = y^{IV} \text{coſ.}\,\lambda + z^{IV} \text{ſin.}\,\lambda$
$z^{IV} = u^{III} \text{ſin.}\,\eta - z^{III} \text{coſ.}\,\eta$	$z^{V} = y^{IV} \text{ſin.}\,\lambda - z^{IV} \text{coſ.}\,\lambda$

XXXII. Simili modo problemata huius generis circa 36 pluresque numeros, quorum quidem multitudo eſt numerus quadratus reſolui poſſunt; vbi pro calculo contrahendo non ſolum duas, ſed etiam tres ac deinceps plures transformationes in vna operatione complecti licebit; Atque hic perpetuo pulcerrimus conſenſus inter ſolutionem generalem ex omnibus combinationibus eliciendam ac rei naturam deprehendetur. Poſito enim in genere quantitatum quaeſitarum numero $= nn$, quadratorum ſummae vnitati aequandae praebent n conditiones, productorum autem ex binis nihilo aequandae $\frac{nn-n}{2}$, ſicque coniunctim $\frac{nn+n}{2}$ conditiones, quo numero a numero quaeſitorum nn ablato, reſtat $\frac{nn-n}{2}$, ac propterea totidem ex quaeſitis manebunt indeterminati, ſeu ſolutio generalis totidem quantitates arbitrarias complecti debet, ſecundum regulam autem ſupra expoſitam in hunc finem $\frac{nn-n}{2}$ transformationibus eſt vtendum, quibus ergo praeciſe tot anguli arbitrarii in calculum introducuntur.

Proble-

Problematis initio propoſiti ſolutio generalis in numeris rationalibus.

XXXIII. Coronidis loco ſolutionem problematis noſtri e methodo Diophantea petitam, ſubiungam, quae ſequenti modo ſatis concinne exhiberi poteſt.

Sumantur pro lubitu quatuor numeri p, q, r, s ac poſita quadratorum eorum ſumma $pp + qq + rr + ss = u$ nouem numeri quaeſiti ita determinati reperiuntur:

$$A = \frac{pp + qq - rr - ss}{u};\quad B = \frac{2qr + 2ps}{u};\quad C = \frac{2qs - 2pr}{u}$$

$$D = \frac{2qr - 2ps}{u};\quad E = \frac{pp - qq + rr - ss}{u};\quad F = \frac{2pq + 2rs}{u}$$

$$G = \frac{2qs + 2pr}{u};\quad H = \frac{2rs - 2pq}{u};\quad I = \frac{pp - qq - rr + ss}{u}.$$

Hinc ſimpliciſſimi numeri, qui quidem inter ſe omnes ſint inaequales, colliguntur ſequentes in quadratum diſpoſiti:

$+\frac{47}{57}$	$+\frac{28}{57}$	$-\frac{16}{57}$
$+\frac{4}{57}$	$+\frac{23}{57}$	$+\frac{52}{57}$
$+\frac{32}{57}$	$-\frac{44}{57}$	$+\frac{17}{57}$

hic eſt $p = 6$, $q = 4$, $r = 2$, $s = 1$

$+\frac{53}{63}$	$+\frac{26}{63}$	$-\frac{22}{63}$
$-\frac{2}{63}$	$+\frac{43}{63}$	$+\frac{46}{63}$
$+\frac{34}{63}$	$-\frac{38}{63}$	$+\frac{37}{63}$

vbi eſt $p = 7$, $q = 3$, $r = 2$, $s = 1$

En adhuc alia fere aeque ſimplicia exempla

$+\frac{53}{71}$	$-\frac{42}{71}$	$+\frac{26}{71}$
$-\frac{18}{71}$	$+\frac{19}{71}$	$+\frac{66}{71}$
$+\frac{46}{71}$	$+\frac{54}{71}$	$-\frac{3}{71}$

$+\frac{86}{99}$	$+\frac{38}{99}$	$-\frac{31}{99}$
$-\frac{14}{99}$	$+\frac{79}{99}$	$+\frac{58}{99}$
$+\frac{47}{99}$	$-\frac{46}{99}$	$+\frac{74}{99}$

Pro caſu ſedecim numerorum.

XXXIV. Si pro caſu ſedecim numerorum ſimili modo in quadratum diſponendorum ſolutio in rationalibus deſideretur, vnde facile numeros non nimis magnos reperire liceat; methodus ſupra data ad hunc finem difficulter accommodatur. Alio autem modo prorſus ſingulari ſequentem ſolutionem latiſſime patentem ſum nactus, vbi ſumtis pro lubitu octo numeris a, b, c, d, p, q, r, s, ſedecim numeri in quadratum diſpoſiti ita ſe habent

$+ap+bq+cr+ds$	$+aq-bp+cs-dr$	$+ar-bs-cp+dq$	$+as+br-cq-dp$
$+aq-bp-cs+dr$	$-ap-bq+cr\ \ ds$	$-as-br-cq-dp$	$+ar\cdot bs+cp-dq$
$+ar\cdot bs-cp-dq$	$+as-br-cq+dp$	$-ap+bq-cr+ds$	$-aq-bp-cs-dr$
$+as-br+cq-dp$	$-ar-bs-cp-dq$	$+aq+bp-cs-dr$	$-ap+bq+cr-ds$

vbi ſumma quadratorum in ſingulis columnis ſiue horizontalibus ſiue verticalibus prodit vbique eadem $=(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)$. Quare vt hac ſummae vnitati aequentur, hanc expreſſionem quadratum reddi, per eiusque radicem ſingulos numeros diuidi oportet. Tum vero hi ſedecim numeri etiam hac gaudent proprietate, vt ſumma productorum ex binis columnis ſiue horizontalibus ſiue verticalibus ſumtorum vbique euaneſcat.

XXXV. Hinc ergo facile plurima exempla in numeris ſatis exiguis deduci poſſunt, inter quae ſequens ideo notatu dignum videtur, quod omnes numeri ſint inter ſe inaequales

				quadrata					
+37	+ 4	+ 1	+12	1369	16	1	144	1530
− 6	+33	−18	+ 9	36	1089	324	81	1530
+11	+ 8	− 7	−36	121	64	49	1296	1530
− 2	+19	+34	− 3	4	361	1156	9	1530
			ſummae	1530	1530	1530	1530	ſummae

ac de productis binorum res eſt manifeſta:

cum ſit $-6.37+4.33-1.18+9.12=0$

$$+4.37-6.33+8.11-2.19=0.$$

etc.

Generales autem formas inſpicienti facile patebit, per eas omnes illas 20 conditiones §. §. 20 et 24 allatas perfecte impleri, ſiquidem ſummae quaternorum quadratorum ad vnitatem reuocentur.

XXXVI. Solutio haec eo maiorem attentionem meretur quod ad eam nulla certa methodo, ſed potius quaſi diuinando ſum perductus: et quoniam ea adeo octo numeros arbitrarios implicat, qui quidem facta reductione ad vnitatem, ad ſeptem rediguntur, vix dubitare licet, quin iſta ſolutio ſit vniverſalis et omnes prorſus ſolutiones poſſibiles in ſe complectatur. Si quis ergo viam directam ad hanc ſolutionem manuducentem inueſtigauerit, inſignia certe ſubſidia Analyſi attuliſſe erit cenſendus. Vtrum autem ſimiles ſolutiones pro amplioribus quadratis, quae numeris 25, 36 et maioribus conſtant, expectare liceat, vix affirmare auſim. Non ſolum

autem

autem hinc Algebra communis ſed etiam Methodus Diophantea maxima incrementa adeptura videtur.

Problema curioſum.

Inuenire ſedecim numeros ita in quadratum diſponendos, vt non ſolum ſummae quadratorum per columnas tam horizontales quam verticales ſumtorum ſed etiam eae quae per diagonales ſumuntur, ſcilicet $A^2+F^2+L^2+Q^2$ et $D^2+G^2+K^2+N^2$ ſint omnes inter ſe aequales, ac praeterea producta binorum ita ſumtorum, vt ſupra eſt praeceptum, euaneſcant, ſcilicet

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

$$AE+BF+CG+DH=0 \qquad AB+EF+IK+NO=0$$
$$AI+BK+CL+DM=0 \qquad AC+EG+IL+NP=0$$
$$AN+BO+CP+DQ=0 \qquad AD+EH+IM+NQ=0$$
$$EI+FK+GL+HM=0 \qquad BC+FG+KL+OP=0$$
$$EH+FO+GP+HQ=0 \qquad BD+FH+KM+OQ=0$$
$$IH+KO+LP+MQ=0 \qquad CD+GH+LM+PQ=0.$$

Solutio.

Hic ergo proponuntur 22 conditiones, quibus ſatisfieri oportet; omiſſis autem duabus ad diagonales ſpectantibus, ſequens forma generalis reliquas omnes adimplet,

$+ap+bq+cr+ds$	$+ar-bs-cp+dq$	$-as-br+cq+dp$	$+aq-bp+cs-dr$
$-aq+dp+cs-dr$	$+as+br+cq+dp$	$+ar-bs+cp-dq$	$+ap+bq-cr-ds$
$+ar+bs-cp-dq$	$-ap+bq-cr+ds$	$+aq+bp+cs+dr$	$+as-br-cq+dp$
$-as+br-cq+ep$	$-aq-bp+cs+dr$	$-ap+bq+cr-ds$	$+ar+bs+cp+dq$

vbi

vbi ſumma quaternorum quadratorum ex columnis tam horizontalibus quam verticalibus ſumtorum eſt

$$(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)$$

cui vt etiam ſummae quadratorum per diagonales ſumtorum aequentur, ſequentes binas aequationes confici oportet:

$$+abpq+abrs+acpr+acqs+adps+adqr+bcqr+bcps+bdqs$$
$$+bdpr+cdrs+cdpq=0$$
$$-abpq-abrs+acpr+acqs-adps-adqr-bcqr-bcps+bdqs$$
$$+bdpr-cdrs-cdpq=0$$

ex quibus deducuntur hae duae:

$$(ac+bd)(pr+qs)=0$$
$$(ab+cd)(pq+rs)+(ad+bc)(ps+qr)=0.$$

Vnde hae duae determinationes eliciuntur:

I. $pr+qs=0$ et II. $\frac{a}{c}=\frac{-d(pq+rs)-b(ps+qr)}{b(pq+rs)+d(ps+qr)}$

ita vt adhuc ſex litterae arbitrio noſtro relinquantur.

Euoluamus exemplum ſumendo $p=6$, $q=3$, $r=1$, $s=-2$ vnde cum fiat $\frac{a}{c}=\frac{-16d+9b}{16b-9d}$, ſit $d=0$, $b=1$, $a=9$, $c=16$ et quadratum omnibus conditionibus ſatisfaciens erit

+73	−85	+65	−11
−53	+31	+107	+41
−89	−67	+ 1	−67
−29	−65	−35	+103

vbi ſummae quaternorum quadratorum ſecundum columnas tam horizontales quam verticales, itidem-

que ſecundum diagonales ſumtorum, prodeunt = 16900 ex quo ſi hi numeri diuiderentur per 130, hae ſummae omnes ad vnitatem redigerentur.

Si quem hic offendant numeri 65 et 67 bis occurrentes, adiungam aliud huiusmodi quadratum minoribus adeo numeris expreſſum.

+68	−29	+41	−37
−17	+31	+79	+32
+59	+28	−2	+61
−11	−77	+8	+49

vbi quaternorum quadratorum ſumma eſt 8515.

Notetur denique in his quadratis etiam quadrata tam numerorum angularium, quam mediorum eandem ſummam producere.

SOLVTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS ALGEBRAICI,

DE INVESTIGATIONE NVMERORVM CONTINVE PROPORTIONALIVM, QVORVM DATVR SVMMA *a*, ET SVMMA QVADRATORVM *b*.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Occurrunt in *Elementis Algebrae Saunderſonii*, ſolutiones duorum problematum a *Moivreo* allatae: de inueniendis quatuor aut quinque terminis progreſſionis geometricae, ex datis eorum ſumma et ſumma quadratorum. Has quam primum videre contigit, in mentem mihi venit, generaliter ſolui poſſe problema, quo quaeruntur numeri quotcunque continue proportionales, datis eorundem ſumma et ſumma quadratorum; in qua opinione deinceps quam maxime confirmatus fui exinde, quod in *Mac-laurini Algebra*, ſolutionis quoddam ſpecimen, pro illo tantum caſu, quo numerus terminorum eſt impar, traditam eſſe inueni. Quae itaque ad hanc quaeſtionem explicandam meditatus ſum, ea hoc loco exponere conſtitui, idque non tam propter vtilitatem

ex hoc problemate redundantem, quae ſane exigua eſt; quam egregia iſta calculi ſubſidia, quae ad eius ſolutionem requiruntur.

2. Sit $m+1$ numerus terminorum continue proportionalium, dicatur vero primus progreſſionis terminus x^m et vltimus y^m, quam ob rem liquet, totam progreſſionem ſequenti ratione exponi poſſe:

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + \ldots + x^2y^{m-2} + xy^{m-1} + y^m = a$$

ex quo itaque deducitur:

$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \ldots + x^4y^{2m-4} + x^2y^{2m-2} + y^{2m} = b,$$

multiplicata igitur priori harum aequationum per $x-y$ et poſteriori per $xx-yy$, eruitur inde $a(x-y) = x^{m+1} - y^{m+1}$ nec non $b(xx-yy) = x^{2m+2} - y^{2m+2}$, vnde diuidendo $b(xx-yy)$ per $a(x-y)$, fiet $\frac{b(x+y)}{a} = x^{m+1} + y^{m+1}$, ex quo deinceps colligitur $2x^{m+1} = \frac{b(x+y)}{a} + a(x-y)$ et $2y^{m+1} = \frac{b(x+y)}{a} + a(y-x)$, quod ſi igitur ponantur $a + \frac{b}{a} = 2d$ et $a - \frac{b}{a} = 2e$, erit $x^{m+1} = dx - ey$ et $y^{m+1} = dy - ex$, vel $y = \frac{x(d-x^m)}{e}$ et $x = \frac{y(d-y^m)}{e}$. Sit iam $d - x^m = z$, vnde $y = \frac{xz}{e}$ et $y^m = \frac{x^m z^m}{e^m}$, erit proinde $ex = y(d-y^m) = \frac{xz}{e}(\frac{d-x^m z^m}{e^m})$ ideoque $e^{m+2} = z(de^m - x^m z^m)$, vel in locum ipſius x^m ſubſtituendo $d-z$, fiet: $z^{m+2} - dz(z^m - e^m) - e^{m+2} = 0$. Haec vero aequatio, etiam hac ratione inueniri poteſt:

poteſt: quandoquidem ſit $y = \frac{xz}{e}$ et $x^m = d - z$, fiet $(d-z)(1 + \frac{z}{e} + \frac{z^2}{e^2} + \ldots + \frac{z^{m-1}}{e^{m-1}} + \frac{z^m}{e^m}) = a = d + e$, adeoque per proprietatem progreſſionis geometricae $\frac{(d+e)e^m - (d-z)z^m}{e^m} : e + z :: e : z$, ſeu $z^{m+2} - dz(z^m - e^m) - e^{m+2} = 0$.

3. Peruenimus quidem ſic ad aequationem, quam non niſi vnica quantitas incognita z ingreditur, adeoque ſi ipſius valor hinc per datas et conſtantes quantitates elici poteſt, patet problema eſſe ſolutum; circa allatam tamen hanc aequationem obſeruandum eſt, quod eadem in ſimpliciores mutari poſſit. Sit enim 1mo m numerus par vel $= 2n$, eritque ideo $z^{2n+2} - dz(z^{2n} - e^{2n}) - e^{2n+2} = 0$, quam aequationem per $ee - zz$ diuiſibilem eſſe patet, et diuiſione inſtituta habemus:

$$z^{2n} + e^2 z^{2n-2} + e^4 z^{2n-4} + \ldots + z^4 e^{2n-4} + z^2 e^{2n-2} + e^{2n} = dz(z^{2n-2} + z^{2n-4} e^2 + z^{2n-6} e^4 + \ldots + z^2 e^{2n-4} + e^{2n-2}) \quad (A)$$

2do Si m fuerit numerus impar, ponatur $m + 1 = 2n$, idcoque eo in caſu: $e^{2n+1} - z^{2n+1} - dz(e^{2n-1} - z^{2n-1}) = 0$, ex quo diuidendo per $e - z$ reperitur eſſe:

$$z^{2n} + z^{2n-1} e + z^{2n-2} e^2 + \ldots + z^2 e^{2n-2} + z e^{2n-1} + e^{2n} = dz(z^{2n-2} + z^{2n-3} e + z^{2n-4} e^2 + \ldots + z e^{2n-3} + e^{2n-2}) \quad (B)$$

Si igitur ex aequatione (A) quaeratur valor ipſius z, inſeruiet idem determinandis quantitatibus continue proportionalibus, quorum numerus eſt impar, aequatio vero (B) dabit quaeſitos valores, quoties numerus terminorum eſt par. Et in aequatione (A) quidem, z euehitur ad dignitatem $2n = m$, adeoque haec aequatio eſt gradus $2n$, quo numerus terminorum continue proportionalium, vnitate mulctatus exprimitur; verum in aequatione (B), ſumma dignitas ipſius z eſt $= 2n = m + 1$, ſeu aequalis numero terminorum.

4. Etſi allatae aequationes (A) et (B), videntur eſſe ſui generis ſimpliciſſimae, quarum ope quantitatem incognitam z inuenire licet; nouam tamen in computum introducendo quantitatem incognitam, fit, vt hae aequationes transformari queant in alias, quae ordinis ſunt n, ſemiſſis nimirum illius, ad quem (A) vel (B) pertinent. Etenim quum $(d-x^m)(d-y^m) = e^2$ conf. §. 2, fiet ponendo $d-y^m = v$, $vz = e^2$, adeoque cum in aequatione (A) pro e^2, e^4, e^6 etc. ſubſtituuntur valores ipſis aequales zv, $z^2 v^2$, $z^3 v^3$ etc. omnesque termini per z^n diuiduntur, orietur:

(C)

$$z^n + z^{n-1} v + z^{n-2} v^2 + \ldots + z v^{n-1} + v^n = d(z^{n-1} + z^{n-2} v + z^{n-3} v^2 + \ldots + z v^{n-2} + v^{n-1}).$$

Haec vero ipſa aequatio facile eruitur, ex iſta $e^{2n+2} - z^{2n+2} = dz(e^{2n} - z^{2n})$, quippe quae pro e^2 ſubſtituendo vz, mutatur in hanc: $v^{n+1} z^{n+1} - z^{2n+2} = dz(v^n z^n - z^{2n})$ vel $v^{n+1} - z^{n+1} = d(v^n - z^n)$, ex

quo

quo diuidendo per $v-z$, prodit aequatio (C). Quod vero ad aequationem (B) attinet, obſeruamus illam ſic exprimi poſſe:

$$z^{2n}+e^{2n}=(d-e)(z^{2n-1}+z^{2n-2}e+z^{2n-3}e^2+\ldots\ldots+z^2e^{2n-3}+ze^{2n-2}),$$

ſi igitur heic in locum ipſorum e^2, e^4, e^6 ſubſtituantur vz, v^2z^2, v^3z^3 etc. omnesque termini per z^n diuidantur, emerget

$$z^n+v^n=(d-e)(z^{n-1}+(e+v)z^{n-2}+(ev+v^2)z^{n-3}+\ldots\ldots+ev^{n-2}+v^{n-1})$$

vnde deducitur:

(D)

$z^n+z^{n-1}v+z^{n-2}v^2+\ldots\ldots+z^2v^{n-2}+zv^{n-1}+v^n=(d-e)(z^{n-1}+z^{n-2}v+z^{n-3}v^2+\ldots\ldots+zv^{n-2}+v^{n-1})+de(z^{n-2}+z^{n-3}v+z^{n-4}v^2+\ldots\ldots+zv^{n-3}+v^{n-2})$. Huius autem aequationis inueſtigatio ſequenti quoque ratione inſtitui poteſt, quia nimirum hoc in caſu $e^{2n+1}-z^{2n+1}=dz(e^{2n-1}-z^{2n-1})$ vel $e^{2n+2}-ez^{2n+1}=dz(e^{2n}-ez^{2n-1})$, ſubſtituendo igitur vz pro e^2, et diuidendo totam aequationem emergentem per z^{n+1}, fiet, $v^{n+1}-ez^n=dv^n-dez^{n-1}$ quum vero ſimili ratione eliciatur $z^{n+1}-ev^n=dz^n-dev^{n-1}$, ſubtrahendo hanc a priori, prodibit $v^{n+1}-z^{n+1}=(d-e)(v^n-z^n)+de(v^{n-1}-z^{n-1})$ et diuiſa denique hac per $v-z$, emerget aequatio ſupra allata (D).

5. Iam vt aequatio inuenta (C) transformari poſſit, aſſumatur $z+v=u$ et ponatur prius aequationis illius membrum, nimirum $z^n+z^{n-1}v+z^{n-2}v^2+\ldots\ldots+z^2v^{n-2}+zv^{n-1}+v^n=u^n+Ae^2u^{n-2}+Be^4u^{n-4}$ + etc., poſterius vero $d(z^{n-1}+z^{n-2}v+z^{n-3}v^2+\ldots\ldots+zv^n$

$+zv^{n-2}+v^{n-1})=d(u^{n-1}+\alpha e^2u^{n-3}+\beta e^4u^{n-5}+\gamma e^6u^{n-7}$ $+$ etc.), vnde fiet $u^n+Ae^2u^{n-2}+Be^4u^{n-4}+Ce^6u^{n-6}+$ etc. $=d(u^{n-1}+\alpha e^2u^{n-3}+\beta e^4u^{n-5}+\gamma e^6u^{n-7}+$ etc.), cuius aequationis indoles et natura erit manifeſta, modo valores coefficientium A, B, C etc. nec non α, β, γ etc. rite determinentur. Hunc in finem, ponantur euolui $(z+v)^n$, $(z+v)^{n-2}$ etc. et pro e^2, e^4, e^6 adhibeantur zv, z^2v^2, z^3v^3 etc., quo facto orietur

$$z^n+nz^{n-1}v+\frac{n.(n-1)}{1.2}z^{n-2}v^2+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}z^{n-3}v^3+\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}z^{n-4}v^4+\text{etc.}$$
$$+Az^{n-1}v+(n-2).Az^{n-2}v^2+\frac{(n-7).(n-3)}{1.2}Az^{n-3}v^3+\frac{(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3}Az^{n-4}v^4+\text{etc.}$$
$$+\ B\,z^{n-2}v^2+(n-4).Bz^{n-3}v^3+\frac{(n-4).(n-5)}{1.2}Bz^{n-4}v^4+\text{etc.}$$
$$+\ Cz^{n-3}v^3+\ (n-6).Cz^{n-4}v^4+\text{etc.}$$
$$+\ Dz^{n-4}v^4+\text{etc.}$$
$$=z^n+z^{n-1}v+z^{n-2}v^2+z^{n-3}v^3+\ldots+z^2v^{n-2}+zv^{n-1}+v^n.$$

Comparando nunc ſingulos inter ſe terminos, in quibus z et v ad eandem euehuntur dignitatem, inuenimus: $A=-(n-1)$;

$B=1-\frac{n.(n-1)}{1.2}-(n-2).A=\frac{(n-3).(n-2)}{1.2}$; $C=1-\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$ $-\frac{(n-2).(n-3)A}{1.2}-(n-4)\,B=-\frac{(n-5).(n-4).(n-3)}{1.2.3}$,

ſimili ratione definiuntur

$D=\frac{(n-7).(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3.4}$; $E=-\frac{(n-9).(n-8).(n-7).(n-6).(n-5)}{1.2.3.4.5}$

nec non reliqui coefficientes. Ipſorum autem α, β, γ etc. indoles eodem prorſus modo indagatur, adeo vt ſit

$\alpha=-(n-2)$; $\beta=\frac{(n-4).(n-3)}{1.2}$,

$\gamma=-\frac{(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3}$; $\delta=\frac{(n-8).(n-7).(n-6).(n-5)}{1.2.3.4}$.

His

His igitur coefficientium aeſtimationibus, in aequatione (E) ſubſtitutis, ſequens denique habebitur aequatio:

$$u^n-(n-1).e^2u^{n-2}+\frac{(n-3).(n-2)}{1.\,2}e^4u^{n-4}-\frac{(n-5).(n-4).(n-3)}{1.\,2.\,3}e^6u^{n-6}+\text{etc.}$$

(G)

$$=d\,(u^{n-1}-(n-2).\,e^2u^{n-3}+\frac{(n-4).(n-3)}{1.\,2}e^4u^{n-5}$$
$$-\frac{(n-6).(n-5).(n-4)}{1.\,2.\,3}e^6u^{n-7}+\text{etc.})$$

6. Legem ſecundum quam, coefficientes aequationis allatae progrediuntur, qui conſiderauerit, inueniet coefficientem K quantitatis $e^{2r}u^{n-2r}$, dum $2r < n$, hac ratione exprimi poſſe

$$K=\pm\frac{(n+1-2r).(n+2-2r)\ldots\ldots(n-r)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots\ldots r},$$

vbi obſeruandum venit, ſignum $+$ obtinere, ſi r ſit numerus par, ſignum vero $-$, ſi idem ſit impar. Vt proinde inueniatur coefficiens vltimi terminorum, ad prius aequationis membrum pertinentium, praeprimis notandum eſt, an n ſit numerus par, vtrum vero impar. In priori caſu ponatur $n=2r$, atque tum fiet $K\pm\frac{1.\,2.\,3\ldots r}{1.\,2.\,3\ldots r}=\pm 1$, at in poſteriori, ſit $n=2r+1$ vel $n-1=2r$, adeoque erit

$$K=\pm\frac{2.\,3\ldots\ldots r.\,r+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots r}=\pm(r+1).$$

Eadem quoque ratione coefficiens I quantitatis $de^{2s}u^{n-1-2s}$, quoties $2s$ non excedit $n-1$, inuenitur eſſe $=\pm\frac{(n-2s).(n+1-2s)\ldots\ldots(n-1-s)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s}$ afficietur autem I ſigno affirmatiuo, ſi s ſit numerus par, negatiuo vero, ſi ponatur impar. Hinc iterum diiudicabitur, quinam ſit coefficiens vltimi termini ad poſterius

aequationis membrum pertinentis. Scilicet poſito n numero pari atque $= 2s + 2$ erit

$$I = \pm \frac{2.\,3.\,4 \ldots\ldots s.\, s+1}{1.\,2.\,3 \ldots\ldots s} = \pm (s+1),$$

verum ſi n ſit numerus impar et $= 2s + 1$ erit

$$I = \pm \frac{1.\,2.\,3 \ldots\ldots s}{1.\,2.\,3 \ldots s} = \pm 1$$

Quum itaque poſito $n = 2r$, ſit idem $= 2s + 2$, erit $r = s + 1$ et quia in altero caſu $n = 2r + 1 = 2s + 1$, fiet quoque $r = s$. In caſu igitur priori erit is aequationis terminus, quem quantitas incognita u non ingreditur $\pm e^n$, in poſteriori vero $\pm de^{n-1}$, et de ſignorum variabilitate obſeruandum eſt, quod ſigna affirmatiua obtineant, ſi numeri n vel $n - 1$ fuerint multipli quaternarii, negatiua autem ſi binarii tantum. Ex his perſpicitur denique, quod ſi numerus terminorum continue proportionalium fuerit 3 vel 11, 19, 27 etc. fore aequationis terminum conſtantem d vel de^4, de^8, de^{12} etc. ſin vero ille numerus pertineat ad hanc ſeriem arithmeticam 5, 13, 21, 29 etc. erit quantitas iſta conſtans $-e^2$ vel $-e^6 - e^{10} - e^{14}$ etc., aſſumto iterum numero terminorum 7 vel 15, 23, 31 etc. fiet commemorata quantitas conſtans $-de^2, -de^6 - de^{10}$ etc., denique ſi numerus terminorum ſit ex hac progreſſione arithmetica 9, 17, 25, 33 etc. orientur quantitatis conſtantis valores, e^4, e^8, e^{12} etc.

7. Inuento per aequationem (G) valore ipſius u, quantitates z et v facili negotio determinantur, quum enim $z + v = u$ et $zv = e^2$, cognito u; z et v

quae-

quaeruntur, ope notiſſimi problematis, de inueniendis duabus quantitatibus, quarum datur ſumma et productum. Erit nimirum $u-z=v$ et $uz-z^2=e^2$, ex quo fit $z=\frac{1}{2}u\pm\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$, vbi ſimul obſeruandum, quod ſi fuerit $z=\frac{1}{2}u+\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$, fore $v=\frac{1}{2}u-\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$ et viciſſim. Hinc quoniam $z=d-x^m$ erit $x^m=d-\frac{1}{2}u\mp\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$ nec non $y^m=d-v=d-\frac{1}{2}u\pm\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$. Inuentis autem primo vel vltimo progreſſionis termino, reliqui facile innoteſcunt, nam $x^m : x^{m-1}y :: x : y :: e : z$ ideoque $x^{m-1}y=\frac{z\,x^m}{e}=\frac{z.(d-z)}{e}$, quomodo autem ex primo et ſecundo termino, reliqui determinentur per ſe patet.

8. Si iam aequationem (D) examini ſubiiciamus, inuenimus ſtatui poſſe:

1mo. $z^n+z^{n-1}v+z^{n-2}v^2+\ldots+zv^{n-1}+v^n=(z+v)^n$
$+Ae^2.(z+v)^{n-2}+Be^4.(z+v)^{n-4}+Ce^6.(z+v)^{n-6}+\text{etc.}$

2do. $(d-e)(z^{n-1}+z^{n-2}v+z^{n-3}v^2+\ldots+zv^{n-2}+v^{n-1})$
$=(d-e)((z+v)^{n-1}+\alpha e^2.(z+v)^{n-3}+\beta e^4.(z+v)^{n-5}$
$+\gamma e^6.(z+v)^{n-7}+\text{etc.})$ et

3^{io}. $de(z^{n-2}+z^{n-3}v+z^{n-4}v^2+\ldots+zv^{n-3}+v^{n-2})$
$=de((z+v)^{n-2}+Pe^2.(z+v)^{n-4}+Qe^4.(z+v)^{n-6}$
$+Re^6.(z+v)^{n-8}+\text{etc.})$,

vnde poſito vt antea $z+v=u$, prodit

$$u^n+\begin{matrix}Ae^2\\-de\end{matrix}u^{n-2}+\begin{matrix}Be^4\\-Pde^3\end{matrix}u^{n-4}+\begin{matrix}Ce^6\\-Qde^5\end{matrix}u^{n-6}+\text{etc.}=(d-e)(u^{n-1} \quad \text{(F)}$$
$+\alpha e^2u^{n-3}+\beta e^4u^{n-5}+\gamma e^6u^{n-7}+\text{etc.})$, haec vero

 aequatio

aequatio facile cognoſcetur inuentis valoribus coefficientium A, B, C, α, β, γ, P, Q, R etc. quorum determinatio ſecundum methodum ſupra praeſcriptam ita perficitur, vt ſit

$$A = -(n-1),\ B = \frac{(n-3).(n-2)}{1.2};\ C = -\frac{(n-5).(n-4).(n-3)}{1.2.3},$$
$$D = \frac{(n-7).(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3.4},\ \text{etc.}\ P = -(n-3),\ Q = \frac{(n-5).(n-4)}{1.2},$$
$$R = -\frac{(n-7).(n-6).(n-5)}{1.2.3}\ \text{etc.; nec non}\ \alpha = -(n-2),\ \beta = \frac{(n-4).(n-3)}{1.2},$$
$$\gamma = -\frac{(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3};\ \delta = \frac{(n-8).(n-7).(n-6).(n-5)}{1.2.3.4}\ \text{etc.}$$

ſurrogatis itaque in aequatione (F) his coefficientium valoribus elicitur denique:

$$u^n - ((n-1).e+d)eu^{n-2} + \left(\frac{(n-2).e+2d}{1.2}\right)(n-3)e^3u^{n-4}$$
$$\text{(H)}\qquad - \left(\frac{(n-3).e+3d}{1.2.3}\right)(n-5)(n-4)e^5u^{n-6} + \text{etc.}$$
$$= (d-e)\Big(u^{n-1} - (n-2).e^2u^{n-3} + \frac{(n-4).(n-3)}{1.2}e^4u^{n-5}$$
$$- \frac{(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3}e^6u^{n-7} + \text{etc.}\Big)$$

9. Serie coefficientium conſiderata, perſpicitur, quod poſito $2r < n$ ſit coefficiens quantitatis cuiusuis

$$e^{2r-1}u^{n-2r} = \pm \frac{((n-r).e+rd).(n+1-2r)(n+2-2r)\ldots(n-r-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots r},$$

vbi ſimul liquet, ſignum + locum obtinere, ſi r ſit numerus par, ſin vero impar, ſignum coefficientis erit negatiuum. Pro eo igitur caſu, quo $n = 2r$ erit vltimi termini ad prius aequationis membrum pertinentis coefficiens

$$K = \pm \frac{(re+rd)(1.2.3\ldots.r-1)}{1.2.3\ldots.r} = \pm(e+d),$$

quoties autem n impar, ideoque $2r+1 = n$, habetur

$$K = \pm \frac{((r+1)e+rd)(2.3\ldots.r)}{1.2.3\ldots.r} = \pm((r+1)e+rd)$$

Si

Si autem I deſignet coefficientem quantitatis $(d-e).e^{2s}u^{n-1-2s}$ atque ſit $2s < n-1$, erit

$$I = \pm \frac{(n-2s).(n+1-2s)\ldots\ldots(n-1-s)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s},$$

prout vero s fuerit numerus par vel impar, I ſigno $+$ vel $-$ afficietur. Terminus itaque vltimus poſterioris membri aequationis, pro eo caſu, quo n numerus par, ponendo $n = 2s+2$, habetur $= \pm \frac{2.\,3.\,4\ldots\ldots s+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s} = \pm (s+1)$, ſed ſi n numerus impar et $= 2s+1$ fit

$$I = \pm \frac{1.\,2.\,3\ldots\ldots s}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s} = \pm 1.$$

Hinc proinde ſi n ſit numerus par, erit aequationis propoſitae terminus is, quem quantitas incognita u non ingreditur $\pm (e+d)\,e^{n-1}$, ſin vero impar erit ille terminus $= \pm (d-e).\,e^{n-1}$. Denique et ex his colligitur, quod prout numeri terminorum continue proportionalium, aſſumantur ex quatuor hiſce progreſſionibus arithmeticis:

4, 12, 20, 28, 36 etc.
6, 14, 22, 30, 38 etc.
8, 16, 24, 32, 40 etc.
10, 18, 26, 34, 42 etc.

terminos aequationis conſtantes, fore ex quatuor his progreſſionibus geometricis

$$-(e+d).e \quad -(e+d).e^5 \quad -(e+d).e^9 \quad -(e+d).e^{13} \quad -(e+d).e^{17} \text{ etc.}$$
$$-(d-e).e^2 \quad -(d-e).e^6 \quad -(d-e).e^{10} \quad -(d-e).e^{14} \quad -(d-e).e^{18} \text{ etc.}$$
$$(d+e).e^3 \quad (d+e).e^7 \quad (d+e).e^{11} \quad (d+e).e^{15} \quad (d+e).e^{19} \text{ etc.}$$
$$(d-e).e^4 \quad (d-e).e^8 \quad (d-e).e^{12} \quad (d-e).e^{16} \quad (d-e).e^{20} \text{ etc.}$$

10. Quae ad art. 7. de aequatione (G) monuimus, eadem ad aequationem praeſentem (H) atque inde eruendos valores ipſorum z et v, nec non x^m et y^m rite adplicari poſſunt, erit nimirum $z = \frac{1}{2}u \pm \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - e^2)}$ et $x^m = d - \frac{1}{2}u \mp \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - e^2)}$ quorum valorum vterque adhiberi poteſt, et vnus primum progreſſionis terminum, alter vero vltimum dabit. Quomodo autem u ex aequationibus (G) et (H) per quantitates conſtantes exprimatur, ex doctrina de reſolutione aequationum innoteſcit, ad noſtrum itaque inſtitutum non amplius aliud pertinet, quam vt exemplis quibusdam, adplicationem ſolutionis noſtrae oſtendamus. Sit igitur 1mo numerus terminorum continue proportionalium 3, ſeu $x^2 + xy + y^2 = a$, eritque $m = 2$ et $n = 1$, atque in aequatione (G), 1 pro n ſubſtituendo, fit $u = d$, et quum $u = v + z = 2d - x^2 - y^2$ erit $x^2 + y^2 = d$, proinde $xy = a - d = e$, vnde cognito medio progreſſionis termino, extremi facile indagantur. Fit enim $xy = e = \frac{x^2(d - x^2)}{e}$, ideoque $x^2 = \frac{d \pm \sqrt{(d^2 - 4e^2)}}{2}$ quarum aeſtimationum, ſi vna pro x^2 aſſumatur, reliqua dabit valorem ipſius y^2. Ponamus 2do numerum terminorum proportionalium eſſe 4, hincque $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a$, quum igitur $m = 3 = 2n - 1$, fiet $n = 2$, vnde ſi in aequatione (H) pro n ſubſtituatur 2, emerget $u^2 - (d+e)e = (d-e)u$ nec non $u = \frac{d-e}{2} \pm \sqrt{(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2)}$. Quum itaque u duplicem hinc nanciſcatur valorem, diſpiciendum eſt, quinam eorum pro ſingulis aequationis propoſitae caſibus valeat. Dum igitur quaeruntur

runtur termini progreſſionis geometricae reales, obſeruandum eſt, quod ſi tam a quam b ſint numeri rationales poſitiui, fiet $u = \frac{d-e}{2} + \sqrt{(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2)}$; ſin vero manente b numero poſitiuo, fiat a negatiuus, erit $u = \frac{d-e}{2} - \sqrt{(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2)}$. Eſt enim $z = \frac{u}{2} \pm \sqrt{(\frac{u^2}{4} - e^2)}$, qui igitur valor ne fiat imaginarius, neceſſum eſt, vt ſit $u^2 > 4e^2$. Quoniam vero $u^2 = \frac{d^2+e^2}{2} + e^2 \pm (d-e)\sqrt{(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2)}$ fiet $4e^2 < \frac{d^2+e^2}{2} + e^2 \pm (d-e)\sqrt{(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2)}$ et $e^2 < \frac{(d-e)}{2}$ $(\frac{d+e}{2} \pm \sqrt{(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2)})$ vel $e^2 < \frac{b}{2a}(\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)})$.

Iam ſi vterque ipſorum b et a ſit numerus poſitiuus, ob $\frac{b}{2a}$ poſitiuum, quoque alter factor $\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$ eſſe debet poſitiuus et eſt quidem $\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$ poſitiuus, ſed $\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$ eſt negatiuus, nam multiplicato hoc numero per priorem, fit productum $-e^2$, proinde hoc in caſu erit $u = \frac{d-e}{2} + \sqrt{(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2)} = \frac{b}{2a} + \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$.

Iterum poſito, quod valor ipſius a ſit numerus negatiuus, manente b poſitiuo, erit $\frac{b}{2a}$ negatiuus, ideoque alter factor $\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$ negatiuum quoque habebit valorem, proinde retinere debemus $\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$, qui numerus eſt negatiuus, cum alter $\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$, ſit poſitiuus. vtriusque enim productum eſt $-e^2$, ex quo liquet pro hoc caſu fore $u = \frac{b}{2a} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$. Ceterum in vtroque quidem caſu, valores ipſius u heic reiectos retinere poſſu-

poſſemus, qui vero ex illis oriuntur progreſſionis termini, fient imaginarii. Quomodo autem ex inventa hac quantitate u, omnes progreſſionis terminos inuenire liceat, in §. 7. iam oſtenſum eſt. Sit denique numerus terminorum 5 et $x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + y^4 = a$, quum vero $m = 2n = 4$ fit $n = 2$, hinc ope aequationis (G) habetur $uu - ee = du$, vnde fit $u = \frac{d}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} d^2 + e^2)}$, vbi ſimilia obſeruanda, circa valores ipſius u, ac iſta, quae pro numero terminorum quaternario iam monuimus.

11. Quo vero magis perſpicua fiant, quae iam expoſita ſunt, exemplis quibusdam ea illuſtrabimus. Sint itaque ſumma quatuor terminorum proportionalium 30 et ſumma quadratorum 340, eſtque $d = 20 + \frac{2}{3}$, $e = 9 + \frac{1}{3}$ et $u = \frac{b}{2a} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)} = \frac{17}{3} + \sqrt{\frac{2809}{9}} = 23 + \frac{1}{3}$, z vero erit $= \frac{u}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} u^2 - e^2)}$ et $v = \frac{u}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} u^2 - e^2)}$, vnde $z = \frac{35}{3} + \sqrt{\frac{441}{9}} = 18 + \frac{2}{3}$, $v = 4 + \frac{2}{3}$, nec non $x^3 = d - z = 2$, $y^3 = d - v = 16$, et propter $x^2 y : x^3 :: z : e :: 2 : 1$ fit $x^2 y = 4$ ideoque $xy^2 = 8$, omnes igitur termini quaeſiti erunt 2, 4, 8, 16. Sit iam ſumma quatuor terminorum $= -20$ ſumma vero quadratorum 820, erit $d = -\frac{61}{2}$, $e = \frac{21}{2}$ et $u = \frac{41}{2} - \sqrt{\frac{841}{4}} = -35$, hinc vero fit $z = -\frac{35}{2} + \sqrt{\frac{784}{4}} = -\frac{7}{2}$ et $v = -\frac{63}{2}$ ideoque $x^3 = d - z = -27$, $y^3 = d - v = 1$, et quoniam $x^2 y : x^3 :: z : e :: -1 : 3$, fit $x^2 y = 9$, hinc $xy^2 = -3$, vnde omnes termini proportionales erunt 1, −3, +9, −27. Sit numerus terminorum 5, eorundem ſumma 62 et quadratorum aggregatum 1364, erit itaque $d = 42$,

$e = 20$

$e = 20$ et $u = \frac{d}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + e^2)} = 21 + \sqrt{841} = 50$, proinde $z = \frac{1}{2}u + \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - e^2)} = 25 + \sqrt{225} = 40$ $v = 10$, vnde prodit $x^4 = d - z = 2$ adeoque $x^3 y = \frac{z. x^4}{e} = 2 x^4 = 4$ omnes igitur progreſſionis termini erunt 2, 4, 8, 16, 32. Si iam ponatur numerus terminorum 5, eorum vero ſumma -122 et ſumma quadratorum 29524 erit $d = -182$, $e = 60$ et $u = \frac{d}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + e^2)} = -91 - \sqrt{11881} = -200$, hincque $z = \frac{1}{2}u + \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - e^2)} = -20$ et $v = -180$, quam ob rem fiet $x^4 = d - z = -162$ et quoniam $x^3 y = \frac{z. x^4}{e}$ oritur $x^3 y = 54$, $x^2 y^2 = -18$, $x y^3 = 6$ et denique $y^4 = -2$.

12. Ne autem quis exiſtimet, huius problematis ſolutionem, omni plane vſu deſtitui, oſtendam illam adhiberi poſſe, circa inuentionem radicum huius aequationis $x^{m+1} - 1 = 0$, vbi eum ſolummodo caſum conſiderabo, quo $m + 1$ eſt numerus impar, nam data pro hoc caſu reſolutione, non difficile erit inueſtigare illos factores pro caſu, quo $m + 1$ eſt numerus par. Quum vero conſtet allatam aequationem, vnicum habere factorem realem $x - 1$, facta diuiſione per eundem orietur:

$$x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

iam ſi omnium terminorum ſumantur quadrata, oſtendam eorum quoque ſummam fore o, dicatur vero eadem ſumma tantisper Φ, eritque

$$x^{2m} + x^{2m-2} + x^{2m-4} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 = \Phi,$$

in qua aequatione, propter m numerum parem, neceſſum eſt occurrere terminos $x^m, x^{m-2}, x^{m-4} \ldots x^4, x^2, 1$, ſi igitur ab hac aequatione ſubtrahatur ſuperior fiet: $x^{2m} + x^{2m-2} + x^{2m-4} + \ldots\ldots + x^{m+2} - x^{m-1} - x^{m-3} - \ldots\ldots - x^3 - x = \Phi$, ſeu $x^{2m-1} + x^{2m-3} + \ldots\ldots + x^{m+1} - x^{m-2} - x^{m-4} - \ldots\ldots - x^2 - 1 = \frac{\Phi}{x}$, cui ſi addatur valor ipſius Φ prius inuentus, emerget: $x^{2m} + x^{2m-1} + x^{2m-2} + \ldots\ldots x^{m+2} + x^{m+1} - x^{m-1} - x^{m-2} - x^{m-3} - \ldots\ldots - x^2 - x - 1 = \Phi \frac{(1+x)}{x}$, quae aequatio ob $x^m = -(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$ transformatur in hanc $x^m(x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^2 + x + 1) = \Phi \frac{(1+x)}{x} = 0$, quod ſane fieri nequit, niſi ſimul ſit $\Phi = 0$. Iam itaque quaeſtio eo reducitur vt inueniatur progreſſio geometrica, in qua omnium terminorum ſumma $= -1$, et itidem eorum quadratorum ſumma $= -1$, cuius quaeſtionis reſolutio, quum ſit m numerus par, dabitur per aequationem noſtram (G) et quoniam hoc in caſu, ſit $a = -1$, $b = -1$ ſit $2d = a + \frac{b}{a} = 0$ et $e = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a} = -1$, vnde aequatio illa (G) transformatur in hanc:

$$u^n - (n-1)u^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}u^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}u^{n-6} + \text{etc.} = 0,$$

nam alterum aequationis membrum ob $d = 0$ euaneſcit. Inuento itaque u per hanc aequationem, facile quoque dabitur x, eſt enim

$$x = y^m = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}u^2 - 1)}$$

conf. §. 7, ex quo liquet, quod quum pro u ex aequatione allata, prodeant n valores, numerum valorum ipſius x fore $2n = m$, hocque igitur negotio, omnes

omnes plane factores aequationis, $x^{m+1}-1=0$ inueniri. Ceterum obſeruandum eſt, quod ſufficiat vnicum valorem ipſius x eruiſſe, ſi enim hic valor ſit α, reliqui erunt α^2, α^3, $\alpha^4 \ldots \alpha^m$, α^{m+1}.

13. Si in aequatione proxime allata, pro u ſubſtituatur $2\,\text{coſ.}\,z$ mutabitur eadem in hanc:

$$2^n(\text{coſ.}\,z)^n-(n-1)2^{n-2}(\text{coſ.}\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}2^{n-4}(\text{coſ.}\,z)^{n-4}$$
$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}2^{n-6}(\text{coſ.}\,z)^{n-6}+\text{etc.}=0,$$

quum itaque ſit $\text{ſin.}\,(n+1)z=$

$$\text{ſin.}\,z(2^n(\text{coſ.}\,z)^n-(n-1)2^{n-2}(\text{coſ.}\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}2^{n-4}(\text{coſ.}\,z)^{n-4}$$
$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}2^{n-6}(\text{coſ.}\,z)^{n-6}+\text{etc.})$$

ſi ponatur $(n+1)z=\varpi$, denotante ϖ ſemiperipheriam circuli, cuius radius $=1$, fiet $\text{ſin.}\,(n+1)z=\text{ſin.}\,\varpi=0$, vnde apparet hanc aequationem:

$$2^n(\text{coſ.}\,z)^n-(n-1)2^{n-2}(\text{coſ.}\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}2^{n-4}$$
$$(\text{coſ.}\,z)^{n-4}-\text{etc.}=0,$$

inſeruire perficiendae diuiſioni anguli recti, cuius etiam ope notum eſt, factores huius aequationis $x^{m+1}-1=0$ inueſtigari.

14. Hinc vero perducimur ad egregiam transformationem aequationum noſtrarum (G) et (H), ſi nimirum omnes earum termini ſupponantur diuiſi per e^n et loco $\frac{u}{e}$ ſubſtituatur $2\,\text{coſ.}\,z$, prodibit quidem ex aequatione (G):

$$2^n(\text{coſ.}\,z)^n-(n-1)2^{n-2}(\text{coſ.}\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}2^{n-4}(\text{coſ.}\,z)^{n-4}$$
$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}2^{n-6}(\text{coſ.}\,z)^{n-6}+\text{etc.}$$

$$=\frac{d}{e}\Big(2^{n-1}(\text{coſ.}\,z)^{n-1}-(n-2)2^{n-3}(\text{coſ.}\,z)^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.\,2}2^{n-5}(\text{coſ.}\,z)^{n-5}$$
$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\,2.\,3}2^{n-7}(\text{coſ.}\,z)^{n-7}+\text{et.}\Big)$$

adeoque multiplicato vtroque membro per ſin. z, erit prius $=\text{ſin.}(n+1)z$, poſterius vero $=\frac{d}{e}\text{ſin.}\,nz$, vnde aequatio noſtra (G) in hanc tranſit $e.\,\text{ſin.}\,(n+1)z = d\,\text{ſin.}\,nz$, poſito quod $2\,\text{coſ.}\,z=\frac{u}{e}$. Similiter autem ex aequatione (H), ſequens orietur aequatio:

$$2^{n}(\text{coſ.}\,z)^{n}-(n-1)2^{n-2}(\text{coſ.}\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2}2^{n-4}(\text{coſ.}\,z)^{n-4}$$
$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3}2^{n-6}(\text{coſ.}\,z)^{n-6}+\text{etc.}$$
$$=\frac{(d-e)}{e}\Big(2^{n-1}(\text{coſ.}\,z)^{n-1}-(n-2)2^{n-3}(\text{coſ.}\,z)^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.\,2}2^{n-5}$$
$$(\text{coſ.}\,z)^{n-5}-\text{etc.}\Big)$$
$$+\frac{d}{e}\Big(2^{n-2}(\text{coſ.}\,z)^{n-2}-(n-3)2^{n-4}(\text{coſ.}\,z)^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{1.\,2}2^{n-6}$$
$$(\text{coſ.}\,z)^{n-6}-\text{etc.}\Big),$$

qua deinceps multiplicata per ſin. z, prouenit haec aequalitas:

$$e.\,\text{ſin.}\,(n+1)z=(d-e)\,\text{ſin.}\,nz+d.\,\text{ſin.}\,(n-1)z$$

in quam itaque (H) transformatur ponendo $u=2e\,\text{coſ.}\,z$, vnde etiam ob

$$\text{ſin.}\,(n+1)z=2\,\text{ſin.}\,nz.\,\text{coſ.}\,z-\text{ſin.}\,(n-1)z,$$

deducitur $(u+e-d)\,\text{ſin.}\,nz=(d+e)\,\text{ſin.}\,(n-1)z$.

15. Denique et obſeruari meretur, quod problematis allati ſolutio, cum vſu adhiberi poſſit, ad alias de progreſſionibus geometricis quaeſtiones ſolven-

vendas, quemadmodum ſi quaerantur termini progreſſionis geometricae, quorum numerus eſt impar, data ſumma horum terminorum alternorum. Erit enim per conditionem problematis:

$$x^m + x^{m-2}y^2 + x^{m-4}y^4 + \ldots + x^2y^{m-2} + y^m = d \text{ atque}$$

$$x^{m-1}y + x^{m-3}y^3 + \ldots + x^3y^{m-3} + xy^{m-1} = e,$$

addantur iam inuicem hae aequationes eritque:

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + x^{m-3}y^3 + \ldots + x^2y^{m-2} + xy^{m-1} + y^m = d + e$$

ſeu $\frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x - y} = d + e$, ſi vero a priori ſubtrahatur poſterior fit:

$$x^m - x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 - x^{m-3}y^3 + \ldots + x^2y^{m-2} - xy^{m-1} + y^m = \frac{x^{m+1} + y^{m+1}}{x + y} = d - e,$$

multiplicentur nouae hae aequationes, quo facto prodit $\frac{x^{2m+2} - y^{2m+2}}{x^2 - y^2} = dd - ee$ vel etiam:

$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \ldots + x^2y^{m-2} + y^{2m} = dd - ee,$$

adeoque quaeſtionis propoſitae ſolutio, iam reducitur ad inuentionem terminorum progreſſionis geometricae ex datis eorum ſumma et ſumma quadratorum. Hoc vero ipſum et ſequenti ratione oſtendi poteſt, ducatur e in $\frac{x}{y}$, eritque

$$\frac{ex}{y} = x^m + x^{m-2}y^2 + x^{m-4}y^4 + \ldots + x^2y^{m-2},$$

 vnde

vnde habetur $y^m = d - \frac{x}{y}$, ſimiliter multiplicetur e per $\frac{y}{x}$, fietque

$$\frac{ey}{x} = x^{m-2}y^2 + x^{m-4}y^4 + \ldots + x^2y^{m-2} + y^m,$$

ideoque $x^m = d - \frac{ey}{x}$, vnde demum $y^{m+1} = dy - ex$ et $x^{m+1} = dx - ey$, quarum vtraque in §. 2 occurrit. Hinc vero ſimul ſingularis quaedam proprietas progreſſionis geometricae, impari terminorum numero gaudentis elucet, quod nimirum ſi ſumantur quadrata, ex ſummis terminorum alternorum dd et ee, horum quadratorum differentia, aequalis ſit ſummae quadratorum ex ſingulis terminis.

DE

DE CRITERIIS INTEGRABILITATIS FORMVLARVM DIFFERENTIALIVM.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Criteria ex quibus dignoſci poteſt, vtrum formula quaedam differentialis integrationem admittat, nec ne? eo magis digna ſunt, quae omni accuratione enodentur; quo certius conſtat, ipſam integralium inueſtigationem ex cognitione huiusmodi criteriorum multum pendere. Si enim formula quaecunque differentialis, iis inſtructa ſit proprietatibus, quae ad integrabilitatem ipſius requiruntur; facillimum omnino eſt, verum eius integrale aſſignare; ſin vero iisdem deſtituatur, tum praeſcriptae hae conditiones integrabilitatis inſeruire ſaltem poterunt, ad inueſtigandam quantitatem, per quam formula iſta multiplicari debet, vt fiat integrabilis. Inter criteria vero integrabilitatis imprimis eminet illud, quod Illuſtr. EVLERVS in Tractatu de *Doctrina variationum* immortali ſuo operi *Inſtitut. Calculi integralis* annexo, inſigni hoc Theoremate complexus eſt:

Si

Si poſitis $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$; $dq = r\,dx$; $dr = s\,dx$ etc. vbi dx *pro conſtante habetur*, V *fuerit eiusmodi functio ipſarum* x, y, p, q, r etc. *vt poſito*

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ etc. fuerit}$$
$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \text{ etc.} = 0,$$

formula differentialis $V\,dx$ *per ſe erit integrabilis.*

Theorematis huius demonſtrationem Vir Illuſtr. loco citato ex principiis doctrinae variationum deduxit; ſuſpicatus tamen, eam ex ipſis principiis calculi differentialis adſtrui poſſe, quum doctrina variationum ab hoc argumento, haud parum aliena videatur. Elegantia igitur commemorati huius Theorematis non minus, quam ipſa argumenti dignitate allectus, in talem demonſtrationem, quae ſolius calculi differentialis principiis inniteretur, inquirere operae pretium duxi: ea autem feliciter obtenta, via mihi patuit ad plures alias elegantes proprietates formularum differentialium integrationem admittentium, quin etiam hae disquiſitiones anſam mihi praebuerunt, criteria integrabilitatis formularum differentialium duplicatarum, triplicatarum vel quacunque alia ratione complicatarum determinandi. Haec igitur omnia dum praeſenti Diſſertatione breuiter exponere conſtitui, me rem Geometris non penitus ingratam feciſſe confido.

2. Antequam vero ad propoſiti Theorematis demonſtrationem progrediar, neceſſum duxi fundamenti

menti loco ipſi ſubſternere inſignem iſtam proprietatem formularum differentialium integrabilium, quam Illuſtr. EVLERVS in *Inſtitut. Calculi Differentialis* Part. I. Cap. VII. §. 234. et ſeqq. tradidit, et quae proprietas ita enunciari poteſt:

Si Z *ſit functio quaecunque plurium variabilium* x, y, p, q, r etc., *et ex eius differentiatione oriatur*

$$dZ = \mu\, dx + \nu dy + \pi dp + \varkappa dq + \varrho dr \text{ etc.}$$

ſemper eſſe debebit:

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \text{ etc. } \left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) \text{ etc.}$$

vel in genere, ſi ex terminis quibus d Z *aequatur, ſumantur pro lubitu bini* ϱ d r *et* τ d t, *erit* $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dr}\right)$.

Inſignis haec proprietas generaliter locum habet, ſiue quantitates x, y, p, q etc. fuerint finitae a ſe inuicem non pendentes, ſeu quaedam earum vt p, q, r differentialia ipſius y primi, ſecundi et altiorum graduum inuoluant, quemadmodum ſi fuerit, $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ etc. poſito differentiali dx conſtante. Quum enim ſupponatur formulam differentialem:

$$dZ = \mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq + \text{etc.}$$

generaliter eſſe integrabilem, hoc eſt nulla ſuppoſita certa relatione inter x et y, facile intelligitur, quantitates p, q, r etc. tamquam prorſus independentes, ab x et y tractari poſſe. Inde vero quoque perſpicitur,

citur, omnes huiusmodi expreſſiones $(\frac{dx}{dy})$; $(\frac{dx}{dp})$; $(\frac{dx}{dq})$ etc. $(\frac{dy}{dx})$; $(\frac{dy}{dp})$ etc. $(\frac{dp}{dx})$; $(\frac{dp}{dy})$; $(\frac{dp}{dq})$ etc. nihlo aequales habendas eſſe, id quod ex ipſa ſignificatione huiusmodi expreſſionum euidenter patet. Haec ſcilicet expreſſio $dx(\frac{dp}{dx})$ ſignificat differentiale ipſius p quod prodit, ſi ſola quantitas x pro variabili habeatur; quum vero ſit $p = \frac{dy}{dx}$, nequaquam ſtatui poterit x, aut y quantitatem p ingredi, niſi aliqua relatio inter x et y ſupponatur, conſequenter differentiale ipſius p poſita x variabili erit $= 0$.

3. Nunc vero e re quoque erit, vt oſtendamus propoſitionis modo allatae conuerſam veritati conſentire; hoc eſt: *ſi proponatur formula quaedam differentialis*

$$dZ = \mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq + \text{etc.}$$

quae his gaudeat proprietatibus, vt ſit

$(\frac{d\mu}{dy}) = (\frac{d\nu}{dx})$; $(\frac{d\mu}{dp}) = (\frac{d\pi}{dx})$; etc. $(\frac{d\nu}{dp}) = (\frac{d\pi}{dy})$; $(\frac{d\nu}{dq}) = (\frac{d\varkappa}{dy})$ etc. $(\frac{d\pi}{dq}) = (\frac{d\varkappa}{dp})$ etc.

eam formulam ſemper eſſe integrabilem. Quo magis autem breuitati conſulamus, conſideremus heic tantum formulam differentialem ſequentem

$$\mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq$$

de qua oſtendemus, quod ea reapſe ſit integrabilis, modo requiſita iam allata ipſi competant; erit autem demonſtratio noſtra ita comparata, vt quiuis facile perſpicere queat, eam ad alias quasuis for-

mulas

mulas differentiales applicari poſſe. Sumatur igitur primi termini μdx integrale, quod prodit, ſi ſola quantitas x vt variabilis ſpectetur, ſitque integrale inde oriundum $= Y$, dein huius quantitatis Y ſumatur differentiale abſolutum, quod prodit, ſi omnes quantitates x, y, p, q etc. quae Y ingrediuntur, vt variabiles tractentur et ponamus eſſe:

$$dY = \mu' dx + \nu' dy + \pi' dp + \varkappa' dq$$

pro qua formula, quum per differentiationem ex Y deducta ſit, etiam hae conditiones locum habebunt:

$$\left(\frac{d\mu'}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu'}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu'}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu'}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right);\ \left(\frac{d\nu'}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dy}\right);$$
$$\left(\frac{d\nu'}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right);\ \left(\frac{d\pi'}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa'}{dp}\right).$$

Porro quum $\mu' dx$, ſit illud ipſius Y differentiale, quod prodit ex ſola variabilitate ipſius x, patet eſſe $\mu' = \mu$, vnde ſequentes iam deducuntur aequationes

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right) = \left(\frac{d\nu'}{dx}\right);\ \left(\frac{d\pi}{dx}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dx}\right);\ \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) = \left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right).$$

Hinc vero colligitur, eſſe $\nu = \nu' + \nu''$ ſuppoſito quod ν'', ſit eiusmodi quantitas, quae x non inuoluit, reliquas autem variabiles y, p, q inuoluere poterit, ſimili ratione erunt $\pi = \pi' + \pi''$ et $\varkappa = \varkappa' + \varkappa''$, ſuppoſitis ſemper π'' et $\varkappa''$ eiusmodi quantitatibus, quae y, p et q inuoluunt, non vero x. Introductis iam pro ν', π' et $\varkappa'$ ipſorum valoribus, habebimus

$$dY = \mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq$$
$$- \nu'' dy - \pi'' dp - \varkappa'' dq.$$

Deinde euidens quoque eſt, fore

$$\left(\frac{d\nu''}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi''}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu''}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa''}{dy}\right) \text{ et } \left(\frac{d\pi''}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa''}{dp}\right).$$

 Quum

Quum itaque ſit dY integrabile, liquet formulam

$$\mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq$$

eſſe integrabilem, ſi integrabilis fuerit

$$\nu''\, dy + \pi''\, dp + \varkappa''\, dq.$$

Ponamus integrale ipſius $\nu''\, dy$ quod prodit, ſi habeantur quantitates p et q pro conſtantibus, eſſe Y', et capiendo eius differentiale poſitis omnibus y, p, q variabilibus, oriatur

$dY' = \nu'''\, dy + \pi'''\, dp + \varkappa'''\, dq$; habebimus $\nu''' = \nu''$, nec non

$$\left(\frac{d\,\nu'''}{d\,p}\right) = \left(\frac{d\,\pi'''}{d\,y}\right);\ \left(\frac{d\,\nu'''}{d\,q}\right) = \left(\frac{d\,\varkappa'''}{d\,y}\right) \text{ et } \left(\frac{d\,\pi'''}{d\,q}\right) = \left(\frac{d\,\varkappa'''}{d\,p}\right).$$

Inde autem hae elicientur aequationes

$$\left(\frac{d\,\pi''}{d\,y}\right) = \left(\frac{d\,\pi'''}{d\,y}\right) \text{ et } \left(\frac{d\,\varkappa''}{d\,y}\right) = \left(\frac{d\,\varkappa'''}{d\,y}\right),$$

ex quibus iam concludi poteſt eſſe:

$$\pi'' = \pi''' + \pi'''' \text{ et } \varkappa'' = \varkappa''' + \varkappa'''',$$

ſi π'''' et $\varkappa''''$ eiusmodi ſint quantitates, quas neque x, nec y ingreditur. Subſtitutis autem valoribus inventis pro π''' et $\varkappa'''$, habebimus

$$dY' = \nu''\, dy + \pi''\, dp + \varkappa''\, dq$$
$$- \pi^{IV}\, dp - \varkappa^{IV}\, dq$$

vbi notandum eſt eſſe $\left(\frac{d\,\pi''''}{d\,q}\right) = \left(\frac{d\,\varkappa''''}{d\,p}\right)$.

Liquet vero hinc integrabilitatem formulae

$$\nu''\, dy + \pi''\, dp + \varkappa''\, dq$$

ab eo pendere, vt integrabilis ſit formula

$$\pi''''\, dp + \varkappa''''\, dq.$$

Sit

Sit igitur integrale ipſius $\pi'''' dp$ conſiderata q vt conſtante $= Y''$, et differentiale abſolutum huius $Y'' = \pi^{V} dp + \varkappa^{V} dq$, inueniemus $\pi'''' = \pi^{V}$ atque $\left(\frac{d\varkappa''''}{dp}\right) = \left(\frac{d\varkappa'''''}{dp}\right)$, vnde habebimus $\varkappa'''' = \varkappa^{V} + \varkappa^{VI}$, poſito quod $\varkappa^{VI}$, ſit quantitas ſolam variabilem q inuoluens, tum autem quoque fiet

$$dY'' = \pi^{IV} dp + \varkappa^{IV} dq - \varkappa^{VI} dq \text{ ſeu } dY'' + \varkappa^{VI} dq = \pi^{IV} dp + \varkappa^{IV} dq.$$

At vero quum ſit tam dY'' quam $\varkappa^{VI} dq$ integrabile, erit quoque formula $\pi^{IV} dp + \varkappa^{IV} dp$ integrabilis, quin et adeo

$\mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq$ quippe quae erit

$= dY + dY' + dY'' + \varkappa^{VI}\, dq$,

vbi quum ſingula membra dY; dY'; dY'' et $\varkappa^{VI} dq$ integrationem admittant, nullum eſt dubium quin eorum ſumma

$$= \mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq$$

integrabilis ſit, ipſo integrali exiſtente

$$Y + Y' + Y'' + \int \varkappa^{VI}\, dq.$$

4. Ad Theorema igitur laudatum iam propius accedens, conſiderabo primum eius conuerſum, quod ita verbis exprimi poteſt:

Si poſitis $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$ etc. V *fuerit eiusmodi functio ipſarum* x, y, p, q etc. *vt formula* V dx *fiat integrabilis, tum poſito*

$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr +$ etc. $U du$, erit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \dots \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0.$$

Quum iam dV aequetur formulae differentiali, quae per hypotheſin integrabilis eſt, per omnem autem integrationem formulae differentiales ad gradum proxime inferiorem deprimantur; neceſſum eſt, vt formula differentialis $V dx$ huiusmodi habeat formam:

$$V dx = \mu dx + \nu dy + \pi dp + \varkappa dq + \dots + \tau dt,$$

poſito nimirum $dt = u dx$, hinc autem deducitur

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r \dots + \tau u \text{ atque}$$

$$dV = d\mu + p d\nu + q d\pi + r d\varkappa + \dots u d\tau + \nu dp + \pi dq + \varkappa dr \dots + \tau du.$$

Quum vero ſuppoſuerimus

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + \dots + U du$$

ſequentes hinc elicientur, ipſarum M, N, P, Q etc. valores:

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + \text{etc.}$$

$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) + \text{etc.}$$

$$P = \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + \text{etc.} + \nu$$

$$Q = \left(\frac{d\mu}{dq}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dq}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right) + \text{etc.} + \pi$$

etc.

Iam quum formula $V dx$ ſuppoſita ſit integrabilis, neceſſum eſt, vt ſequentes conditiones locum habeant:

$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$

$(\frac{d\mu}{dy}) = (\frac{d\nu}{dx})$; $(\frac{d\mu}{dp}) = (\frac{d\pi}{dx})$; $(\frac{d\mu}{dq}) = (\frac{d\varkappa}{dx})$ etc.

$(\frac{d\nu}{dp}) = (\frac{d\pi}{dy})$; $(\frac{d\nu}{dq}) = (\frac{d\varkappa}{dy})$ etc. $(\frac{d\pi}{dq}) = (\frac{d\varkappa}{dp})$ etc.

Harum vero aequalitatum ope, valores quantitatum M, N, P, Q etc. in ſequentes transformantur:

$$M = (\frac{d\mu}{dx}) + p(\frac{d\mu}{dy}) + q(\frac{d\mu}{dp}) + r(\frac{d\mu}{dq}) \text{ etc.}$$

$$N = (\frac{d\nu}{dx}) + p(\frac{d\nu}{dy}) + q(\frac{d\nu}{dp}) + r(\frac{d\nu}{dq}) \text{ etc.}$$

$$P = (\frac{d\pi}{dx}) + p(\frac{d\pi}{dy}) + q(\frac{d\pi}{dp}) + q(\frac{d\pi}{dq}) \text{ etc.} + \nu$$

$$Q = (\frac{d\varkappa}{dx}) + p(\frac{d\varkappa}{dy}) + q(\frac{d\varkappa}{dp}) + r(\frac{d\varkappa}{dq}) + \text{etc.} + \pi \text{ etc.}$$

vnde deducitur:

$$M\,dx = dx(\frac{d\mu}{dx}) + dy(\frac{d\mu}{dy}) + dp(\frac{d\mu}{dp}) + dq(\frac{d\mu}{dq}) \text{ etc.}$$

$$N\,dx = dx(\frac{d\nu}{dx}) + dy(\frac{d\nu}{dy}) + dp(\frac{d\nu}{dp}) + dq(\frac{d\nu}{dq}) \text{ etc.}$$

$$(P-\nu)\,dx = dx(\frac{d\pi}{dx}) + dy(\frac{d\pi}{dy}) + dp(\frac{d\pi}{dq}) + dq(\frac{d\pi}{dq}) \text{ etc.}$$

$$(Q-\pi)\,dx = dx(\frac{d\varkappa}{dx}) + dy(\frac{d\varkappa}{dy}) + dp(\frac{d\varkappa}{dp}) + dq(\frac{d\varkappa}{dq}) \text{ etc.}$$

Sumtis igitur integralibus conſequimur:

$$\mu = \int M\,dx;\ \nu = \int N\,dx;\ \pi = \int (P-\nu)\,dx = \int P\,dx - \int dx \int N\,dx$$

$$\varkappa = \int (Q-\pi)\,dx = \int Q\,dx - \int dx \int P\,dx + \int dx \int dx \int N\,dx$$

$$\varrho = \int R\,dx - \int dx \int Q\,dx + \int dx \int dx \int P\,dx - \int dx \int dx \int dx \int N\,dx \text{ etc.}$$

Si itaque iam compendii cauſſa, integrale $\int dx \int N\,dx$, indigitetur per $\int^{(2)} N\,dx$; $\int dx \int dx \int N\,dx$ per $\int^{(3)} N\,dx$ et in genere huiusmodi integrale, quod poſt m integrationes oritur per $\int^{(m)} N\,dx$, fiet

V dx

$$Vdx = \mu dx + \nu dy + \pi dp + \varkappa dq + \ldots + \tau dt$$
$$= dx\int Mdx + dy\int Ndx + dp(\int Pdx - \int^{(2)} Ndx)$$
$$+ dq(\int Qdx - \int^{(2)} Pdx + \int^{(3)} Ndx)$$
$$\ldots + dt(\int Tdx \ldots \mp \int^{(m-2)} Qdx \pm \int^{(m-1)} Pdx \mp \int^{(m)} Ndx)$$

vbi ſigna ſuperiora valebunt, ſi numerus terminorum ex quibus dV componitur fuerit par $= m + 2$, contra vero ſi impar.

5. Quum vero iam hinc prodeat:

$$V = \int Mdx + p\int Ndx + q(\int Pdx - \int^{(2)} Ndx) + r(\int Qdx - \int^{(2)} Pdx$$
$$+ \int^{(3)} Ndx)$$
$$\ldots + u(\int Tdx \ldots \mp \int^{(m-2)} Qdx \pm \int^{(m-1)} Pdx \mp \int^{(m)} Ndx)$$

perpendamus eſſe

$$Ndy \mp du\int^{(m)} Ndx = pNdx + dp\int Ndx - dp\int Ndx - dq\int dx\int Ndx$$
$$+ dq\int dx\int Ndx + dr\int dx\int dx\int Ndx \ldots$$
$$\mp dt\int^{(m-1)} Ndx \mp du\int^{(m)} Ndx,$$

ideoque ob $dp = qdx$; $dq = rdx$ etc.

$$Ndy \mp du\int^{(m)} Ndx = d.p\int Ndx - d.q\int^{(2)} Ndx$$
$$+ d.r\int^{(3)} Ndx \ldots \mp d.u\int^{(m)} Ndx.$$

Similiter inueniemus

$$Pdp \pm du\int^{(m-1)} Pdx = d.q\int Pdx - d.r\int^{(2)} Pdx + d.s\int^{(3)} Pdx \ldots$$
$$\pm d.u\int^{(m-1)} Pdx$$

nec non

$$Qdq \mp du\int^{(m-2)} Qdx = d.r\int Qdx - d.s\int^{(2)} Qdx + \ldots$$
$$\mp d.u\int^{(m-2)} Qdx.$$

His igitur valoribus in aequatione valorem ipſius V exprimente introductis, obtinebimus:

d V

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq \ldots + Tdt$$
$$\mp du(\int^{(m)} Ndx - \int^{(m-1)} Pdx + \int^{(m-2)} Qdx \ldots \mp \int Tdx).$$

Quum vero per hypotheſin ſit

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq \ldots\ldots + Tdt + Udu$$

habebimus hos valores inter ſe comparando

$$U = \mp \int^{(m)} Ndx \pm \int^{(m-1)} Pdx \mp \int^{(m-2)} Qdx \ldots + \int Tdx \text{ ſeu}$$
$$\int^{(m)} Ndx - \int^{(m-1)} Pdx + \int^{(m-2)} Qdx \ldots \mp \int Tdx \pm U = 0$$

vnde differentiando et diuidendo per dx, prodit

$$\int^{(m-1)} Ndx - \int^{(m-2)} Pdx + \int^{(m-3)} Qdx \ldots \mp T \pm \frac{dU}{dx} = 0$$

atque poſt m repetitas differentiationes et diuiſiones per dx

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots \mp \frac{d^{m-1}T}{dx^{m-1}} \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0.$$

6. Nunc vero facile perſpicitur, quomodo haec demonſtratio in maius compendium redigi potuiſſet. Conſiderantes enim valores coefficientium $\mu, \nu, \pi, \varkappa$ etc. inuenimus eos hac lege procedere, vt ſit

$$\pi = \int(P - \nu)dx;\ \varkappa = \int(Q - \pi)dx;\ \varrho = \int(R - \varkappa)dx \text{ etc.};$$

vnde terminus ipſum τ inſequens, quem nominemus υ hac aequatione exprimetur $\upsilon = \int(U - \tau)dx$; quum vero obſeruatum ſit τdt eſſe in expreſſione Vdx vltimum terminum, erit $\upsilon = 0$, vnde deducitur $U - \tau = 0$, ſubſtituto igitur loco τ valore ipſius aequatio ſupra allata emerget. Denique et obſeruari meretur, hanc aequationem $U - \tau = 0$, exinde deduci quod ſit:

$$U - \tau = (\tfrac{d\mu}{du}) + p(\tfrac{d\nu}{du}) + q(\tfrac{d\pi}{du}) + r(\tfrac{d\varkappa}{du}) \text{ etc.}$$

nam ob $\upsilon = 0$, erit

$$(\tfrac{d\mu}{du}) = (\tfrac{d\upsilon}{dx}) = 0;\ (\tfrac{d\nu}{du}) = (\tfrac{d\upsilon}{dy}) = 0;\ (\tfrac{d\pi}{du}) = (\tfrac{d\upsilon}{dp}) = 0 \text{ etc.}$$

7. Progrediamur nunc ad demonſtrationem inſignis iſtius Theorematis, quo ſtatuitur formulam $V\,dx$ fore integrabilem, ſi poſito

$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots + U\,du$ fuerit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots \pm \frac{d^m U}{dx^m} = 0.$$

Et primum quidem ex aequatione propoſita, ope integrationum deducitur

$$U = \mp \int^{(m)} N\,dx \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots + T\,dx$$

hoc autem valore ipſius U ſubſtituto in aequatione

$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp \ldots + U\,du$, orietur

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \ldots + T\,dt$$
$$\mp du(\int^{(m)} N\,dx - \int^{(m-1)} P\,dx + \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots \mp \int T\,dx$$

Hinc vero per transformationes in § 5 allatas obtinetur

$$V\,dx = dx\int M\,dx + dy\int N\,dx + dp(\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx)$$
$$+ dq(\int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx) \ldots$$
$$+ dt(\int T\,dx \ldots \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx).$$

Si iam vt antea ſupponamus

$V\,dx = \mu\,dx + \nu\,dy + \pi\,dp + \varkappa\,dq \ldots + \tau\,dt$, habebimus

$\mu = \int M\,dx;\ \nu = \int N\,dx;\ \pi = \int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx = \int (P - \nu)\,dx$

$\varkappa = \int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx = \int (Q - \pi)\,dx$ etc.

Porro

Porro vero erit

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r \ldots + \tau u \text{ atque}$$

$$dV = d\mu + p d\nu + q d\pi + r d\varkappa + \ldots + u d\tau$$
$$+ \nu dp + \pi dp + \varkappa dr \ldots + \tau du$$

vnde vt ſupra ſequentes eliciuntur valores ipſarum M, N, P etc.

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \ldots + u\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$
$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \ldots + u\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$
$$P = \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) \ldots + u\left(\frac{d\tau}{dp}\right) + \nu$$
$$Q = \left(\frac{d\mu}{dq}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dq}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right) \ldots + u\left(\frac{d\tau}{dq}\right) + \pi$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$U = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \tau$$

8. Vt vero iam liqueat, vtrum formula $V dx$ ſit integrabilis nec ne? diſpiciendum eſt, an ſequentibus conditionibus ad eius integrabilitatem neceſſariis ſatisfiat:

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \ldots \left(\frac{d\mu}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \ldots \left(\frac{d\nu}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dp}\right);\ \ldots \left(\frac{d\pi}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dp}\right) \text{ etc.}$$

Hunc in finem obſeruetur eſſe

$$\mu = \int M\,dx = \int dx\left(\frac{d\mu}{dx}\right) + \int dy\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + \int dp\left(\frac{d\pi}{dx}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$
$$\nu = \int N\,dx = \int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + \int dy\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + \int dp\left(\frac{d\pi}{dy}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$
$$\pi = \int (P - \nu)\,dx = \int dx\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + \int dy\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + \int dp\left(\frac{d\pi}{dp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{d\tau}{dp}\right)$$
$$\varkappa = \int (Q - \pi)\,dx = \int dx\left(\frac{d\mu}{dq}\right) + \int dy\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + \int dp\left(\frac{d\pi}{dq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{d\tau}{dq}\right)$$

etc.

hinc autem obtinemus :

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdy}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdy}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdy}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdy}\right)$$
$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdp}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdp}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdp}\right)$$
$$\left(\frac{d\mu}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdq}\right)$$

etc.

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdy}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdy}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdy}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdy}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dydp}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dydp}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dydp}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dydp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dydp}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dydq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dydq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dydq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dydq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dydq}\right)$$

etc.

$$\left(\frac{d\pi}{dx}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdp}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdp}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdp}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dydp}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dydp}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dydp}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dydp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dydp}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dpdq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dpdq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dpdq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dpdq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dpdq}\right)$$

etc.

$$\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdq}\right)$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dydq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dydq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dydq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dydq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dydq}\right)$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dpdq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dpdq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dpdq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dpdq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dpdq}\right)$$

etc.

Hae

Hae aequationes inter ſe comparatae manifeſto oſtendunt, requiſita integrabilitatis ſupra memorata formulae noſtrae Vdx competere, adeo vt iam quidem absque vlla haeſitatione, hanc formulam integrabilem eſſe, pronunciare liceat.

9. Ex hiſce Theorematibus varia nunc deduci poſſunt Corollaria quam maxime notatu digna, quorum potiora heic recenſuiſſe haud pigebit:

I°) Cum ex aequatione propoſita

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\ldots = 0,$$

tum ex valore ipſius

$$Vdx = dx\int Mdx + dy.\int Ndx + dp\left(\int Pdx - \int^{(2)} Ndx\right) + \text{etc.}$$

patet, ad integrabilitatem formulae Vdx neceſſario requiri, non ſolum vt formulae Mdx et Ndx ſint integrabiles; ſed etiam vt omnes quoque ſequentes formulae:

$$dx(P - \int Ndx);\quad dx(Q - \int Pdx + \int^{(2)} Ndx);$$
$$dx(R - \int Qdx + \int^{(2)} Pdx - \int^{(3)} Ndx) \text{ etc.}$$

integrationem admittant.

II°) Viciſſim autem euidens eſt, ſi formula principalis Vdx fuerit integrabilis, omnes quoque has formulas:

$$Mdx;\ Ndx;\ dx(P - \int Ndx);\ dx(Q - \int Pdx + \int^{(2)} Ndx) \text{ etc.}$$

ita comparatas eſſe, vt integralia ipſis competant

III°) Ex valoribus ipſarum M, N, P § 8 allatis liquet eſſe

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right);\ \left(\frac{dM}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right);\ \left(\frac{dM}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{dN}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right);\ \left(\frac{dN}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right) \text{ etc. etc.}$$

quae conditiones neceſſario impleri debent, vt formula

$$M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \text{etc.} = dV$$

fiat integrabilis

IV°) Eaedem formulae § 8 oſtendunt eſſe

$$\left(\frac{d.\int M\,dx}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dM}{dp}\right) - \int dx\left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d.\int M\,dx}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dM}{dq}\right) - \int dx\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$$

etc.

ſimilique ratione

$$\left(\frac{d.\int N\,dx}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dN}{dp}\right) - \int dx\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d.\int N\,dx}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dN}{dq}\right) - \int dx\left(\frac{d\pi}{dy}\right) \text{ etc.}$$

quae proprietates etiamſi primo intuitu, a vulgo traditis differentiationis praeceptis diſcrepare videantur; re tamen accuratius penſitata, veritati optime conſentire deprehenduntur.

V°) Denique et hoc loco obſeruari meretur, conſtantium per integrationes invectarum, nullam a nobis factam eſſe mentionem, quum ipſa ſigna integrationis indigitent, huiusmodi quantitates conſtantes introducendas eſſe.

10. Quum ſit

$$\int dx \int N\,dx = x\int N\,dx - \int N\,x\,dx;$$

$$\int^{(3)} N\,dx = \int x\,dx \int N\,dx - \int dx \int N\,x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \int N\,dx - x\int N\,x\,dx + \tfrac{1}{2}\int N\,x^2\,dx$$

et in genere

$\int^{(m)} N$

$$\int^{(m)} N dx = \frac{x^{m-1}\int N dx - (m-1) x^{m-2} \int N x dx + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^{m-3} \int N x^2 dx}{1 . 2 . 3 \ldots m-1}$$
$$\ldots \pm \frac{\int N x^{m-1} dx}{1 . 2 . 3 \ldots m-1},$$

formularum

$$\int P dx - \int^{(2)} N dx; \quad \int Q dx - \int^{(2)} P dx + \int^{(3)} N dx \text{ etc.}$$

ſequentes hinc deduci poterunt transformationes. Formula

$$\int P dx - \int^{(2)} N dx \text{ erit } = \int P dx - x \int N dx + \int N x dx,$$

quum igitur iam conſtet $x \int N dx$ verum eſſe integrale, ſequitur quoque formulam

$$dx (P + N x)$$

integrabilem eſſe. Porro quum integrabilis ſit haec formula

$$Q dx - \int P dx + \int^{(2)} N dx,$$

cuius integrale ita repraeſentari poteſt:

$$\int Q dx - x \int P dx + \tfrac{1}{2} x^2 \int N dx$$
$$+ \int P x dx - x \int N x dx + \tfrac{1}{1 \cdot 2} \int N x^2 dx$$

inde quoque deducitur integrabilem eſſe ſequentem formulam:

$$dx (Q + P x + \tfrac{1}{2} N x^2).$$

Simili ratione demonſtrari poteſt integrabilem eſſe debere formulam:

$dx (R + Q x + \frac{1}{1 \cdot 2} P x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} N x^3)$ atque adeo hanc:

$$dx(T+Sx\ldots+\frac{1}{1.2.3.m-3}.Qx^{m-3}+\frac{1}{1.2.3.m-2}Px^{m-2}$$
$$+\frac{1}{1.2..m-1}Nx^{m-1}).$$

11. Conſideremus iam huiusmodi formulam differentialem $dx\int V dx$, poſito quod ſit

$$dV=M dx+N dy+P dp+Q dy\ldots+U du$$

et inquiramus, quibus requiſitis haec formula differentialis inſtructa eſſe debeat, vt de ea affirmari poſſit, quod integrabilis ſit. Primum itaque ſi ponamus $\int V dx = V'$, liquet ad integrabilitatem formulae $V'dx$ requiri, vt formula $\int V dx$ verum ſit integrale, quod iam obtinebitur, ſi ſequenti ſatisfiat conditioni

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}\ldots\pm\frac{d^mU}{dx^m}=0.$$

Quum vero hoc criterium tantum declaret formulam Vdx eſſe integrabilem ſeu V' verum eſſe integrale, ad integrabilitatem formulae $V'dx$ diiudicandam, aliud inſuper requiretur criterium ſequenti ratione facile detegendum. Statuamus eſſe

$$dV'=M'dx+N'dy+P'dp\ldots+T'dt.$$

tum autem criterium integrabilitatis formulae $V'dx$, hac continebitur aequatione

$$N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{ddQ'}{dx^2}-\frac{d^3R'}{dx^3}\ldots\mp\frac{d^{m-1}T'}{dx^{m-1}}=0.$$

At

At in §. 5. iam inuenimus ſormulam $V\,dx$, quae aequalis eſt ipſi dV', ita repraeſentari poſſe:

$$dV' = V\,dx = dx\int M\,dx + dy\int N\,dx + dp\left(\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx\right) \ldots + dt\left(\int T\,dx \ldots \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx\right)$$

hunc igitur valorem ipſius dV', cum aſſumto comparando, inuenimus:

$$M' = \int M\,dx;\quad N' = \int N\,dx;\quad P' = \int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx \ldots$$
$$T' = \int T\,dx \ldots \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx,$$

qui valores ipſarum M', N', P' etc. in aequatione criterium integrabilitatis exprimente introducti, dant

$$m\int N\,dx - (m-1)P + (m-2)\frac{dQ}{dx} - (m-3)\frac{ddR}{dx^2} \ldots \mp \frac{d^{m-2}T}{dx^{m-2}} = 0.$$

At prius criterium integrabilitatis per $m\,dx$ multiplicando, et integrando fiet

$$m\int N\,dx - mP + m\frac{dQ}{dx} - m\frac{ddR}{dx^2} \ldots \mp m\frac{d^{m-2}T}{dx^{m-2}} \pm m\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0$$

ſubtrahendo igitur hanc aequationem ab illa orietur

$$P' - 2.\frac{dQ}{dx} + 3.\frac{ddR}{dx^2} \ldots \pm (m-1)\frac{d^{m-2}T}{dx^{m-2}} \mp m\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0,$$

in qua aequatione ſinguli coefficientes numerici, ſecundum ordinem numerorum naturalium progre-

diuntur. Requiſita igitur integrabilitatis formulae $dx\int V\,dx$, ſequentibus duabus aequationibus continentur:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \dots \pm \frac{d^m U}{dx^m} = 0$$

$$P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} - \frac{4d^3S}{dx^3} \dots \mp m\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0$$

poſito nimirum

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \dots + U\,du.$$

12. Quum formula differentialis $V'\,dx$ integrabilis eſſe nequeat, niſi formulae $M'\,dx$ et $N'dx$ integrationem admittant, liquet hinc non ſolum formulas $M\,dx$ et $N\,dx$, ſed etiam $dx\int M\,dx$; $dx\int N\,dx$ integrabiles eſſe debere. Porro ex poſteriori integrabilitatis criterio patet $\int P\,dx$ verum quoque eſſe integrale, quum fiat:

$$\int P\,dx - 2Q + \frac{3\,dR}{dx} \dots \mp m\frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}} = 0.$$

Deinde quum per prius integrabilitatis requiſitum, formula $dx(2Q - 2\int P\,dx + 2\int^{(2)} N\,dx)$ integrabilis ſit, ex poſteriori autem intelligatur formulam $dx(\int P\,dx - 2Q)$ integrationem admittere; addendo iſtas formulas, obtinebimus hanc $dx(2\int^{(2)} N\,dx - \int P\,dx)$, quam igitur quoque integrabilem eſſe oportet. Vlterius ob integrabilitatem formularum:

$dx(3R - 2\int Q\,dx + \int^{(2)} P\,dx)$ et $3\,dx(R - \int Q\,dx + \int^{(2)} P\,dx - \int^{(3)} N\,dx)$

patet

patet formulam

$$dx(3\int^{(3)} N\,dx - 2\int^{(2)} P\,dx + \int Q\,dx)$$

integrabilem eſſe. In genere autem ſi ſtatuatur

$$M' = \int M\,dx;\ N' = \int N\,dx;\ P' = \int(P - N')\,dx;\ Q' = \int(Q - P')\,dx \text{ etc.}$$

tum vero quoque

$$M'' = \int M'\,dx;\ N'' = \int N'\,dx;\ P'' = \int(P' - N'')\,dx;\ Q'' = \int(Q' - P'')\,dx \text{ etc.}$$

liquet, pro integrabilitate formulae $dx\int V\,dx$ requiri, vt omnes hae quantitates M', N', P' etc. M'', N'', P'' etc. vera ſint integralia.

13. Propoſita nunc ſit formula differentialis $dx\int dx\int V\,dx$, pro qua inueſtiganda ſint criteria, ex quibus de eius integrabilitate indicare liceat, vbi quidem ſtatim patet, hanc formulam integrationem non admittere, niſi formulae $V\,dx$ et $dx\int V\,dx$ integrabiles ſint. Poſito igitur vt antea:

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp \ldots + U\,du$$

bina criteria integrabilitatis huius formulae mox innoteſcunt, ſequentibus aequationibus comprehenſa:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^m U}{dx^m} = 0$$

$$P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} \ldots \mp \frac{md^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0.$$

Quomodo vero tertium inueſtigari debeat, ex iis quae antea docuimus liquet. Statuamus ſcilicet $\int dx\int dx\int V\,dx = \int V''\,dx$ et ponamus

 dV'

$$dV'' = M''dx + N''dy + P''dp \ldots + S''ds$$

nec non

$$dV' = M'dx + N'dy + P'dp \ldots + T'dt$$

et inueniemus

$$M' = \int M\,dx;\quad N' = \int N\,dx;\quad P' = \int (P - N')\,dx;$$
$$Q' = \int (Q - P')\,dx \text{ etc.}$$

$$M'' = \int M'\,dx;\quad N'' = \int N'\,dx;\quad P'' = \int (P' - N'')\,dx;$$
$$Q'' = \int (Q' - P'')\,dx \text{ etc.}$$

vnde fiet

$$M'' = \int^{(2)} Mdx;\quad N'' = \int^{(2)} Ndx;\quad P'' = \int^{(2)} Pdx - 2\int^{(3)} Ndx$$
$$Q'' = \int^{(2)} Qdx - 2\int^{(3)} Pdx + 3\int^{(4)} Ndx \text{ etc.}$$

Quum igitur pro integrabilitate formulae $dx\int dx\int V dx$ requiratur, vt ſit

$$N'' - \frac{dP''}{dx} + \frac{ddQ''}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^{m-2}S''}{dx^{m-2}} = 0$$

ſubſtitutis in hac aequatione pro N'', P'', Q'' etc. valoribus ipſarum, orietur iſta aequatio:

$$\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\int^{(2)} Ndx - \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2}\int Pdx + \frac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2}Q$$
$$- \frac{(m-3)(m-4)}{1.\ 2}\frac{dR}{dx} \ldots \pm \frac{d^{m-4}S}{dx^{m-4}} = 0$$

a qua aequatione ſubtrahatur ſequens:

$$\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\left(\int^{(2)} Ndx - \int Pdx + Q - \frac{dR}{dx} \ldots \pm \frac{d^{m-4}S}{dx^{m-4}}\right.$$
$$\left.\mp \frac{d^{m-3}T}{dx^{m-3}} \pm \frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}}\right) = 0$$

reſi-

reſiduum praebebit hanc aequationem:

$$(m-1)\int P dx-(2m-3)Q+(3m-6)\frac{dR}{dx}\ldots\mp\frac{(m+1)(m-2)}{1.\ 2}\frac{d^{m-4}S}{dx^{m-4}}$$

$$\pm\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{d^{m-3}T}{dx^{m-3}}\mp\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}}=0.$$

Deinde ſi hinc ſubtrahatur

$$(m-1)\left(\int P dx-2Q+\frac{3dR}{dx}\ldots\mp\frac{m\,d^{m-1}U}{dx^{m-1}}\right)=0$$

emerget noua haec aequatio:

$$Q-\frac{3dR}{dx}+\frac{6.\,ddS}{dx^2}\ldots\pm\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}}=0.$$

Criteria igitur integrabilitatis formulae $\int dx\int dx\int V dx$, his tribus aequationibus continentur:

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}\ldots\pm\frac{d^mU}{dx^m}=0$$

$$P-\frac{2dQ}{dx}+\frac{3ddR}{dx^2}-\frac{4d^3S}{dx^3}\ldots\mp\frac{m\,d^{m-1}U}{dx^{m-1}}=0$$

$$Q-\frac{3dR}{dx}+\frac{6.\,ddS}{dx^2}-\frac{10\,d^3T}{dx^3}\ldots\pm\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}}=0,$$

vbi euidens eſt, in tertia harum aequationum coefficientes numericos eſſe numeros trigonales. Si iam formulae differentiales proponerentur, quae plura adhuc integralia inuoluerent, ſine vlla difficultate, ſingula earum criteria integrabilitatis aſſignari poterunt, quemadmodum ſi integrabilis eſſe debeat talis formula $dx\int^{(3)} V dx$, tum enim poſito

$$dV = M dx + N dy + P dp \ldots + U du$$

praeter modo allata criteria, etiam ſequens locum habebit:

$$R - \frac{4 dS}{dx} + \frac{10 . ddT}{dx^2} \ldots \mp \frac{m(m-1)(m-2)}{1. \; 2. \; 3} \frac{d^{m-3}U}{dx^{m-3}} = 0$$

vbi coefficientes numerici ſunt numeri pyramidales primi.

14. Conſideremus nunc formulam differentialem $V dx \int V' dx$, in qua vtraque littera V, V' functionem quantitatum x, y, p; q etc. deſignat et ponatur

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq \text{ etc.}$$

tum vero

$$dV' = M' dx + N' dy + P' dp + Q' dq \text{ etc.},$$

et quaeramus, quaenam praeſcribi debeant conditiones vt huiusmodi formula differentialis integrabilis fiat. Harum vero conditionum vna ſtatim exinde deducitur, quod formulae noſtrae integrale competere nequeat, niſi $\int V' dx$ verum ſit integrale, quae igitur conditio ſequenti repraeſentabitur aequatione:

$$N' - \frac{d P'}{d x} + \frac{d d Q'}{d x^2} - \frac{d^3 R'}{d x^3} \ldots = 0.$$

Ad alteram conditionem inueniendam, ſtatuamus eſſe

$$d. \; V \int V' dx = \mu dx + \nu dy + \pi dp + \varkappa dq + \text{etc.}$$

atque tunc pro integrabilitate formulae $V dx \int V' dx$ debebit eſſe

$$\nu - \frac{d \pi}{d x} + \frac{d d \varkappa}{d x^2} - \frac{d^3 \rho}{d x^3} + \ldots = 0.$$

Tota

Tota igitur inueſtigatio huius conditionis eo redit, vt valores litterarum ν, π, $\varkappa$ etc. determinentur, quem in finem notetur eſſe.

$$V'dx = dx\int M'dx + dy\int N'dx + dp(\int P'dx - \int^{(2)} N'dx)$$
$$+ dq(\int Q'dx - \int^{(2)} P'dx + \int^{(3)} N'dx) + \text{etc.}$$

tum $d.V\int V'dx = dV.\int V'dx + VV'dx$,

ex quo ſequentes deducimus aequationes:

$$\mu = M\int V'dx + V\int M'dx;\ \nu = N\int V'dx + V\int N'dx$$
$$\pi = P\int V'dx + V(\int P'dx - \int^{(2)} N'dx)$$
$$\varkappa = Q\int V'dx + V(\int Q'dx - \int^{(2)} P'dx + \int^{(3)} N'dx)$$
$$\varrho = R\int V'dx + V(\int R'dx - \int^{(2)} Q'dx + \int^{(3)} P'dx - \int^{(4)} N'dx)$$

etc.

Hinc autem colligitur:

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{dP}{dx}\int V'dx + V'P + V(P' - \int N'dx) + \frac{dV}{dx}(\int P'dx - \int^{(2)} N'dx)$$
$$\frac{dd\varkappa}{dx^2} = \frac{ddQ}{dx^2}\int V'dx + 2V'\frac{dQ}{dx} + Q.\frac{dV'}{dx} + V(\frac{dQ'}{dx} - P' + \int N'dx)$$
$$+ \frac{2dV}{dx}(Q' - \int P'dx + \int^{(2)} N'dx) + \frac{ddV}{dx^2}(\int Q'dx$$
$$- \int^{(2)} P'dx + \int^{(3)} N'dx)$$
$$\frac{d^3\varrho}{dx^3} = \frac{d^3R}{dx^3}\int V'dx + 3V'.\frac{ddR}{dx^2} + 3\frac{dV'.dR}{dx^2} + R\frac{ddV'}{dx^2}$$
$$+ V(\frac{ddR'}{dx^2} - \frac{dQ'}{dx} + P' - \int N'dx) + 3\frac{dV}{dx}(\frac{dR'}{dx} - Q'$$
$$+ \int P'dx - \int^{(2)} N'dx)$$
$$+ \frac{3ddV}{dx^2}(R' - \int Q'dx + \int^{(2)} P'dx - \int^{(3)} N'dx) + \frac{d^3V}{dx^3}(\int R'dx$$
$$- \int^{(2)} Q'dx + \int^{(3)} P'dx - \int^{(4)} N'dx)$$

etc.

His

His autem valoribus pro ν; $\frac{d\pi}{dx}$, $\frac{ddx}{dx^2}$ etc. introductis, obtinebimus ſequentem aequationem:

$$\left.\begin{array}{l}
(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\text{etc.})\int V'dx - V'(P-\frac{2dQ}{dx}+\frac{3ddR}{dx^2}-\text{etc.})\\
+\frac{dV'}{dx}(Q-\frac{3dR}{dx}+\frac{6ddS}{dx^2}-\text{etc.})-\frac{ddV'}{dx^2}(R-4\frac{dS}{dx}+\text{etc.})\\
+V(m\int N'dx-(m-1)P'+(m-2)\frac{dQ'}{dx}-(m-3)\frac{ddR'}{dx^2}\text{ etc.})\\
+\frac{dV}{dx}(\frac{m(m-1)}{1.2}\int^{(2)}Ndx-\frac{m(m-1)}{1.2}\int P'dx+\frac{(m+1)(m-2)}{1.2}Q'-\frac{(m+2)(m-3)}{1.2}\frac{dR'}{dx}+\text{etc.})\\
+\frac{ddV}{dx^2}\left(\begin{array}{l}\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\int^{(3)}N'dx-\int^{(2)}P'dx+\int Q'dx-R'+\frac{dS'}{dx})\text{ etc.}\\
\quad +R'-4\frac{dS'}{dx}+10\frac{ddT'}{dx^2}\qquad\text{etc.}\end{array}\right)\\
\quad\text{etc.}
\end{array}\right\}=0$$

vnde ſublatis terminis, qui propter primam conditionem nihilo aequantur, habebimus:

$$\left.\begin{array}{l}
(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}\text{ etc.})\int V'dx - V'(P-\frac{2dQ}{dx}+3\frac{ddR}{dx^2}-\text{etc.})\\
+\frac{dV'}{dx}(Q-\frac{3dR}{dx}+\frac{6.ddS}{dx^2}\text{ etc.})-\frac{ddV'}{dx^2}(R-\frac{4dS}{dx}+10.\frac{ddT}{dx^2}\text{ etc.})\\
\qquad\text{etc.}\\
+V(P'-2\frac{dQ'}{dx}+3\frac{ddR'}{dx^2}\text{ etc.})-\frac{dV}{dx}(Q'-3\frac{dR'}{dx}+6.\frac{ddS'}{dx^2}\text{ etc.})\\
+\frac{ddV}{dx^2}(R'-4\frac{dS'}{dx}+10.\frac{ddT'}{dx^2}\text{ etc.})\text{ etc.}
\end{array}\right\}=0$$

Ceterum ſi ab hac poſtrema aequatione ſubtrahatur

$$(N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{ddQ'}{dx^2}-\frac{d^3R'}{dx^3}\text{ etc.})\int Vdx=0$$

abibit ea in ſequentem, quae commodioris eſt formae

$$\left.\begin{array}{l}
N\int V'dx-\frac{d.P\int V'dx}{dx}+\frac{dd.Q\int V'dx}{dx^2}-\frac{d^3.R\int V'dx}{dx^3}+\text{etc.}\\
-N'\int Vdx+\frac{d.P'\int Vdx}{dx}-\frac{dd.Q'\int Vdx}{dx^2}+\frac{d^3.R'\int Vdx}{dx^3}+\text{etc.}
\end{array}\right\}=0$$

qua aequatione iam alterum integrabilitatis criterium quaeſitum continebitur. Heic vero obſeruari meretur, poſito $V'=V$ ſingula aequationis huius membra deſtrui,

deſtrui, adeo vt pro iſto caſu conditio integrabilitatis prima ſufficiat, quod etiam ipſi rei naturae conveniens eſt, quoniam $\int V dx \int V dx = \frac{1}{2}(\int V dx)^2$.

15. Ex hiſce principiis facillimum nunc erit diiudicare, quibus requiſitis formula quaecunque differentialis $V\,dx$ inſtructa eſſe debet, vt integrabilis fiat, poſito quod V ſit functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, etc. quae igitur vt ex quotcunque formulis integralibus quantitates x, y, p etc. vtcunque inuoluentibus compoſita concipi poteſt, quemadmodum ſi fuerit $V = \int V' dx \int V'' dx$ vbi V' et V'' functiones algebraicas quantitatum x, y, p etc. deſignant; ſuperfluum vero erit his criteriis euoluendis diutius immorari, quum ex praeceptis ſupra traditis ea pro quouis caſu ſpeciali, absque vllo labore, erui queant. Potius igitur examini ſubiiciamus formulam differentialem $V dx$ ita comparatam, vt quantitas V praeter binas variabiles x et y cum differentialibus poſterioris, adhuc inuoluat tertiam quandam variabilem, cum ipſius differentialibus cuiuscunque gradus. Inquiramus vero in iſtos characteres, qui certa nobis praebere valent indicia formulam hanc integrabilem eſſe. Si igitur vt antea ponatur

$\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = q$; $\frac{dq}{dx} = r$ etc. $\frac{dz}{dx} = p'$; $\frac{dp'}{dx} = q'$; $\frac{dq'}{dx} = r'$ etc.

de eo quaeritur, quomodo comparata eſſe debeat functio quaecunque V harum variabilium $x; y; z; p; p'; q; q'$ etc. vt formula $\int V dx$ verum ſit integrale. Ponamus iam eſſe

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \text{ etc.} \ldots + U\,du$$
$$+ \mathfrak{N}\,dz + \mathfrak{P}\,dp' + \mathfrak{Q}\,dq' \ldots\ldots + \mathfrak{T}\,dt',$$

tum vero ſtatuatur

$$V\,dx = \mu\,dx + \nu\,dy + \pi\,dp + \varkappa\,dq \ldots\ldots + \tau\,dt$$
$$+ \nu' dz + \pi' dp' + \varkappa' dq' \ldots\ldots + \sigma' ds'$$

et ex iis quae § 2 monuimus, patet ſi formula $V dx$ ſit integrabilis, ſequentibus conditionibus ſatisfieri debere

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dz}\right) = \left(\frac{d\nu'}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dx}\right) \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\nu}{dz}\right) = \left(\frac{d\nu'}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dy}\right) \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\nu'}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dz}\right);\ \left(\frac{d\nu'}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dz}\right) \text{ etc. } \left(\frac{d\pi}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dp}\right) \text{ etc. etc.}$$

Ex § autem 3 viciſſim concluditur, ſi his conditionibus fuerit ſatisfactum, formulam $V dx$ eſſe integrabilem Neceſſum igitur eſt, vt valores litterarum $\mu, \nu, \nu', \pi, \pi'$ etc. per litteras $M, N\ \mathfrak{N}, P, \mathfrak{P}$ etc. determinentur, quem in finem notetur eſſe:

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r \ldots\ldots + \tau u$$
$$+ \nu' p' + \pi' q' + \varkappa' r' \ldots\ldots + \sigma' t'$$

deinde vero

$$dV = d\mu + p\,d\nu + \nu\,dp + q\,d\pi + \pi\,dq + r\,d\varkappa + \varkappa\,dr \ldots\ldots$$
$$+ u\,d\tau + \tau\,du$$
$$+ p' d\nu' + \nu' dp' + q' d\pi' + \pi' dq' + r' d\varkappa' + \varkappa' dr' \ldots\ldots$$
$$+ t' d\sigma' + \sigma' dt'.$$

Hinc vero eliciuntur ſequentes valores litterarum $M, N, \mathfrak{N}$ etc.

M =

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dx}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dx}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right) + \text{etc.}$$
$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dy}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right) + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = \left(\frac{d\mu}{dz}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dz}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dz}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dz}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dz}\right) + \text{etc.}$$
$$P = \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + \text{etc.} + \nu$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dp}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dp}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dp}\right) + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{P} = \left(\frac{d\mu}{dp'}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dp'}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dp'}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dp'}\right) + \text{etc.} + \nu'$$

etc. etc.

$$U = \tau \qquad \text{et } \mathfrak{T} = \sigma'$$

Qui valores propter requiſita integrabilitatis nuper memorata, in ſequentes transformantur:

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + r\left(\frac{d\mu}{dq}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\mu}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\mu}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\mu}{dq'}\right) + \text{etc.}$$
$$N = \left(\frac{d\nu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + r\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\nu}{dq'}\right) + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = \left(\frac{d\nu'}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu'}{dy}\right) + q\left(\frac{d\nu'}{dp}\right) + r\left(\frac{d\nu'}{dq}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\nu'}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\nu'}{dq'}\right) + \text{etc.}$$
$$P = \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + p\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\pi}{dq}\right) + \text{etc.} + \nu$$
$$+ p'\left(\frac{d\pi}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\pi}{dq'}\right) + \text{etc.}$$

 $\mathfrak{P} =$

$$\mathfrak{P} = \left(\frac{d\,\pi'}{d\,x}\right) + p\left(\frac{d\,\pi'}{d\,y}\right) + q\left(\frac{d\,\pi'}{d\,p}\right) + r\left(\frac{d\,\pi'}{d\,q}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,p'}\right) + r'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,q'}\right) + \text{etc.} + \nu'$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Hinc autem multiplicando vtrinque per $d\,x$ et integrando, conſequimur:

$\mu = \int M\,d\,x$; $\nu = \int N\,d\,x$; $\nu' = \int \mathfrak{N}\,d\,x$; $\pi = \int (P - \nu)\,d\,x$; $\pi' = \int (\mathfrak{P} - \nu')\,d\,x$; $\varkappa = \int (Q - \pi)\,dx$; $\varkappa' = \int (\mathfrak{Q} - \pi')\,d\,x$ etc.

16. Hi valores ipſarum μ, ν, ν', π, π' etc. adhibito ſupra §. 4. recepto ſignandi modo, ſic quoque exprimi poterunt:

$\mu = \int M\,d\,x$; $\nu = \int N\,d\,x$; $\nu' = \int \mathfrak{N}\,d\,x$;

$\pi = \int P\,d\,x - \int^{(2)} N\,d\,x$; $\pi' = \int \mathfrak{P}\,d\,x - \int^{(2)} \mathfrak{N}\,d\,x$

$\varkappa = \int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx$; $\varkappa' = \int \mathfrak{Q}\,dx - \int^{(2)} \mathfrak{P}\,dx + \int^{(3)} \mathfrak{N}\,dx$

etc. etc.

$\tau = \int T\,d\,x \ldots \pm \int^{(m-1)} P\,d\,x \mp \int^{(m)} N\,dx$; $\sigma' = \int \mathfrak{S}\,dx \ldots \pm \int^{(n-1)} \mathfrak{P}\,d\,x \mp \int^{(n)} \mathfrak{N}\,d\,x$

vbi ſigna ſuperiora valent, ſi m et n fuerint numeri pares, contra vero ſi impares. Vlterius quum formula $V\,d\,x$ differentialia vltra $d\,t$ et $d\,s'$ progredientia inuoluere nequeat, euidens eſt fore $\tau = U$ et $\sigma' = \mathfrak{T}$, vnde hae deducuntur aequationes

$$U = \mp \int^{(m)} N\,dx \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots + \int T\,dx$$
$$\mathfrak{T} = \mp \int^{(n)} \mathfrak{N}\,dx \pm \int^{(n-1)} \mathfrak{P}\,dx \mp \int^{(n-2)} \mathfrak{Q}\,dx \ldots + \int \mathfrak{S}\,dx$$

quarum prior poſt m differentiationes et diuiſiones per $d\,x$ reducitur ad hanc

N —

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0.$$

Altera vero poſt differentiationes numero n inſtitutas, totidemque diuiſiones per dx in hanc transformatur:

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} \ldots \mp \frac{d^n\mathfrak{Z}}{dx^n} = 0.$$

Ex quibus patet, ſi formula $V\,dx$ ponatur integrabilis, tum eſſe debere

$$\text{I}^\circ \quad N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0$$

$$\text{II}^\circ. \quad \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n\mathfrak{Z}}{dx^n} = 0$$

quibus duabus aequationibus criteria integrabilitatis huius formulae continentur.

17. Quemadmodum iam demonſtrauimus, ſi formula $V\,dx$ integrabilis ſit, aequationes modo allatas locum habere; ita viciſſim quoque demonſtrari poteſt, quod ſi quantitas V ita fuerit comparata, vt his aequationibus ſatisfiat, formulam differentialem $V\,dx$ eſſe integrabilem. Quandoquidem vero ex iis quae ſupra §. 7, 8 tractauimus, intelligi poterit, quomodo huius propoſitionis demonſtratio ſit adornanda, eam hoc loco penitus praetermittere non dubitauimus. Ceterum ex demonſtratione prioris horum Theorematum iam allata, liquet, quod in-

 tegra-

tegrabilitas formulae $V\,dx$ inuoluat quoque integrabilitatem ſequentium formularum:

$$M\,dx;\ N\,dx;\ \mathfrak{N}\,dx;\ (P-\nu)\,dx;\ (\mathfrak{P}-\nu')\,dx;\ (Q-\pi)\,dx;\ (\mathfrak{Q}-\pi')\,dx \text{ etc.}$$

ex quo etiam ſequitur integrabiles eſſe debere has formulas:

$$M\,dx;\ N\,dx;\ \mathfrak{N}\,dx;\ dx(P+Nx);\ dx(\mathfrak{P}+\mathfrak{N}x);\ dx(Q+Px+\tfrac{1}{2}Nx^2)$$
$$dx(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}x+\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}x^2);\ dx(R+Qx+\tfrac{1}{2}Px^2+\tfrac{1}{6}Nx^3);\ dx(\mathfrak{R}+\mathfrak{Q}x+\tfrac{1}{2}\mathfrak{P}x^2+\tfrac{1}{6}\mathfrak{N}x^3).$$

18. Characteres integrabilitatis pro formula $V\,dx$ modo inuenti ita comparati ſunt, vt priori ſatisfieri debeat, ſi in functione V quantitate z pro conſtanti habita, inquiratur an formula $V\,dx$ ſit integrabilis nec ne? poſteriori autem ſatisfaciendum ſit, ſi y pro conſtante ſpectata, $V\,dx$ fieri debeat integrabile. Prona hinc deducitur conſequentia, quod formula $V\,dx$ ſi fuerit abſolute integrabilis, verum quoque admittat integrale, ſi in quantitate V, ſiue y ſeu z pro conſtante habeatur. Viciſſim autem patet, ſi quantitas V, talis ſit functio variabilium x, y, z et differentialium ex iis ortorum, vt poſitis tam y, quam z conſtantibus, formula $\int V\,dx$ verum conſtituat integrale; eandem formulam abſolute ſpectatam fore integrabilem, id eſt ſi ambae y et z, ſimul vt variabiles ſpectentur. Haec vero proprietas nos deducit ad inuentionem criteriorum pro integrabilitate eiusmodi formulae $V\,dx$, in qua V non

V non ſolum quantitates quaſcunque finitas, x, y, z, w, ſed etiam earum differentialia quaecunque inuoluat, hoc eſt ſi poſito:

$$\frac{dy}{dx}=p;\ \frac{dp}{dx}=q;\ \frac{dq}{dx}=r \text{ etc. } \frac{dz}{dx}=p';\ \frac{dp'}{dx}=q';\ \frac{dq'}{dx}=r' \text{ etc.}$$
$$\frac{dw}{dx}=p'';\ \frac{dp''}{dx}=q'';\ \frac{dq''}{dx}=r'' \text{ etc. etc.}$$

fuerit V functio quaecunque quantitatum x, y, z, w etc.

$$p;\ p';\ p'' \text{ etc. } q;\ q';\ q'' \text{ etc. } r;\ r';\ r'' \text{ etc. etc.}$$

Regula nimirum generalis, quae pro aſſignandis his criteriis valet, ſequens eſt: "Vt formula V dx fiat „integrabilis, poſitis omnibus x, y, z, w etc. ſimul „variabilibus, neceſſum eſt, vt integrationem ad„mittat, prouti praeter quantitatem x, vnaquaeuis „reliquarum x, y, z vel w ſeorſim variabilis habe„tur, reliquis vt conſtantes ſpectatis; vnde pro for„mula V dx tot orientur criteria integrabilitatis, „quot functio V praeter x inuoluat quantitates va„riabiles y, z, w etc. ſeu quot modis x, cum vna„quauis earum, ſeorſim ſpectari poteſt.„ Euidens hinc eſt, ſi ponatur V eſſe functionem quatuor variabilium x, y, z, w atque differentialium inde derivatorum, tum vero ſtatuatur:

$$\begin{aligned} dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ etc.} \\ + N'dz + P'dp' + Q'dq' + R'dr' \text{ etc.} \\ + N''dw + P''dp'' + Q''dq'' + R''dr'' \text{ etc.} \end{aligned}$$

formulam V dx fieri integrabilem, ſi modo tribus ſequentibus aequationibus fuerit ſatisfactum:

I.

$$\text{I. } N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots = 0$$

$$\text{II. } N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} \ldots = 0$$

$$\text{III. } N'' - \frac{dP''}{dx} + \frac{ddQ''}{dx^2} - \frac{d^3R''}{dx^3} \ldots = 0.$$

19. Si quantitas V praeter variabiles x, y, z w etc. earumque differentialia cuiuscunque gradus, formulas quoque integrales, ex iisdem quantitatibus conflatas vtcunque inuoluat, criteria integrabilitatis formulae $V\,dx$ aeque facile eruentur. Quum enim formula $V\,dx$ integrabilis ſit poſitis omnibus y, z, w etc. variabilibus; neceſſum eſt vt integrationem quoque admittat, ſi ſtatuantur aut x et y, aut x et z, aut x et w etc. ſolae variabiles. Vnde ſiquidem ex ſuperioribus iam pateat, ſub quibus conditionibus formula $\int V\,dx$, quae praeter x aliam quamcunque variabilem cum differentialibus eius quomodocunque inuoluat, verum fiat integrale; hae eaedem conditiones dum pro vnaquaque variabili, y, z, w etc. ſeorſim inueſtigantur, collectim ſumtae, vera criteria integrabilitatis formulae $V\,dx$, in qua omnes x, y, z, w etc. pro variabilibus habentur, exhibebunt.

20. Poſtquam igitur iam oſtenderimus, qua ratione criteria integrabilitatis, pro quacunque formula differentiali ſimplici $V\,dx$ inueſtigari queant; proximum eſt, vt ad formulas differentiales quae duplicatae dicuntur, progrediamur. Notum autem eſt formulas integrales duplicatas, ſub huiusmodi forma $\int\int V\,dx\,dy$ repraeſentari eſſe ſolitas, cuius ſignandi rationis hic eſt ſenſus: capiendum primo

eſſe

eſſe integrale formulae $V\,dx$ poſita ſola x variabili, deinde vero formulae differentialis $dy\int V\,dx$, inſtituendam eſſe integrationem habita ſola y variabili; vel viciſſim ſi primum capiatur integrale formulae $V\,dy$ poſita y variabili, poſtea integrandam eſſe formulam $dx\int V\,dy$, ſola x pro variabili ſpectata, vtroque autem modo idem integrale prodire debere. Deinde quod ad ſignificationem litterae V attinet, notandum eſt, eam deſignare quantitatem, quae non modo variabiles x et y, ſed alias quaſcunque z, u, v, w cum ipſarum differentialibus quibuscunque inuoluat, poſitis differentialibus ipſarum x et y conſtantibus, vt igitur ratio differentialium ipſarum z, v, w etc. ex calculo elidatur, liquet has quantitates ſpectandas eſſe, vt functiones ambarum variabilium x et y, adeo vt ex; cauſſa ſtatui debeat

$$dz = p\,dx + p'\,dy.$$

21. Criteria igitur integrabilitatis huiusmodi formularum integralium duplicatarum inueſtigaturi, incipiamus a caſu ſimpliciori, eo nimirum, quo V praeter x et y tantum vnicam nouam variabilem z cum ipſius differentialibus cuiuscunque ordinis complectatur. Quum itaque z quaſi functio binarum x et y tractari debeat, neceſſum eſt vt ſtatuatur:

$$dz = p\,dx + p'\,dy \qquad dq = r\,dx + r'\,dy$$
$$dp = q\,dx + q'\,dy \qquad dq' = r'\,dx + r''\,dy$$
$$dp' = q'\,dx + q''\,dy \qquad dq'' = r''\,dy + r'''\,dy$$

etc.

deinde ponatur

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + N\,dz &+ P\,dp + Q\,dq + R\,dr \\ + M\,dy \qquad &+ P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' \\ &\qquad + Q''\,dq'' + R''\,dr'' \text{ etc.} \\ &\qquad\qquad + R'''\,dr''' \end{aligned}$$

eritque nunc diſpiciendum, quaenam determinationes pro his quantitatibus L, M, N, P, P′ etc. praeſcribendae ſint, vt formula $\int\int V\,dx\,dy$ verum conſtituat integrale, vel potius aſſumto quod formula noſtra ſit integrabilis, quaeramus quaenam inde eliciantur aequationes litteras modo dictas N, P, P′, Q, Q′, Q″ etc. intercedentes? Statuamus igitur integrale huius formulae per duplicem integrationem oriundum eſſe Z, deinde ſumto differentiali dZ, quod prodit habitis omnibus x, y, z ſimul pro variabilibus, ponamus eſſe:

$$\begin{aligned} dZ = \lambda\,dx + \nu\,dz &+ \pi\,dp + \varkappa\,dq \\ + \mu\,dy \qquad &+ \pi'\,dp' + \varkappa'\,dq' \quad \text{etc.} \\ &\qquad + \varkappa''\,dq'' \end{aligned}$$

atque ex principio generali ſupra §. 2. ſtabilito, liquet eſſe debere:

$\left(\frac{d\lambda}{dy}\right) = \left(\frac{d\mu}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\lambda}{dz}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\lambda}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dx}\right)$ etc.
$\left(\frac{d\mu}{dz}\right) = \left(\frac{d\nu}{dy}\right)$; $\left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right)$; $\left(\frac{d\mu}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dp'}\right)$ etc. $\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dz}\right)$;
$\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dz}\right)$ etc. etc.

Ne autem formulis vncinulis incluſis, ſignificatus tribuatur alienus ab eo, quem heic indigitauimus, obſer-

obſeruandum eſt, huiusmodi formulis duplicem tribui poſſe ſenſum. Formula etenim $dy\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$ aut ſignificare ſolet differentiale quantitatis λ, quod prodit, ſi ex quantitatibus valorem ipſius λ ingredientibus, ſola y pro variabili habeatur, reliquis nimirum omnibus, x, z, p, p' etc. conſtantibus poſitis; aut vero hac formula $dy\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$ indicatur, differentiale ipſius λ ex variabilitate ipſius y ortum, ſi quantitates quoque z, p, p' etc. prouti ab y pendent, vt variabiles tractentur, quo poſteriori ſenſu ſola quantitas x vt conſtans ſpectatur. Conſtat autem poſteriori hoc ſignificatu adhibito, aequalitates modo allatas, veritati amplius non conſentire, easque ſolum priori ſenſu veras eſſe, poſteriorem igitur ſignandi rationem tantisper euitemus, donec valores litterarum λ, μ, ν, π, π' etc. inuenerimus; poſtmodum enim maioris breuitatis gratia, eam tanto magis adhibere licet, quod tum amplius nulla ex eius vſu ambiguitas ſit metuenda.

22. Quum itaque ſit $Z = \int\int V\,dx\,dy$, ſi ſtatuatur:

$dZ = \alpha dx + \beta dy$, habebimus $\alpha = \int V dy$ et $\beta = \int V dx$

vbi haec integralia ita capta intelliguntur, vt in priori x pro conſtante habeatur, in poſteriori vero y, quod pro ſimilibus formulis poſt hac occurrentibus quoque valebit, et heic ſemel monuiſſe ſufficiat. Hinc iam reperietur

$$\alpha = \lambda + \nu p + \pi q + \varkappa r \qquad \beta = \mu + \nu p' + \pi q' + \varkappa r'$$
$$+ \pi' q' + \varkappa' r' \text{ etc.} \qquad + \pi' q'' + \varkappa' r'' \text{ etc.}$$
$$+ \varkappa'' r'' \qquad + \varkappa'' r'''.$$

Si igitur vlterius ponatur $d\alpha = \gamma dx + \delta dy$, inuenietur

$$\delta = V = \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\lambda}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\lambda}{dp}\right) + r'\left(\frac{d\lambda}{dq}\right)$$
$$+ q''\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right) + r''\left(\frac{d\lambda}{dq'}\right) \qquad + \nu q' + \pi r' + \varkappa s'$$
$$+ r'''\left(\frac{d\lambda}{dq''}\right) \qquad + \pi' r'' + \varkappa' s''$$
$$+ p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + pp'\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + pq'\left(\frac{d\nu}{dp}\right) \text{ etc.} \qquad + \varkappa'' s'''$$
$$+ pq''\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) \qquad \text{etc.}$$
$$+ q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + qp'\left(\frac{d\pi}{dz}\right)$$
$$+ q'\left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + q'p'\left(\frac{d\pi'}{dz}\right)$$
$$+ r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)$$
$$+ r'\left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right)$$
$$+ r''\left(\frac{d\varkappa''}{dy}\right)$$

Quae aequatio ſub hac quoque forma repraeſentari poteſt:

$$V = \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right) \qquad + \nu q' + \pi r' + \varkappa' s'$$
$$+ q'\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r''\left(\frac{d\varkappa''}{dy}\right) \text{ etc.} \qquad + \pi' r'' + \varkappa' s'' + \text{etc.}$$
$$+ q''\left(\frac{d\pi'}{dx}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \qquad + \varkappa'' s'''$$
$$+ pp'\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + r''\left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right)$$
$$+ r'''\left(\frac{d\varkappa''}{dx}\right)$$

+

$$+ (p'q + pq')\left(\frac{d\pi}{dz}\right)$$
$$+ (p'q' + pq'')\left(\frac{d\pi'}{dz}\right) \text{ etc.}$$

23. Ex aequatione igitur iam propoſita, valores litterarum L, M, N etc. determinari poterunt et primum quidem habebitur:

$$L = \left(\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dd\lambda}{dx\,dy}\right) + p\left(\frac{dd\nu}{dx\,dy}\right) + q\left(\frac{dd\pi}{dx\,dy}\right) + r\left(\frac{dd\varkappa}{dx\,dy}\right)$$
$$+ p'\left(\frac{dd\nu}{dx^2}\right) + q'\left(\frac{dd\pi'}{dxdy}\right) + r'\left(\frac{dd\varkappa'}{dxdy}\right)$$
$$+ q'\left(\frac{dd\pi}{dx^2}\right) + r''\left(\frac{dd\varkappa''}{dxdy}\right)$$
$$+ q''\left(\frac{dd\pi'}{dx^2}\right) + r'\left(\frac{dd\varkappa}{dx^2}\right) + \text{etc.}$$
$$+ pp'\left(\frac{dd\nu}{dxdz}\right) + r''\left(\frac{dd\varkappa'}{dx^2}\right)$$
$$+ r'''\left(\frac{dd\varkappa''}{dx^2}\right)$$
$$+ q'\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + r'\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + s'\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \qquad + (pq' + p'q)\left(\frac{dd\pi}{dxdz}\right)$$
$$+ r''\left(\frac{d\pi'}{dx}\right) + s''\left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right) + \text{etc.} \quad + (pq'' + p'q')\left(\frac{dd\pi'}{dxdz}\right)$$
$$+ s'''\left(\frac{d\varkappa''}{dx}\right)$$

Vnde in vſum vocatis aequalitatibus §. 21. allatis obtinemus:

$$L = \left(\frac{dd\lambda}{dxdy}\right) + p\left(\frac{dd\lambda}{dydz}\right) + q\left(\frac{dd\lambda}{dydp}\right) + r\left(\frac{dd\lambda}{dydq}\right)$$
$$+ p'\left(\frac{dd\lambda}{dxdz}\right) + q'\left(\frac{dd\lambda}{dydp'}\right) + r'\left(\frac{dd\lambda}{dydq'}\right)$$
$$+ q'\left(\frac{dd\lambda}{dxdp}\right) + r''\left(\frac{dd\lambda}{dydq''}\right) + \text{etc.}$$
$$+ q''\left(\frac{dd\lambda}{dxdp'}\right) + r'\left(\frac{dd\lambda}{dxdq}\right)$$
$$+ pp'\left(\frac{dd\lambda}{dz^2}\right) + r''\left(\frac{dd\lambda}{dxdq'}\right)$$
$$+ r'''\left(\frac{dd\lambda}{dxdq''}\right)$$

$$+q'\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)+r'\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)+s'\left(\frac{d\lambda}{dq}\right) \quad +(pq'+p'q)\left(\frac{dd\lambda}{dp\,dz}\right)$$
$$+r''\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right)+s''\left(\frac{d\lambda}{dq'}\right)+\text{etc.}+(pq''+p'q')\left(\frac{dd\lambda}{dp'dz}\right)$$
$$+s'''\left(\frac{d\lambda}{dq''}\right).$$

24. Capiatur iam integrale $\int L\,dx$, poſita y conſtante et habebitur:

$$\int L\,dx = \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)+p'\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)+q'\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)+r'\left(\frac{d\lambda}{dq}\right)$$
$$+q''\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right)+r''\left(\frac{d\lambda}{dq'}\right)+\text{etc.}$$
$$+r'''\left(\frac{d\lambda}{dq''}\right)$$

vnde denuo integrando, habita x pro conſtante orietur $\int dy \int L\,dx = \lambda$. Simili vero ratione, ſi primo capiatur integrale $\int L\,dy$, erit

$$\int L\,dy = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)+p\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)+q\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)+r\left(\frac{d\lambda}{dq}\right)$$
$$+q'\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right)+r'\left(\frac{d\lambda}{dq'}\right)\ \text{etc.}$$
$$+r''\left(\frac{d\lambda}{dq''}\right)$$

iterumque integrando y pro conſtante ſpectata: $\int dx \int L\,dy = \lambda$, ex quo iam liquet eſſe $\lambda = \iint L\,dx\,dy$ vbi ſigna ſummatoria, quantitates, quae loco conſtantium per duplicatam integrationem inuehuntur, iam in ſe inuoluere concipienda ſunt. Quantitates autem hae per integrationem ingreſſae, functiones quaſcunque arbitrarias quantitatum x et y conſtituent, adeo vt ſit $\lambda = \iint L\,dx\,dy + X + Y$, ſignificantibus X et Y, functiones quaſcunque ſolius x et y.

25. Ad eandem rationem demonſtrari poteſt, eſſe $\mu = \iint M\,dx\,dy$ et $\nu = \iint N\,dx\,dy$, adeo vt

his

his aequalitatibus confirmandis vlterius immorari neceſſe non ſit; quaeramus igitur quaenam expreſſiones pro quantitatibus ipſarum π et π' ex valore ipſius V allato inuenia tur? Hunc in finem quaeratur primo valor ipſius P, qui erit

$$\begin{aligned} P = & \left(\frac{dd\pi}{dydx}\right) + p\left(\frac{dd\pi}{dydz}\right) + q\left(\frac{dd\pi}{dydp}\right) + r\left(\frac{dd\pi}{dydq}\right) \\ & + p'\left(\frac{dd\pi}{dxdz}\right) + q'\left(\frac{dd\pi}{dydp'}\right) + r'\left(\frac{dd\pi}{dydq'}\right) \\ & + q'\left(\frac{dd\pi}{dxdp}\right) + r''\left(\frac{dd\pi}{dydq''}\right) \\ & + q''\left(\frac{dd\pi}{dxdp'}\right) + r'\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right) \\ & + pp'\left(\frac{dd\pi}{dz^2}\right) + r''\left(\frac{dd\pi}{dxdq'}\right) + \text{etc.} \\ & + r'''\left(\frac{dd\pi}{dxdq''}\right) \\ & + q'\left(\frac{d\pi}{dz}\right) + r'\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + s'\left(\frac{d\pi}{dq}\right) \quad + (pq' + p'q)\left(\frac{dd\pi}{dzdp}\right) \\ & + r''\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) + s''\left(\frac{d\pi}{dq'}\right) \text{ etc.} + (pq'' + p'q')\left(\frac{dd\pi}{dzdp'}\right) \\ & + s'''\left(\frac{d\pi}{dq''}\right) \\ & + \left(\frac{dv}{dy}\right) + p'\left(\frac{dv}{dz}\right) + q'\left(\frac{dv}{dp}\right) \\ & + q''\left(\frac{dv}{dp'}\right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Sumatur iam integrale $\int P\,dy$, fietque

$$\begin{aligned} \int P\,dy = & \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + p\left(\frac{d\pi}{dz}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\pi}{dq}\right) \\ & + q'\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\pi}{dq'}\right) + \text{etc.} + v \\ & + r''\left(\frac{d\pi}{dq''}\right) \end{aligned}$$

vnde denuo integrando, poſita y conſtante habebitur $\int dx \int P\,dy = \pi + \int v\,dx$, ex quo erit $\pi = \int dx \int P\,dy - \int v\,dx$.

Cete-

Ceterum ſi integratio prima inſtituatur y pro conſtante habita, fiet;

$$\int P\,dx = \left(\frac{d\pi}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\pi}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + q''\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) \text{ etc.}$$

$$+ \int dx\left(\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q''\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) \text{ etc.}\right)$$

atque iterum multiplicando per dy et integrando poſito x conſtante

$$\int dy \int P\,dx = \pi + \int dy \int dx\left(\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q''\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) \text{ etc.}\right)$$

vbi poſterioris membri integrale manifeſto erit $= \int \nu\,dx$, adeo vt iam ſit

$$\pi = \int\int P\,dx\,dy - \int \nu\,dx = \int\int P\,dx\,dy - \int dx \int\int N\,dx\,dy.$$

Simili autem ratione demonſtrabitur eſſe

$$\pi' = \int\int P'\,dx\,dy - \int \nu\,dy = \int\int P'\,dx\,dy - \int dy \int\int N\,dx\,dy.$$

26. Vlterius ad inueſtigandos valores ipſarum $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, breuitatis gratia indigitemus differentialia ipſius V, quae oriuntur poſitis quantitatibus q vel q' vel q'' variabilibus, ex ſola differentiatione litterarum graecarum λ, μ, ν, π etc., per ſequentes ſignandi formulas: $\left[\frac{dV}{dq}\right]$; $\left[\frac{dV}{dq'}\right]$; $\left[\frac{dV}{dq''}\right]$. Hoc igitur obſeruato habebimus

$$Q = \left[\frac{dV}{dq}\right] + \left(\frac{d\pi}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\pi}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + q''\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) + \text{etc.}$$

ex quo deducetur

$$\int Q\,dy = \left(\frac{d\,\varkappa}{d\,x}\right) + p\left(\frac{d\,\varkappa}{d\,z}\right) + q\left(\frac{d\,\varkappa}{d\,p}\right) + q'\left(\frac{d\,\varkappa}{d\,p'}\right) + \text{etc.} + \pi,$$ indeque

$\int dx \int Q\,dy = \varkappa + \int \pi\,dx$, conſequenter fiet $\varkappa = \int dx \int Q\,dy - \int \pi\,dx$, ſiue etiam

$$\varkappa = \int\int Q\,dx\,dy - \int dx \int\int P\,dx\,dy + \int dx \int dx \int\int N\,dx\,dy.$$

At pro $\varkappa'$ inueniendo habebimus

$$Q' = \left[\frac{d\,V}{d\,q'}\right] + \left(\frac{d\,\pi'}{d\,y}\right) + p'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,p}\right) + q''\left(\frac{d\,\pi'}{d\,p'}\right) + \text{etc.} + \nu$$
$$+ \left(\frac{d\,\pi}{d\,x}\right) + p\left(\frac{d\,\pi}{d\,x}\right) + q\left(\frac{d\,\pi}{d\,p}\right) + q'\left(\frac{d\,\pi}{d\,p'}\right) + \text{etc.}$$

vnde prodit

$$\int Q'\,dx = \left(\frac{d\,\varkappa'}{d\,y}\right) + p'\left(\frac{d\,\varkappa'}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\varkappa'}{d\,p}\right) + q''\left(\frac{d\,\varkappa'}{d\,p'}\right) + \text{etc.} + \pi + \int \nu\,dx$$
$$+ \int dx\left(\left(\frac{d\,\pi'}{d\,y}\right) + p'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,p}\right) + q''\left(\frac{d\,\pi'}{d\,p'}\right) + \text{etc.}\right)$$

hincque iterum

$$\int dy \int Q'\,dx = \varkappa + \int \pi\,dy + \int dy \int \nu\,dx + \int dy \int dx\left(\left(\frac{d\,\pi'}{d\,y}\right) + p'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,z}\right) + \text{etc.}\right)$$
$$= \varkappa + \int \pi\,dy + \int \pi'\,dx + \int dy \int \nu\,dx$$

vnde colligitur

$$\varkappa' = \int\int Q'\,dx\,dy - \int \pi\,dy - \int \pi'\,dx - \int\int \nu\,dx\,dy.$$

Denique inuenietur

$$\varkappa'' = \int\int Q''\,dx\,dy - \int \pi'\,dy.$$

27. Deinde ſi vlterius procedere velimus, inveniemus eſſe:

$$\varrho = \int\int R\,dx\,dy - \int \varkappa\,dx$$
$$\varrho' = \int\int R'\,dx\,dy - \int \varkappa\,dy - \int \varkappa'\,dx - \int\int \pi\,dx\,dy$$
$$\varrho'' = \int\int R''\,dx\,dy - \int \varkappa'\,dy - \int \varkappa''\,dx - \int\int \pi'\,dx\,dy$$
$$\varrho''' = \int\int R'''\,dx\,dy - \int \varkappa''\,dx$$

et

$$\sigma = \int\int S\,dx\,dy - \int \varrho\,dx$$
$$\sigma' = \int\int S'\,dx\,dy - \int \varrho\,dy - \int \varrho'\,dx - \int\int \varkappa\,dx\,dy$$
$$\sigma'' = \int\int S''\,dx\,dy - \int \varrho'\,dy - \int \varrho''\,dx - \int\int \varkappa'\,dx\,dy$$
$$\sigma''' = \int\int S'''\,dx\,dy - \int \varrho''\,dy - \int \varrho'''\,dx - \int\int \varkappa''\,dx\,dy$$
$$\sigma^{IV} = \int\int S^{IV}\,dx\,dy - \int \varrho'''\,dy. \text{ etc.}$$

28. Hinc quidem nunc criteria integrabilitatis quaeſita, facillimo negotio erui poterunt, ii enim valores ipſarum, $\nu, \pi, \pi', \varkappa, \varkappa' \varkappa''$ etc., qui nihilo aequantur eadem ſuppeditabunt. Si igitur fuerit $Z = \int\int V\,dx\,dy$ et

$$\begin{aligned} dZ = \lambda dx + \nu dz + \pi dp &+ \varkappa\, dq + \varrho\, dr \\ + \mu dy \qquad\quad + \pi' dp' &+ \varkappa' dq' + \varrho' dr' \\ &+ \varkappa'' dq'' + \varrho'' dr'' \\ &\qquad\qquad + \varrho''' dr''' \end{aligned}$$

tum euidens eſt eſſe $\sigma, \sigma' \sigma''$ etc. $= 0$, ſimiliterque poſito $t = \frac{ds}{dx}$, ſi coefficientes ipſarum dt per τ, τ' etc. exprimantur, erunt quoque hae τ, τ', τ'' etc. $= 0$, vnde

vnde pro criteriis integrabilitatis obtinemus ſequentes aequationes:

I. $\int\int S\,dx\,dy - \int \varrho\,dx = 0$;

II. $\int\int S'\,dx\,dy - \int \varrho\,dy - \int \varrho'\,dx - \int\int \varkappa\,dx\,dy = 0$

III. $\int\int S''\,dx\,dy - \int \varrho'\,dy - \int \varrho''\,dx - \int\int \varkappa'\,dx\,dy = 0$;

IV. $\int\int S'''\,dx\,dy - \int \varrho''\,dy - \int \varrho'''\,dx - \int\int \varkappa''\,dx\,dy = 0$

V. $\int\int S^{IV}\,dx\,dy - \int \varrho'''\,dy = 0$; vlterius

VI. $\int\int T\,dx\,dy - \int \sigma\,dx = 0$;

VII. $\int\int T'\,dx\,dy - \int \sigma\,dy - \int \sigma'\,dx - \int\int \varrho\,dx\,dy = 0$;

VIII. $\int\int T''\,dx\,dy - \int \sigma'\,dy - \int \sigma''\,dx - \int\int \varrho'\,dx\,dy = 0$;

IX. $\int\int T'''\,dx\,dy - \int \sigma''\,dy - \int \sigma'''\,dx - \int\int \varrho''\,dx\,dy = 0$;

X. $\int\int T^{IV}\,dx\,dy - \int \sigma'''\,dy - \int \sigma^{IV}\,dx - \int\int \varrho'''\,dx\,dy = 0$;

XI. $\int\int T^{IV}\,dx\,dy - \int \sigma^{IV}\,dy = 0$.

29. Vt vero melius pateat, qualis forma his aequationibus rite euolutis inducatur, e re erit ſequentes obſeruaſſe aequalitates:

$$\left(\frac{dd\,v}{dx\,dy}\right) = N;\ \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) = \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) - \left(\frac{d\,d\,v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) - N$$

$$\left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right) = \left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) - \left(\frac{d\,d\,v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) - N.$$

$$\left(\frac{d^4\,\varkappa}{dx^3dy}\right) = \left(\frac{d\,d\,Q}{d\,x^2}\right) - \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) + N$$

$$\left(\frac{d^4\,\varkappa'}{dx^2dy^2}\right) = \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) + N - \left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right)$$

 $\left(\frac{d^4\,\varkappa''}{dx\,dy^3}\right)$

$$\left(\frac{d^4\ \varkappa''}{dx\,dy^3}\right) = \left(\frac{dd\,Q''}{d\,y^2}\right) - \left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) + N$$

$$\left(\frac{d^5\ \varrho}{dx^4dy}\right) = \left(\frac{d^3\ R}{d\ x^3}\right) - \left(\frac{d\ d\ Q}{d\ x^2}\right) + \left(\frac{d\ P}{d\ x}\right) - N$$

$$\left(\frac{d^5\ \varrho'}{dx^3dy^2}\right) = \left(\frac{d^3\ R'}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{d\ d\ Q}{d\ x^2}\right) + \left(\frac{d\ P}{d\ x}\right) - N$$
$$- \left(\frac{d\,d\,Q'}{d\,x\,d\,y}\right) + \left(\frac{d\ P'}{d\ y}\right)$$

$$\left(\frac{d^5\ \rho''}{dx^2dy^3}\right) = \left(\frac{d^3\ R''}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{d\ d\,Q'}{d\,x\,d\,y}\right) + \left(\frac{d\ P}{d\ x}\right) - N$$
$$- \left(\frac{d\ d\ Q''}{d\ y^2}\right) + \left(\frac{d\ P'}{d\ y}\right)$$

$$\left(\frac{d^5\ \varrho'''}{dx\,dy^4}\right) = \left(\frac{d^3 R'''}{d\ y^3}\right) - \left(\frac{d\,d\,Q''}{d\ y^2}\right) + \left(\frac{d\ P'}{d\ y}\right) - N$$

Porro

I. $$0 = \left(\frac{d^6\ \sigma}{dx^5\,dy}\right) = \left(\frac{d^4\ S}{d\ x^4}\right) - \left(\frac{d^3 R}{d\ x^3}\right) + \left(\frac{d\ d\ Q}{d\ x^2}\right) - \left(\frac{d\ P}{d\ x}\right) + N$$

II. $$0 = \left(\frac{d^6.\ \sigma'}{dx^4dy^2}\right) = \left(\frac{d^4\ S'}{dx^3\,dy}\right) - \left(\frac{d^3 R}{d\ x^3}\right) + \left(\frac{ddQ}{d\,x^2}\right) - \left(\frac{d\ P}{d\ x}\right) + N$$
$$- \left(\frac{d^3\ R'}{dx^2dy}\right) + \left(\frac{d\ d\ Q'}{d\,x\,d\,y}\right) - \left(\frac{d\ P'}{d\ y}\right)$$

III. $$0 = \left(\frac{d^6.\ \sigma''}{dx^3dy^3}\right) = \left(\frac{d^4\ S''}{dx^2\ dy^2}\right) - \left(\frac{d^3\ R'}{dx^2dy}\right) + \left(\frac{d\ d\ Q}{d\ x^2}\right) - \left(\frac{d\ P}{d\ x}\right) + N$$
$$- \left(\frac{d^3\ R''}{dx\,dy^2}\right) + \left(\frac{d\,d\ Q'}{dx\ dy}\right) - \left(\frac{d\ P'}{d\ y}\right)$$
$$+ \left(\frac{d\ d\ Q''}{d\ y^2}\right)$$

IV. $$0 = \left(\frac{d^6.\ \sigma'''}{dx^2dy^4}\right) = \left(\frac{d^4\ S'''}{dx\ dy^3}\right) - \left(\frac{d^3\ R''}{dx\ dy^2}\right) + \left(\frac{d\,d\,Q'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d\ P}{d\ x}\right) + N$$
$$- \left(\frac{d^3 R'''}{d\,y^3}\right) + \left(\frac{d\ d\ Q''}{d\ y^2}\right) - \left(\frac{d\ P'}{d\ y}\right)$$

V. $$0 = \left(\frac{d^6.\sigma''''}{dx\,dy^5}\right) = \left(\frac{d^4 S''''}{d\ y^4}\right) - \left(\frac{d^3\ R'''}{d\ y^3}\right) + \left(\frac{d\,d\ Q''}{d\ y^2}\right) - \left(\frac{d\ P'}{d\ y}\right) + N$$

Hi igitur quinque valores vltimi nihilo aequales poſiti, praebebunt totidem criteria integrabilitatis pro formula noſtra V $d\,x\,d\,y$. Ceterum omnino notaſſe meretur, omnibus his aequationibus in vnam ſummam collectis inueniri:

5 N—

$$5N - 4\left(\frac{dP}{dx}\right) + 3\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right)$$
$$- 4\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 3\left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) - 2\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) + \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right)$$
$$+ 3\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - 2\left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right) + \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) = 0$$
$$- 2\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) + \left(\frac{d^4S'''}{dxdy^3}\right)$$
$$+ \left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right).$$

30. Vlterius erit:

VI. $0 = \left(\frac{d^7T}{dx^6dy}\right) = \left(\frac{d^5T}{dx^5}\right) - \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) + \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N$

VII. $0 = \left(\frac{d^7T'}{dx^5dy^2}\right) = \left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right) - \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) + \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N$
$- \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right)$

VIII. $0 = \left(\frac{d^7T''}{dx^4dy^3}\right) = \left(\frac{d^5T'''}{dx^3dy^2}\right) - \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) + \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N$
$- \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right)$
$+ \left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)$

IX. $0 = \left(\frac{d^7T'''}{dx^3dy^4}\right) = \left(\frac{d^5T'''}{dx^2dy^3}\right) - \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N$
$- \left(\frac{d^4S'''}{dxdy^3}\right) + \left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right)$
$+ \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)$

X. $0 = \left(\frac{d^7T''''}{dx^2dy^5}\right) = \left(\frac{d^5T''''}{dxdy^4}\right) - \left(\frac{d^4S'''}{dxdy^3}\right) + \left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N$
$- \left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) + \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right)$

XI. $0 = \left(\frac{d^7T'''''}{dxdy^6}\right) = \left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right) - \left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) + \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) - N$

Hae igitur ſex aequationes reliqua criteria integrabilitatis formulae noſtrae ſuppeditabunt, eas vero in vnam ſummam colligendo obtinebimus:

$$\begin{aligned}
6N &- 5\left(\frac{dP}{dx}\right) + 4\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - 3\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \left(\frac{d^5T}{dx^5}\right) \\
&- 5\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 4\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - 3\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) + 2\left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) - \left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right) \\
&\qquad + 4\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - 3\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) + 2\left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) - \left(\frac{d^5T''}{dx^3dy^2}\right) = 0 \\
&\qquad\qquad - 3\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) + 2\left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^5T'''}{dx^2dy^3}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + 2\left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) - \left(\frac{d^5T''''}{dx\,dy^4}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right).
\end{aligned}$$

31. Ab hac aequatione, ſi ſumma quinque aequationum priorum ſubtrahatur, obtinebimus:

$$\begin{aligned}
N &- \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) \ldots\ldots - \left(\frac{d^5T}{dx^5}\right) \\
&- \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) \qquad \vdots \qquad = 0 \\
&\qquad + \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) \ldots\ldots - \left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right).
\end{aligned}$$

Haec aequatio per 5 multiplicata, et ab ea §. 29. ſubtracta dat:

$$\begin{aligned}
&+ \left(\frac{dP}{dx}\right) - 2\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + 3\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) \ldots\ldots + 5\left(\frac{d^5T}{dx^5}\right) \\
&+ \left(\frac{dP'}{dy}\right) - 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + 3\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) \qquad \vdots \qquad = 0 \\
&\qquad - 2\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) + 3\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) \qquad \vdots \\
&\qquad\qquad + 3\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) \ldots\ldots + 5\left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right).
\end{aligned}$$

32. Si aequationes quinque §. 29. addantur ad ſex §. 30. ita, vt ſequentes capiantur ſummae I + VII; II + VIII; III + IX etc. orientur hae aequationes:

$$\left(\frac{dP'}{dy}\right)-\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right)-\left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right)+\left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right)=0$$
$$-\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right)-\left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right)+\left(\frac{d^5T''}{dx^3dy^2}\right)=0$$
$$+\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right)-\left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right)+\left(\frac{d^5T'''}{dx^2dy^3}\right)=0$$
$$-\left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right)+\left(\frac{d^5T''''}{dx\,dy^4}\right)=0$$
$$+\left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right)=0.$$

Quarum aequationum ſumma ab aequatione VI. §. 30. ſubtracta dat aequationem priorem ſupra §. 31. allatam. Porro ſi aequationes §. 29. cum iis §. 30. ita combinentur, vt ſumantur V + X; IV + IX, III + VIII etc. prodibunt ſequentes aequationes:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)-\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right)-\left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right)+\left(\frac{d^5T''''}{dx\,dy^4}\right)=0$$
$$-\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right)-\left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right)+\left(\frac{d^5T'''}{dx^3dy^3}\right)=0$$
$$+\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)-\left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right)+\left(\frac{d^5T''}{dx^3dy^2}\right)=0$$
$$-\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right)+\left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right)=0$$
$$+\left(\frac{d^5T}{dx^5}\right)=0$$

quarum aequationum ſumma ab aequatione XI §. 30 ſubtracta, iterum producit aequationem priorem §. 31. allatam.

33. Criteria igitur integrabilitatis formulae $V\,dx\,dy$, vno complexu repraeſentantur hac aequatione:

$$N - \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) + \left(\frac{d\,d\,Q}{d\,x^2}\right) - \left(\frac{d^3\,R}{d\,x^3}\right) + \left(\frac{d^4\,S}{d\,x^4}\right) - \left(\frac{d^5\,T}{d\,x^5}\right)$$
$$- \left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) + \left(\frac{d\,d\,Q'}{d\,x\,d\,y}\right) - \left(\frac{d^3\,R'}{dx^2\,dy}\right) + \left(\frac{d^4\,S'}{dx^3\,dy}\right) - \left(\frac{d^5\,T'}{dx^4\,dy}\right)$$
$$+ \left(\frac{d\,d\,Q''}{d\,y^2}\right) - \left(\frac{d^3\,R''}{dx\,dy^2}\right) + \left(\frac{d^4\,S''}{dx^2\,dy^2}\right) - \left(\frac{d^5\,T''}{dx^3\,dy^2}\right) = 0$$
$$- \left(\frac{d^3\,R'''}{d\,y^3}\right) + \left(\frac{d^4\,S'''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^5\,T'''}{dx^2\,dy^3}\right)$$
$$+ \left(\frac{d^4\,S''''}{d\,y^4}\right) - \left(\frac{d^5\,T''''}{dx\,dy^4}\right)$$
$$- \left(\frac{d^5\,T'''''}{d\,y^5}\right).$$

Singula autem eorum hinc inueniuntur, ſi omnia membra in iisdem lineis horizontalibus vel diagonalibus occurrentia, ſeorſim nihilo aequentur. Vt autem ex ipſa formulae differentialis natura perſpiciatur $\left(\frac{d^5\,T}{d\,x^5}\right)$ et $\left(\frac{d^5\,T'''''}{d\,y^5}\right)$ reuera nihilo aequari, perpendendum eſt, nos ſuppoſuiſſe vltima membra, quae in valore ipſius $d\,Z$ occurrunt eſſe $\varrho\,d\,r$, $\varrho'\,d\,r'$ etc. adeo vt quantitas Z valores differentiales vltra r aſſurgentes non inuoluat. Videndum igitur eſt, quaenam ex duplici differentiatione ipſius Z, qua primo x deinde y pro conſtante habetur, in functionem V introducantur variabiles. Si igitur fuerit

$$dr = s\,dx + s'\,dy \quad \text{et} \quad ds = t\,dx + t'\,dy$$
$$dr' = s'\,dx + s''\,dy \qquad ds' = t'\,dx + t''\,dy$$
$$dr'' = s''\,dx + s'''\,dy \qquad ds'' = t''\,dx + t'''\,dy$$
$$dr''' = s'''\,dx + s^{IV}\,dy \qquad ds''' = t'''\,dx + t^{IV}\,dy$$
$$ds^{IV} = t^{IV}\,dx + t^{V}\,dy$$

liquet quantitates ex differentiatione duplici variabilium r, r etc. ortas, fore t', $t''\,\ldots\,t^{IV}$, vnde euidens

dens eſt, quantitates t et t^{V}, functionem V non ingredi, quamobrem nec dV has quantitates $T\,dt$ et $T^{V}\,dt^{V}$ inuoluere poterit.

34. Ex his ergo iam conſtat, quo modo ſola conſideratio differentialis dV cognitionem criteriorum integrabilitatis pro formula $V\,dx\,dy$ ſuppeditet, eo nimirum res redit, vt ex forma differentialis dV, de forma differentialis dZ iudicium inſtituatur, quod facili negotio fieri poteſt, modo inquiratur, in eas quantitates, quae ob duplicem differentiationem modo memoratam quantitatum formulam Z ingredientium, in V introducuntur. Sequenti autem tabella harum quantitatum mutuam dependentiam, ob oculos ponere, congruum viſum eſt:

Quantitates functionem Z ingredientes.	Quantitates inde per 1^{mam} differentiationem ortae.		Quantitates per ſecundum differentiationem ortae.
z	p vel	p'	q'
p	q	q'	r'
p'	q'	q''	r''
q	r	r'	s'
q'	r'	r''	s''
q''	r''	r'''	s'''
r	s	s'	t'
r'	s'	s''	t''
r''	s''	s'''	t'''
r'''	s'''	s^{IV}	t^{IV}
etc.	etc.		etc.

 liquet

liquet autem imprimis ex quantitatibus tertiae columnae, de correſpondentibus primae iudicium ferendum eſſe. Sic ex: cauſa, ſi in differentiali dV terminus $R'' dr''$ defuerit, id pro certo indicio erit, in dZ terminum $\pi' dp'$ non adeſſe, ſeu eſſe $\pi' = 0$.

35. Si propoſita nunc fuerit formula differentialis duplicata $V dx dy$, in qua functio V praeter quantitates x et y, quarum differentialia ponuntur conſtantia, duas alias variabiles z et v cum earum differentialibus quibuscunque inuoluat; criteria integrabilitatis iſtiusmodi formulae ex principiis modo expoſitis facile aſſignari poterunt. Poſito enim

$$\begin{array}{ll} dz = p\,dx + p'\,dy & dv = \mathfrak{p}'\,dx + \mathfrak{p}'\,dy \\ dp = q\,dx + q'\,dy & d\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\,dx + \mathfrak{q}'\,dy \\ dp' = q'\,dx + q''\,dy & d\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'\,dx + \mathfrak{q}''\,dy \\ dq = r\,dx + r'\,dy & d\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\,dx + \mathfrak{r}'\,dy \\ dq' = r'\,dx + r''\,dy & d\mathfrak{q}' = \mathfrak{r}'\,dx + \mathfrak{r}''\,dy \\ dq'' = r''\,dx + r'''\,dy \text{ etc.} & d\mathfrak{q}'' = \mathfrak{r}''\,dx + \mathfrak{r}'''\,dy \text{ etc.} \end{array}$$

atque

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + N\,dz &+ P\,dp + Q\,dq + \text{etc.} \\ + M\,dy + \mathfrak{N}\,dv &+ P'\,dp' + Q'\,dq' \\ &+ \mathfrak{P}\,d\mathfrak{p} + Q''\,dq'' \\ &+ \mathfrak{P}'\,d\mathfrak{p}' + \mathfrak{Q}\,d\mathfrak{q} + \text{etc.} \\ &\qquad + \mathfrak{Q}'\,d\mathfrak{q}' \\ &\qquad + \mathfrak{Q}''\,d\mathfrak{q}'' \end{aligned}$$

aequa-

aequationes inter litteras N, P, P′ etc. et 𝔑, 𝔓, 𝔓′ in ſubſidium vocata regula §. 18. allata, inueſtigandae ſunt. Primo ſcilicet habita quantitate v pro conſtante, quaerantur criteria integrabilitatis pro formula duplicata V $dx\,dy$, tum vero iterum poſita z conſtante ſimilia criteria huius formulae inueſtigentur; dein vtramque claſſem horum criteriorum colligendo, de integrabilitate formulae V $dx\,dy$, in qua z et v, ſimul vt variabiles tractantur, iudicare licebit. Huius vero aſſerti vlteriorem demonſtrationem eo minus e re erit hoc loco adferre, quod ex iis quae ſupra §. 15 et ſeqq. pro ſimili caſu formulae differentialis V dx docuimus, pateat quomodo ea adornari debeat.

36. In genere igitur, ſi in formula differentiali duplicata V $dx\,dy$, V praeter quantitates x et y, quotcunque alias variabiles z, u, v etc. cum ipſarum differentialibus cuiuscunque ordinis inuoluat, haec regula pro integrabilitate huius formulae examinanda valebit: "Quaerantur valores formulae V$dx\,dy$ „qui prodeunt, ſi in quantitate V praeter x et y, „ſemper vna reliquarum vt z variabilis ſtatuitur, cae„teris u, v etc. pro conſtantibus ſpectatis, et pro„deant hinc formulae V′$dx\,dy$; V″$dx\,dy$; V‴$dx\,dy$, „tum inueſtigentur criteria integrabilitatis pro hiſce „formulis, atque neceſſum erit, vt omnibus his „criteriis ſatisfiat, quo formula V $dx\,dy$ poſitis „omnibus z, u, v etc. ſimul variabilibus fiat inte„grabilis.„

37. Conſideremus iam formulas integrales triplicatas, quae ſub hac forma repraeſentari poſſunt $\int\int\int V\,dx\,dy\,dz$. Hic enim poſita V functione trium quantitatum x, y, z nec non aliarum quarumcunque variabilium, prima integratio inſtituatur conſiderata x vt variabili, y vero et z pro conſtantibus habitis, deinde ſecunda integratione quaeratur integrale formulae $dy\int V\,dx$; poſitis x et z conſtantibus et denique tertia integratione, inueſtigetur integrale formulae $dz\int dy\int V\,dx$, conſiderando x et y vt conſtantes. Quaeritur ergo quomodo functio V comparata eſſe debeat, vt huiusmodi formula triplicata $\int\int\int V\,dx\,dy\,dz$ verum conſtituat integrale? In genere autem patet integrale hinc oriundum ita eſſe debere comparatum, vt idem prodeat, quocunque ordine, hae tres quantitates x, y, z variabiles ſtatuantur, adeo vt ſit:

$$\int dz\int dy\int V\,dx = \int dz\int dx\int V\,dy = \int dy\int dz\int V\,dx$$
$$= \int dy\int dx\int V\,dz = \int dx\int dy\int V\,dz = \int dx\int dz\int V\,dy.$$

38. Ex huiusmodi formularum integralium triplicatarum numero, conſideremus primo caſum ſimpliciſſimum quo V praeter x, y et z, quarum differentialia conſtantia ſupponuntur, inuoluat aliam quandam variabilem v nec non quaecunque ipſius differentialia. Vt vero ſpecies huiusmodi differentialium e calculo tollatur, et quum triplex heic ſit inſtituenda integratio, prout tres quantitates x, y, z pro variabilibus habentur, liquet quantitatem v conſide-

ſiderandam eſſe, vt functionem trium variabilium, x, y, z adeo vt ſtatuere liceat:

$$dv = p\,dx + p'\,dy + p''\,dz \qquad dq = r\,dx + r'\,dy + r''\,dz$$

tum vero

$$dq' = r'\,dx + r'''\,dy + r^{IV}\,dz$$

$$dp = q\,dx + q'\,dy + q''\,dz \qquad dq'' = r''\,dx + r^{IV}\,dy + r^{V}\,dz$$

$$dp' = q'\,dx + q'''\,dy + q^{IV}\,dz \qquad dq''' = r'''\,dx + r^{VI}\,dy + r^{VII}\,dz$$

$$dp'' = q''\,dx + q^{IV}\,dy + q^{V}\,dz \qquad dq^{IV} = r^{IV}\,dx + r^{VII}\,dy + r^{VIII}\,dz$$

$$dq^{V} = r^{V}\,dx + r^{VIII}\,dy + r^{IX}\,dz.$$

Hinc autem liquet $d\mathrm{V}$ huiusmodi formam habere:

$$\begin{aligned} d\mathrm{V} = {} & + \mathrm{I}\,dx + \mathrm{N}\,dv + \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \text{etc.} \\ & + \mathrm{L}\,dy \qquad + \mathrm{P}'\,dp' + \mathrm{Q}'\,dq' \\ & + \mathrm{M}\,dz \qquad + \mathrm{P}''\,dp'' + \mathrm{Q}''\,dq'' \\ & \qquad\qquad + \mathrm{Q}'''\,dq''' \\ & \qquad\qquad + \mathrm{Q}^{IV}\,dq^{IV} \\ & \qquad\qquad + \mathrm{Q}^{V}\,dq^{V}. \end{aligned}$$

Si vero ſupponatur eſſe $\mathrm{Z} = \int\int\int \mathrm{V}\,dx\,dy\,dz$ ſitque

$$\begin{aligned} d\mathrm{Z} = {} & \iota\,dx + \nu\,dv + \pi\,dp + \varkappa\,dq + \text{etc.} \\ & + \lambda\,dy \qquad + \pi'\,dp' + \varkappa'\,dq' \\ & + \mu\,dz \qquad + \pi''\,dp'' + \varkappa''\,dq'' \\ & \qquad\qquad + \varkappa'''\,dq''' \\ & \qquad\qquad + \varkappa^{IV}\,dq^{IV} \\ & \qquad\qquad + \varkappa^{V}\,dq^{V}. \end{aligned}$$

inuentio criteriorum integrabilitatis formulae $\mathrm{V}\,dx\,dy\,dz$ eo reducitur, vt valores coefficientium

ι; λ; μ; ν etc. ope quantitatum I, L, M, N etc. determinentur.

39. Relationes igitur has inueſtigaturi, ne in nimis prolixos incidamus calculos, ſtatuamus mox ſequentes ipſarum ι, λ, μ etc. valores

$$\iota = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{I}\,dx\,dy\,dz + \alpha;\ \lambda = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{L}\,dx\,dy\,dz + \beta;$$
$$\mu = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{M}\,dx\,dy\,dz + \gamma;\ \nu = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{N}\,dx\,dy\,dz + \delta;$$
$$\pi = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{P}\,dx\,dy\,dz + \varepsilon;\ \pi' = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{P}'\,dx\,dy\,dz + \varepsilon';$$
$$\pi'' = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{P}''\,dx\,dy\,dz + \varepsilon'';\ \varkappa = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{Q}\,dx\,dy\,dz + \zeta;$$
$$\varkappa' = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{Q}'\,dx\,dy\,dz + \zeta' \text{ etc. etc.}$$

Deinde quum ſit $\mathrm{Z} = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{V}\,dx\,dy\,dz$, patet quoque eſſe $d\,\mathrm{V} = \left(\frac{d^4\,\mathrm{Z}}{dx\,dy\,dz}\right)$. Si proinde valor ſuppoſitus ipſius $d\mathrm{V}$ comparetur cum eo, qui ex differentiatione formulae $d\mathrm{Z}$ oritur, facillimum erit valores litterarum α, β, γ determinare, vnde deinde ι, λ, μ, ν etc. determinabuntur.

40. Habemus vero primo, ſumendo differentiale ipſius $d\,\mathrm{Z}$ poſita ſola x variabili

$$\left(\frac{dd\mathrm{Z}}{dx}\right) = + dx\left(\int\!\!\int \mathrm{I}\,dy\,dz + \left(\frac{d\,\alpha}{dx}\right)\right) + dp \left\{ \begin{array}{l} \int\!\!\int \mathrm{P}\,dy\,dz + \left(\frac{d\,\varepsilon}{dx}\right) \\ + \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{N}\,dx\,dy\,dz + \delta \end{array} \right\}$$
$$+ dy\left(\int\!\!\int \mathrm{L}\,dy\,dz + \left(\frac{d\,\beta}{dx}\right)\right)$$
$$+ dz\left(\int\!\!\int \mathrm{M}\,dy\,dz + \left(\frac{d\,\gamma}{dx}\right)\right) + dp'\left(\int\!\!\int \mathrm{P}'\,dy\,dz + \left(\frac{d\,\varepsilon'}{dx}\right)\right)$$
$$+ dv\left(\int\!\!\int \mathrm{N}\,dy\,dz + \left(\frac{d\,\delta}{dx}\right)\right) + dp''\left(\int\!\!\int \mathrm{P}''\,dy\,dz + \left(\frac{d\,\varepsilon''}{dx}\right)\right)$$

$+ dq$

$$+dq\,(\int\int Q\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta}{dx})+\int\int\int P\,dx\,dy\,dz+\varepsilon)$$
$$+dq'\,(\int\int Q'\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta'}{dx})+\int\int\int P'\,dx\,dy\,dz+\varepsilon')$$
$$+dq''(\int\int Q''\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta''}{dx})+\int\int\int P''\,dx\,dy\,dz+\varepsilon'')$$
$$+dq'''(\int\int Q'''\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta'''}{dx}))$$
$$+dq^{IV}(\int\int Q^{IV}\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta''''}{dx}))$$
$$+dq^{V}(\int\int Q^{V}\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta'''''}{dx}))\text{ etc.}$$

Vlterius differentiando, habita y tantum pro variabili:

$$\begin{aligned}(\tfrac{d^2 Z}{dx\,dy}) &= dx(\int I\,dz+(\tfrac{dd\alpha}{dx\,dy}))+dp\left\{\begin{array}{l}\int P\,dz+(\tfrac{dd\varepsilon}{dx\,dy})\\ +\int\int N\,dx\,dz+(\tfrac{d\delta}{dy})\end{array}\right\}\\ &+dy(\int L\,dz+(\tfrac{dd\beta}{dx\,dy}))\\ &+dz(\int M\,dz+(\tfrac{dd\gamma}{dx\,dy}))+dp'\left\{\begin{array}{l}\int P'\,dz+(\tfrac{dd\varepsilon'}{dx\,dy})\\ +\int\int N\,dy\,dz+(\tfrac{d\delta}{dx})\end{array}\right\}\\ &+dv(\int N\,dz+(\tfrac{dd\delta}{dx\,dy}))\\ &+dp''(\int P''dz+(\tfrac{dd\varepsilon''}{dx\,dy}))\end{aligned}$$

$$+dq\,(\int Q\,dz+(\tfrac{dd\zeta}{dx\,dy})+\int\int P\,dx\,dz+(\tfrac{d\varepsilon}{dy}))$$
$$+dq'\left\{\begin{array}{l}\int Q'\,dz+(\tfrac{dd\zeta'}{dx\,dy})+\int\int P'\,dx\,dz+(\tfrac{d\varepsilon'}{dy})+\int\int P\,dy\,dx+(\tfrac{d\varepsilon}{dx})\\ \qquad+\int\int\int N\,dx\,dy\,dz+\delta\end{array}\right\}$$
$$+dq''(\int Q''\,dz+(\tfrac{dd\zeta''}{dx\,dy})+\int\int P''\,dx\,dz+(\tfrac{d\varepsilon''}{dy}))$$
$$+dq'''(\int Q'''dz+(\tfrac{dd\zeta'''}{dx\,dy})+\int\int P'\,dy\,dz+(\tfrac{d\varepsilon'}{dx}))$$
$$+dq^{IV}(\int Q^{IV}dz+(\tfrac{dd\zeta''''}{dx\,dy})+\int\int P''\,dy\,dz+(\tfrac{d\varepsilon''}{dx}))$$
$$+dq^{V}(\int Q^{V}dz+(\tfrac{dd\zeta'''''}{dx\,dy}))\text{ etc.}$$

Deni-

Denique differentiando poſita ſola z variabili:

$$\left(\frac{d^4 Z}{dx\,dy\,dz}\right) = dx\left(I + \left(\frac{d^3\alpha}{dx\,dy\,dz}\right)\right) + dy\left(L + \left(\frac{d^3\beta}{dx\,dy\,dz}\right)\right) + dz\left(M + \left(\frac{d^3\gamma}{dx\,dy\,dz}\right)\right) + dv\left(N + \left(\frac{d^3\delta}{dx\,dy\,dz}\right)\right)$$

$$+ dp\left\{\begin{array}{l} P + \left(\frac{d^3\varepsilon}{dx\,dy\,dz}\right) \\ + \int N\,dx + \left(\frac{dd\delta}{dy\,dz}\right)\end{array}\right\} + dp'\left\{\begin{array}{l} P' + \left(\frac{d^3\varepsilon'}{dx\,dy\,dz}\right) \\ + \int N\,dy + \left(\frac{dd\delta}{dx\,dz}\right)\end{array}\right\} + dp''\left\{\begin{array}{l} P'' + \left(\frac{d^3\varepsilon''}{dx\,dy\,dz}\right) \\ + \int N\,dz + \left(\frac{dd\delta}{dx\,dy}\right)\end{array}\right\}$$

$$+ dq\left(Q + \left(\frac{d^3\zeta}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P\,dx + \left(\frac{dd\varepsilon}{dy\,dz}\right)\right)$$

$$+ dq'\left\{\begin{array}{l} Q' + \left(\frac{d^3\zeta'}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P'dx + \left(\frac{dd\varepsilon'}{dy\,dz}\right) + \int P\,dy + \left(\frac{dd\varepsilon}{dx\,dz}\right) \\ + \iint N\,dx\,dy + \left(\frac{d\delta}{dz}\right)\end{array}\right\}$$

$$+ dq''\left\{\begin{array}{l} Q'' + \left(\frac{d^3\zeta''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P''dx + \left(\frac{dd\varepsilon''}{dy\,dz}\right) + \int P\,dz + \left(\frac{dd\varepsilon}{dx\,dy}\right) \\ + \iint N\,dx\,dz + \left(\frac{d\delta}{dy}\right)\end{array}\right\}$$

$$+ dq'''\left(Q''' + \left(\frac{d^3\zeta'''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P'\,dy + \left(\frac{dd\varepsilon'}{dx\,dz}\right)\right)$$

$$+ dq^{IV}\left\{\begin{array}{l} Q^{IV} + \left(\frac{d^3\zeta''''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P''dy + \left(\frac{dd\varepsilon''}{dx\,dz}\right) + \int P'dz + \left(\frac{dd\varepsilon'}{dx\,dy}\right) \\ + \iint N\,dy\,dz + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)\end{array}\right\}$$

$$+ dq^{V}\left(Q^{V} + \left(\frac{d^3\zeta'''''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P''dz + \left(\frac{dd\varepsilon''}{dx\,dy}\right)\right) \text{ etc.}$$

41. Comparando nunc hanc aequationem, cum valore ipſius dV aſſumto, inueniemus

$$I = I + \left(\frac{d^3\alpha}{dx\,dy\,dz}\right);\; L = L + \left(\frac{d^3\beta}{dx\,dy\,dz}\right);$$

$$M = M + \left(\frac{d^3\gamma}{dx\,dy\,dz}\right);\; N = N + \left(\frac{d^3\delta}{dx\,dy\,dz}\right)$$

vnde ſequitur $\left(\frac{d^3\alpha}{dx\,dy\,dz}\right) = 0$; $\left(\frac{d^3\beta}{dx\,dy\,dz}\right) = 0$ etc.

hinc

hinc vero deducitur

$$\alpha = \Delta(x,y) + \Phi(x,z) + \psi(y,z),$$

vbi $\Delta(x,y)$ ſignificat functionem quamcunque ipſarum x et y; $\Phi(x,z)$ ipſarum x et z, atque $\psi(y,z)$ ipſarum y et z. Quum autem per ipſam integrationem huiusmodi functiones arbitrariae iam indroductae intelligantur, ita vt $\int\int\int \mathrm{I}\,dx\,dy\,dz$ easdem iam inuoluat, tuto ſtatuere licet $\alpha = 0$, ſimili vero ratione erunt $\beta = 0$; $\gamma = 0$ et $\delta = 0$, adeo vt habeatur

$$\iota = \int\int\int \mathrm{I}\,dx\,dy\,dz; \quad \lambda = \int\int\int \mathrm{L}\,dx\,dy\,dz$$

$$\mu = \int\int\int \mathrm{M}\,dx\,dy\,dz; \quad \nu = \int\int\int \mathrm{N}\,dx\,dy\,dz.$$

42. Deinde aequando inter ſe coefficientes ipſarum dp, dp', dp'' obtinebimus ſequentes aequationes:

$$0 = \left(\frac{d^3\,\varepsilon}{dx\,dy\,dz}\right) + \int \mathrm{N}\,dx; \quad 0 = \left(\frac{d^3\,\varepsilon'}{dx\,dy\,dz}\right) + \int \mathrm{N}\,dy;$$

$$0 = \left(\frac{d^3\,\varepsilon''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int \mathrm{N}\,dz;$$

ex quibus oritur:

$$\varepsilon = -\int dx \int\int\int \mathrm{N}\,dx\,dy\,dz = -\int \nu\,dx;$$

$$\varepsilon' = -\int \nu\,dy; \quad \varepsilon'' = -\int \nu\,dz$$

proinde habebimus

$$\pi = \int\int\int \mathrm{P}\,dx\,dy\,dz - \int \nu\,dx; \quad \pi' = \int\int\int \mathrm{P}'\,dx\,dy\,dz - \int \nu\,dy;$$

$$\pi'' = \int\int\int \mathrm{P}''\,dx\,dy\,dz - \int \nu\,dz.$$

Comparatis denique inter ſe terminis, qui per dq, dq' etc. afficiuntur et loco ε, ε', ε'' valoribus ipſorum introductis fiet:

$$0=\left(\frac{d^3 \zeta}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P\,dx-\int dx\int N\,dx$$

$$0=\left(\frac{d^3 \zeta'}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P'\,dx+\int P\,dy-\int dx\int N\,dy-\int dx\int N\,dy$$
$$+\iint N\,dx\,dy$$

$$0=\left(\frac{d^3 \zeta''}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P''\,dx+\int P\,dz-\int dx\int N\,dz-\int dx\int N\,dz$$
$$+\iint N\,dx\,dz$$

$$0=\left(\frac{d^3 \zeta'''}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P'\,dy-\int dy\int N\,dy$$

$$0=\left(\frac{d^3 \zeta''''}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P''\,dy+\int P'\,dz-\int dy\int N\,dz-\int dy\int N\,dz$$
$$+\iint N\,dy\,dz$$

$$0=\left(\frac{d^3 \zeta'''''}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P''\,dz-\int dz\int N\,dz.$$

Vnde ſequentes conſequimur valores:

$$\zeta=-\int\pi\,dx;\quad \zeta'=-\int\pi\,dy-\int\pi'\,dx-\iint\nu\,dx\,dy$$
$$\zeta''=-\int\pi\,dz-\int\pi''\,dx-\int\nu\,dx\,dz;\quad \zeta'''=-\int\pi'\,dy$$
$$\zeta^{IV}=-\int\pi'\,dx-\int\pi''\,dy-\int\nu\,dy\,dz;\quad \zeta^{V}=-\int\pi''\,dz$$

ex quibus colligitur:

$$\varkappa=\iiint Q\,dx\,dy\,dz-\int\pi\,dx;$$
$$\varkappa'=\iiint Q'\,dx\,dy\,dz-\int\pi\,dy-\int\pi\,dx-\iint\nu\,dx\,dy$$
$$\varkappa''=\iiint Q''\,dx\,dy\,dz-\int\pi\,dz-\int\pi''\,dx-\iint\nu\,dx\,dz$$
$$\varkappa'''=\iiint Q'''\,dx\,dy\,dz-\int\pi'\,dy$$
$$\varkappa^{IV}=\iiint Q^{IV}\,dx\,dy\,dz-\int\pi'\,dz-\int\pi''\,dy-\iint\nu\,dy\,dz$$
$$\varkappa^{V}=\iiint Q^{V}\,dx\,dy\,dz-\int\pi''\,dz.$$

43. Inuentis hac ratione valoribus litterarum $\varkappa$, λ, μ, ν, π, π' etc., ii, qui pro formula differentiali triplicata $V\,dx\,dy\,dz$ in nihilum abeunt, criteria ſuppeditabunt, ex quibus de integrabilitate huiusmodi formulae

formulae iudicium inſtitui debet. Vt vero euidentius pateat, quaenam aequationes ex euolutione valorum ipſarum ν, π, π', π'', $\varkappa$, $\varkappa'$ etc. oriantur; ſequentes aequalitates annotaſſe vtile erit:

I. $\left(\frac{d^3\nu}{dx\,dy\,dz}\right)=\mathrm{N};$

II. $\left(\frac{d^4\pi}{dx^2dy\,dz}\right)=\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)-\mathrm{N};$

III. $\left(\frac{d^4\pi'}{dx\,dy^2dz}\right)=\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dy}\right)-\mathrm{N};$

IV. $\left(\frac{d^4\pi''}{dx\,dy\,dz^2}\right)=\left(\frac{d\mathrm{P}''}{dz}\right)-\mathrm{N};$

V. $\left(\frac{d^5\varkappa}{dx^3dy\,dz}\right)=\left(\frac{dd\mathrm{Q}}{dx^2}\right)-\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)+\mathrm{N}$

VI. $\left(\frac{d^5\varkappa'}{dx^2dy^2dz}\right)=\left(\frac{dd\mathrm{Q}'}{dx\,dy}\right)-\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)+\mathrm{N};$
$-\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dy}\right)$

VII. $\left(\frac{d^5\varkappa''}{dx^2dy\,dz^2}\right)=\left(\frac{dd\mathrm{Q}''}{dx\,dz}\right)-\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)+\mathrm{N}$
$-\left(\frac{d\mathrm{P}''}{dz}\right)$

VIII. $\left(\frac{d^5\varkappa'''}{dx\,dy^3dz}\right)=\left(\frac{dd\mathrm{Q}'''}{dy^2}\right)-\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dy}\right)+\mathrm{N}$

$$\text{IX. } \left(\frac{d^5 \varkappa^{IV}}{dx\, dy^2\, dz^2}\right) = \left(\frac{dd\,Q^{IV}}{dy\, dz}\right) - \left(\frac{dP'}{dy}\right) + N - \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{X. } \left(\frac{d^5 \varkappa^{V}}{dx\, dy\, dz^3}\right) = \left(\frac{dd\,Q^{V}}{dz^2}\right) - \left(\frac{dP''}{dz}\right) + N$$

$$\text{XI. } \left(\frac{d^6 \varrho}{dx^4\, dy\, dz}\right) = \left(\frac{d^3 R}{dx^3}\right) - \left(\frac{dd\,Q}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N$$

$$\text{XII. } \left(\frac{d^6 \varrho'}{dx^3\, dy^2\, dz}\right) = \left(\frac{d^3 R'}{dx^2\, dy}\right) - \left(\frac{dd\,Q}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N - \left(\frac{dd\,Q'}{dx\, dy}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

$$\text{XIII. } \left(\frac{d^6 \varrho''}{dx^3\, dy\, dz^2}\right) = \left(\frac{d^3 R''}{dx^2\, dz}\right) - \left(\frac{dd\,Q}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N - \left(\frac{dd\,Q''}{dx\, dz}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XIV. } \left(\frac{d^6 \varrho'''}{dx^2\, dy^3\, dz}\right) = \left(\frac{d^3 R'''}{dx\, dy^2}\right) - \left(\frac{dd\,Q'}{dx\, dy}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N - \left(\frac{dd\,Q'''}{dy^2}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

$$\text{XV. } \left(\frac{d^6 \varrho^{IV}}{dx^2\, dy^2\, dz^2}\right) = \left(\frac{d^3 R^{IV}}{dx\, dy\, dz}\right) - \left(\frac{dd\,Q'}{dx\, dy}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N - \left(\frac{dd\,Q''}{dx\, dz}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) - \left(\frac{dd\,Q^{IV}}{dy\, dz}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XVI.}\ \left(\frac{d^6\varrho^{V}}{dx^2\,dy\,dz^3}\right)=\left(\frac{d^3R^{V}}{dx\,dz^2}\right)-\left(\frac{ddQ''}{dx\,dz}\right)+\left(\frac{dP}{dx}\right)-N$$
$$-\left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right)+\left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XVII.}\ \left(\frac{d^6\varrho^{VI}}{dx\,dy^4\,dz}\right)=\left(\frac{d^3R^{VI}}{dy^3}\right)-\left(\frac{ddQ'''}{dy^2}\right)+\left(\frac{dP'}{dy}\right)-N$$

$$\text{XVIII.}\ \left(\frac{d^6\varrho^{VII}}{dx\,dy^3\,dz^2}\right)=\left(\frac{d^3R^{VII}}{dy^2\,dz}\right)-\left(\frac{ddQ'''}{dy^2}\right)+\left(\frac{dP'}{dy}\right)-N$$
$$-\left(\frac{ddQ^{IV}}{dy\,dz}\right)+\left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XIX.}\ \left(\frac{d^6\varrho^{VIII}}{dx\,dy^2\,dz^3}\right)=\left(\frac{d^3R^{VIII}}{dy\,dz^2}\right)-\left(\frac{ddQ^{IV}}{dy\,dz}\right)+\left(\frac{dP'}{dy}\right)-N$$
$$-\left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right)+\left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XX.}\ \left(\frac{d^6\varrho^{IX}}{dx\,dy\,dz^4}\right)=\left(\frac{d^3R^{IX}}{dz^3}\right)-\left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right)+\left(\frac{dP''}{dz}\right)-N.$$

etc. etc.

44. Si igitur formula $V\,dx\,dy\,dz$ ita ſit comparata, vt eius integrale triplicatum Z non inuoluat, niſi quantitates finitas x, y, z et v ſeu ſi fuerit:

$$dZ = \iota\,dx + \lambda\,dy + \mu\,dz + \nu\,dv$$

criteria integrabilitatis formulis § antecedentis a II ad XX nihilo aequatis continebuntur, nam pro hoc caſu liquet omnes π, $\varkappa$ et ϱ euaneſcere. Vt vero haec

haec criteria ſimul obtutui repraeſentari queant, ſequentes transformationes omnino dignae ſunt, quae ſedulo notentur. Aequationes a IIda ad IVtam in vnam colligantur ſummam vt prodeat

$$3\,N - 2\left(\frac{dP}{dx}\right) = 0$$
$$- 2\left(\frac{dP'}{dy}\right)$$
$$- 2\left(\frac{dP''}{dz}\right).$$

Deinde ſex inſequentes formulae a valoribus $\varkappa$ ortae, hanc praebebunt ſummam

$$6\,N - 3\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) = 0$$
$$- 3\left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right)$$
$$- 3\left(\frac{dP''}{dz}\right) \quad \vdots$$
$$+ \left(\frac{ddQ''''''}{dz^2}\right).$$

Denique decem vltimae ex valoribus ϱ ortae hanc:

$$10\,N - 6\left\{\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)\right\} + 3\left\{\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) + \ldots + \left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right)\right\}$$
$$- \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) \ldots - \left(\frac{d^3R^{IX}}{dz^3}\right) = 0.$$

Additis ambabus vltimis et media bis ſumta ex ſumma earum ſubtracta obtinebimus:

N —

$$\begin{array}{l} N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) = 0 \\ \quad - \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) \\ \quad - \left(\frac{dP''}{dz}\right) + \left(\frac{ddQ''}{dxdz}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dx^2dz}\right) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad + \left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right) \quad \vdots \\ \qquad\qquad - \left(\frac{d^3R^{IX}}{dz^3}\right). \end{array}$$

Pro qua aequatione obſeruetur omnia membra in iisdem lineis horizontalibus diſpoſita euaneſcere, deinde ſi ſcribendi ratio inuertatur adeo vt omnia membra pro ratione ipſius z ordinentur, hoc eſt ſi habeatur:

$$\begin{array}{l} N - \left(\frac{dP''}{dz}\right) + \left(\frac{ddQ^{V}}{dz}\right) - \left(\frac{d^3R^{IX}}{dz^3}\right) = 0 \\ \quad - \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ^{IV}}{dydz}\right) - \left(\frac{d^3R^{VIII}}{dydz^2}\right) \\ \quad - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ''}{dxdz}\right) - \left(\frac{d^3R^{V}}{dxdz^2}\right) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dx^2dz}\right) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) \end{array}$$

adhuc

adhuc omnia membra in iisdem lineis horizontalibus collocata nihilo aequabuntur, vnde iam habemus 19 aequationes particulares pro criteriis formulae noſtrae differentialis: $V\,dx\,dy\,dz$.

45. Vt vero ſtatim ex ſola conſideratione differentialis dV pateat, quaenam litterarum π, π' etc. $\varkappa, \varkappa'$ euaneſcere debeant, obſeruaſſe iuuabit, quaenam quantitates per triplicem differentiationem ex ſingulis v, p, p' etc. prodeant, quas ſequenti tabella repraeſentamus:

Quantitas formulam Z ingrediens	Quantitates per differentiationem ortae Per I^{mam}	II^{dam}	III^{iam}
v	$p;\ p';\ p''$	$q';\ q'';\ q^{IV}$	r^{IV}
p	$q;\ q';\ q''$	$r';\ r'';\ r^{IV}$	s^{IV}
p'	$q';\ q''';\ q^{IV}$	$r''';\ r^{IV};\ r^{VII}$	s^{VII}
p''	$q'';\ q^{IV};\ q^{V}$	$r^{IV};\ r^{V};\ r^{VIII}$	s^{VIII}
q	etc.	etc.	t^{IV}
q'			t^{VII}
q''			t^{VIII}
q'''			t^{XI}
q^{IV}			t^{XII}
q^{V}			t^{XIII}

Pro exemplo igitur a nobis allegato, quo

$$dZ = \iota dx + \lambda dy + \mu dz + \nu dv$$

omnes litterae quae ex p, p' etc. poſt triplicem differentiationem deriuantur, euaneſcent ideoque forma differentialis dV ita ſe habebit:

dV

$$dV = I\,dx + N\,dv + P\,dp + Q^{I}\,dq^{I} + R^{IV}\,dr^{IV}$$
$$+ L\,dy \qquad + P^{I}\,dp^{I} + Q^{II}\,dq^{II}$$
$$+ M\,dz \qquad + P^{II}\,dp^{II} + Q^{IV}\,dq^{IV}$$

adeoque ſi in differentiali dV praeter hos terminos adhuc reperiretur ex. gr. $R^{V}dr^{V}$, certo ſtatuere licet formulam $V\,dx\,dy\,dz$ nequaquam fore integrabilem.

46. Si propoſita fuerit formula differentialis triplicata $V\,dx\,dy\,dz$ in qua V praeter tres variabiles x, y et z, quarum differentialia ſupponuntur conſtantia, adhuc binas alias v et u, quae vt functiones praecedentium tractari poterunt, inuoluat; criteria integrabilitatis pro eiusmodi formula ſequenti modo inueſtiganda erunt. Primum in functione V ſtatuatur u conſtans et quaerantur conditiones ſub quibus formula $V\,dx\,dy\,dz$ hac facta ſuppoſitione fiat integrabilis, deinde ſtatuatur v conſtans et disquiratur quinam ea conſtituta hypotheſi ſint characteres integrabilitatis formulae $V\,dx\,dy\,dz$, haec criteria collectim ſumta, characterem integrabilitatis formulae propoſitae abſoluent. Similis praeſcribenda erit regula, ſi quantitas V adhuc plures variabiles v, u, w etc. cum earum differentialibus quibuscunque inuolueret, nam disquirendum eſt, an formula $V\,dx\,dy\,dz$ omni caſu integrationem admittat, quo vnica harum v, u, w etc. pro variabili habetur, reliquis pro conſtantibus ſpectatis.

48. Denique etiam perſpicuum eſt, quomodo Methodus iam praeſcripta adplicari debeat, ad inuenienda criteria integrabilitatis pro formulis differentialibus quadruplicatis, vel adhuc complicatioribus, et praeter calculi moleſtias atque prolixitatem, nihil amplius hoc in negotio ſupereſſe videtur, quod aliquam difficultatem obiicere poſſet.

DE CVRVA RECTIFICABILI IN SVPERFICIE SPHAERICA.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Occaſione magni illius problematis Florentini, quo praeterito iam ſeculo poſtulabantur in ſuperficie ſphaerica portiones quadrabiles, iam tum problema fuit agitatum, vt in ſuperficie ſphaerica lineae ducerentur rectificabiles. Quamuis autem Geometrae plurimum ſtudii ad hoc problema ſoluendum contulerint; tamen plus vna huiusmodi linea inuenire non potuerunt. Quae circumſtantia nunc imprimis maxime videtur memorabilis, quandoquidem haec quaeſtio ad analyſin infinitorum indeterminatam eſt referenda, vbi plerumque infinita ſolutionum multitudo locum habere ſolet; quamobrem haec vnica ſolutio quam quidem adhuc elicere licuit maxime digna videtur, vt eius indolem accuratius inueſtigemus; vtrum fortaſſe inde plures ſolutiones deduci queant, an vero ratio quaepiam perſpiciatur ob quam eam ſolutionem vnice locum habere intelligere poſſimus? In hoc quidem Analyſeos genere quod etiamnunc parum eſt excultum, plurima obſeruan-

tur phaenomena, quae nullo modo ad certas rationes reuocare licet, cuiusmodi ſunt haec duo Theoremata, iam pridem a me obſeruata, quae tamen neutiquam omni rigore demonſtrare valeo, alterum: *praeter circulum nulla datur linea algebraica cuius portioni cuicunque, arcus circuli aequalis aſſignari poſſet*, alterum: *nulla plane datur curua algebraica cuius arcus quicunque per logarithmum exprimi poſſit.* Hic ſcilicet non de eiusmodi curuis loquor quarum rectificatio vel ab arcubus circularibus vel a logarithmis pendet, cuiusmodi ſine dubio infinita datur multitudo, ſed de talibus quarum arcus quicunque praeciſe aequalis ſit vel arcui cuidam circulari vel cuipiam logarithmo, nulla ſcilicet vel addita vel ſubtracta quantitate geometrica.

Tab. I. Fig. 1. II. Lineae igitur in ſuperficie ſphaerica quaeſitae, ſit punctum quodcunque Z, determinandum ternis coordinatis $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ vbi ſi punctum C in centro ſphaerae capiatur, radiusque ponatur $= 1$, habebitur haec aequatio:

$$xx + yy + zz = 1,$$

deinde quia elementum huius lineae Zz hac formula exprimitur:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

neceſſe eſt vt eius integrale euadat quantitas algebraica.

III. Quum ex priore aequatione ſit:

$$z = \sqrt{(1 - xx - yy)} \text{ erit } dz = -\frac{xdx - ydy}{\sqrt{(1 - xx - yy)}}$$

ex

ex quo elementum curuae colligitur

$$Zz = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{1-xx-yy}\right)} = \sqrt{\frac{(dx^2(1-yy) + 2xydxdy + dy^2(1-xx))}{1-xx-yy}}$$

ſiue etiam

$$Zz = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 - (ydx - xdy)^2}{1-xx-yy}},$$

tota igitur quaeſtio iam huc redit, cuiusmodi relatio inter binas variabiles x et y intercedere, vel qualis functio altera alterius eſſe debeat; vt haec formula fiat integrabilis?

IV. Ante omnia hanc expreſſionem ad ſimpliciorem formam reduci oportet; quem in finem ſtatuamus:

$$y = u\sqrt{(1-xx)}$$

vt ſit

$$1 - xx - yy = (1-xx)(1-uu),$$

tum ob

$$dy = \frac{du(1-xx) - xudx}{\sqrt{(1-xx)}} = du\sqrt{(1-xx)} - \frac{uxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

erit

$$ydx - xdy = \frac{udx}{\sqrt{(1-xx)}} - xdu\sqrt{(1-xx)}$$

vnde numerator noſter fiet:

$$dx^2(1-uu) + du^2(1-xx)^2$$

ex quo formula noſtra pro elemento Zz colligitur

$$\sqrt{\frac{(dx^2(1-uu) + du^2(1-xx)^2}{\sqrt{(1-xx)(1-uu)}}} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{1-xx} + \frac{du^2(1-xx)}{1-uu}\right.}$$

vbi quaeſtio iterum in inuentione relationis inter x et u verſatur, vt huius formulae integrale exhiberi poſſit.

V. Si velimus angulos introducere haec formula adhuc concinnior reddi poteſt, ponendo enim $x = \text{coſ.}\,\theta$ et $u = \text{ſin.}\,\Phi$, vt fiat $y = \text{ſin.}\,\Phi.\,\text{ſin.}\,\theta$ et $z = \text{coſ.}\,\Phi.\,\text{ſin.}\,\theta$, formula noſtra integranda prodit $\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\theta^2)}$. Hic autem iam probe obſeruari oportet, litteras θ et Φ denotare angulos ideoque ipſas algebraicas non eſſe, ſed per arcus circulares exprimi debere, quorum autem ſinus vel coſinus algebraice exprimantur deinde vero quia formula $\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\theta^2)}$ integrabilis eſſe debet, neceſſe eſt vt eius integrale non arcui circulari ſed ſinui, coſinuiue, ſiue formae ex ſinibus et coſinibus vtcunque complexae aequetur.

VI. Quoniam nulla adhuc certa conſtat Methodus huiusmodi formulas tractandi alia via non relinquitur, niſi vt rem tentando et quaſi diuinando adgrediamur. Fingamus ergo primo integrale quaeſitum eſſe $= \alpha\,\text{ſin.}\,\theta$, eritque

$$\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\theta^2)} = \alpha\, d\theta\,\text{coſ.}\,\theta \text{ vnde fit}$$

$$d\Phi = \frac{d\theta\sqrt{(\alpha^2\,\text{coſ.}\,\theta^2 - 1)}}{\text{ſin.}\,\theta};$$

quare huius formulae integrale arcum circularem exprimere debet, quum igitur ſit

$$\sqrt{(\alpha\alpha\,\text{coſ.}\,\theta^2 - 1)} = \sqrt{((\alpha\alpha - 1) - \alpha\alpha\,\text{ſin.}\,\theta^2)}$$

habebimus

$$d\Phi = \frac{d\theta}{\text{ſin.}\,\theta}\sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha\,\text{ſin.}\,\theta^2)},$$

ſiue in membra partiendo

$$d\Phi = \frac{d\theta(\alpha\alpha - 1)}{\text{ſin.}\,\theta\sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha\,\text{ſin.}\,\theta^2)}} - \frac{\alpha\alpha\, d\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha\,\text{ſin.}\,\theta^2)}}$$

quo

quo facilius pateat indoles poſterioris membri, ponamus coſ. $\theta = v$, ac ob $-d\theta$ ſin. $\theta = dv$ poſterius membrum fiet $\frac{\alpha\alpha dv}{\sqrt{(\alpha\alpha vv - 1)}}$ cuius autem integrale non per arcum circulorem ſed per logarithmum exhibetur, quocirca hoc primum tentamen non ſuccedit.

VII. Tentemus ergo hanc poſitionem

$\int \sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 \text{ſin.}\,\theta^2)} = \alpha \text{ coſ.}\,\theta$ ſiue differentiando

$-\alpha d\theta \text{ ſin.}\,\theta = \sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 \text{ſin.}\,\theta^2)}$, vnde colligimus

$d\Phi = \frac{d\theta\sqrt{(\alpha\alpha\,\text{ſin.}\,\theta^2 - 1)}}{\text{ſin.}\,\theta}$, quae ſimili modo in duo membra diſtributa praebet

$$d\Phi + \frac{\alpha\alpha d\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{\sqrt{(\alpha\alpha\,\text{ſin.}\,\theta^2 - 1)}} = \frac{-d\theta}{\text{ſin.}\,\theta\sqrt{(\alpha\alpha\,\text{ſin.}\,\theta^2 - 1)}},$$

vbi prius membrum poſito coſ. $\theta = v$, ob $d\theta$ ſin. $\theta = dv$ induit hanc formam $\frac{-\alpha\alpha dv}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1) - \alpha\alpha vv}}$ cuius integrale manifeſto eſt α Ang. coſ. $\frac{\alpha v}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1)}}$, cuius ſinum coſinumue dare licet, quoties α eſt numerus rationalis. Nunc igitur ſupereſt, vt etiam alterum membrum $\frac{-d\theta}{\text{ſin.}\,\theta\sqrt{(\alpha\alpha\,\text{ſin.}\,\theta^2 - 1)}}$ per integrationem ad arcum circularem perducatur, facile autem intelligitur formam huius integralis fore: β Ang. cuius ſin. $\frac{\gamma\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\theta}$ quae formula differentiata praebet $\frac{-\beta\gamma d\theta}{\text{ſin.}\,\theta\sqrt{(\text{ſin.}\,\theta^2 - \gamma\gamma\,\text{coſ.}\,\theta^2)}}$, quae vt aequalis fiat noſtro ſecundo membro capi debet $\beta = 1$ et $\frac{1+\gamma\gamma}{\gamma\gamma} = \alpha\alpha$, ſiue $\gamma = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1)}}$ ſicque integrale poſterioris membri erit Ang. cuius ſin. $(\frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\theta\sqrt{(\alpha\alpha - 1)}})$, quo circa noſtrum integrale totum ſeu valor anguli Φ ita exprimitur, vt ſit

$$\Phi = \alpha \text{ Ang. cuius coſ.} \left(\frac{\alpha\,\text{coſ.}\,\theta}{\sqrt{\alpha\alpha - 1}}\right) + \text{Ang. cuius ſin.}\ \frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\theta\sqrt{(\alpha\alpha - 1)}}.$$

VIII. Hanc formulam commodiorem reddemus conſtantem α ita immutando, vt ſit $\alpha = \text{ſec.}\,\varepsilon = \frac{1}{\text{coſ.}\,\varepsilon}$, tum enim adipiſcemur:

$$\Phi = \frac{1}{\text{coſ.}\,\varepsilon}.\ \text{Ang. cui. coſ.}\left(\frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\varepsilon}\right) + \text{Ang. cui. ſin.}\left(\frac{\text{coſ.}\,\theta\ \text{coſ.}\,\varepsilon}{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\varepsilon}\right) + C,$$

ſiue loco ε ſcribendo $90° - \varepsilon$

$$\Phi = \frac{1}{\text{ſin.}\,\varepsilon}.\ \text{Ang. cui. coſ.}\left(\frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{coſ.}\,\varepsilon}\right) + \text{Ang. cui. ſin.}\left(\frac{\text{Tang.}\,\varepsilon}{\text{Tang.}\,\theta}\right) + C.$$

Hic autem probe notandum eſt, niſi ſin. ε fuerit fractio rationalis, hanc ſolutionem pro congrua haberi non poſſe propterea quod geometrice angulum aſſignare non licet, qui foret ad Ang. cuius coſ. $\left(\frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{coſ.}\,\varepsilon}\right)$ in ratione $1 : \text{ſin.}\,\varepsilon$. Hinc ergo videri poſſet pro angulo ε alios angulos praeter $90°$ et $30°$ aſſumi non poſſe, ſed quia ipſe angulus ε hic non in computum venit, pro lubitu loco ſin. ε fractionem quamcunque rationalem vnitate minorem aſſumere licet, vbi quidem caſus excludi debere euidens eſt quibus foret vel ſin. $\varepsilon = 0$ vel ſin. $\varepsilon = 1$. At vero vt ambo anguli fiant reales, neceſſe eſt vt Ang. θ ſemper ſit maior quam ε, vel ſaltem nusquam minor euadat.

IX. Vt huius integrationis exemplum ſpeciale euoluamus, ponamus ſin. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, vt fiat coſ. $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tum erit pars prior $= 2$ Arc. cuius coſ. $\frac{2\,\text{coſ.}\,\theta}{\sqrt{3}}$ $=$ Arc. cuius ſin. $\frac{4\,\text{coſ.}\,\theta\,\sqrt{(4\,\text{ſin.}\,\theta^2 - 1)}}{3}$ et pars poſterior $=$ Arc. cuius ſin. $\frac{1}{\text{Tang.}\,\theta.\,\sqrt{3}} =$ Arc. cuius ſin. $\frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\theta.\,\sqrt{3}}$ quibus ambobus angulis coniunctis colligemus

$\Phi =$

$\Phi =$ Arcus cuius ſin. $\left(\frac{9\, coſ.\, \theta - 8\, coſ.\, \theta^3}{3.\, ſin.\, \theta.\, \surd 3}\right)$ ita vt ſit

$$ſin.\, \Phi = \frac{coſ.\, \theta(9 - 8\, coſ.\, \theta^2)}{3\, ſin.\, \theta \surd 3} \text{ ſiue}$$

$$coſ.\, \Phi = \frac{(4\, ſin.\, \theta^2 - 1) \surd (4\, ſin.\, \theta^2 - 1)}{3\, ſin.\, \theta\, \surd 3}$$

quare angulo hoc Φ ita definito, habebimus hanc integrationem:

$$\int \surd (d\theta^2 + d\Phi^2.\, ſin.\, \theta^2) = 2\, coſ.\, \theta \text{, vnde fit}$$

$$d\Phi = \frac{-d\theta \surd (4\, ſin.\, \theta^2 - 1)}{ſin.\, \theta}$$

cuius ergo integrale viſſim eſt, ille ipſe angulus Φ, quem modo deſcripſimus. Quaeſtio ergo eſt quomodo per certam quandam Methodum directam ad hanc ſolutionem peruenire licuiſſet.

X. Non parum autem hoc argumentum dilucidatum iri videtur, ſi ſolutionem ex principiis Trigonometriae Sphaericae repetere conemur, quandoquidem plures inſignes proprietates inde cognoſcere poterimus. Sit igitur in ſuperficie ſphaerae cuius radium ponimus $= 1$, curua B M m linea illa rectificabilis quam quaerimus, ac ſumto quodam puncto fixo A tamquam Polo ductisque meridianis A M et A m vocemus angulum B A M $= \Phi$ et arcum A M $= \theta$, erit angulus elementaris M A $m = d\Phi$ et ducta ad A m normaliter lineola M n erit M $n = d\Phi.\, ſin.\, \theta$ et $m\, n = d\, \theta$, vnde elementum curuae colligitur, vt ſupra iam habuimus M m $= \surd (d\theta^2 + d\Phi^2.\, ſin.\, \theta^2)$ quod ergo integrabile eſſe oportet. Tab. I. Fig. 2.

XI. Quoniam autem hoc certa Methodo praeſtare non licet, inueſtigemus nonnullas proprietates quas nobis natura ſphaerae ſuppeditabit. Contemplemur igitur imprimis arcus circulorum maximorum qui in ſingulis curuae noſtrae punctis ſint normales cuiusmodi ſunt arcus M O et m O, atque ſtatim liquet fore angulum A M O $=$ n M m, vnde ſi ponamus angulum A M O $= \psi$, habebimus

$$\text{ſin.}\,\psi = \frac{d\theta}{\surd(d\theta^2 + d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\theta^2)};\ \text{coſ.}\,\psi = \frac{d\Phi.\,\text{ſin.}\,\theta}{\surd(d\theta^2 + d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\theta^2)}$$

ideoque $\text{Tang.}\,\psi = \frac{d\theta}{d\Phi.\,\text{ſin}\,\theta}$.

XII. Quodſi ergo ex A in arcum M O demittamus perpendiculum A P, ex triangulo rectangulo A P M reperiemus:

$$\text{ſin. A P} = \text{ſin.}\,\theta.\,\text{ſin.}\,\psi = \frac{d\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{\surd(d\theta^2 + d\Phi^2.\,\text{ſin.}\,\theta^2)} \text{ tum vero}$$

$$\text{Tang. M P} = \text{Tang.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\psi = \frac{d\Phi.\,\text{ſin.}\,\theta^2}{\text{coſ.}\,\theta\,\surd(d\theta^2 + d\Phi^2.\,\text{ſin.}\,\theta^2)},$$

ac praeterea

$$\text{Tang. M A P. Tang.}\,\psi = \frac{1}{\text{coſ.}\,\theta},\ \text{ſeu Tang. M A P} = \frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\theta}{d\theta.\,\text{coſ.}\,\theta}.$$

XIII. Concurrant hi bini arcus in noſtram curuam normales in puncto O eritque hoc punctum O, polus circuli minoris curuam noſtram per elementum Mm oſculantis, ita vt ſin. O M recte pro radio oſculi noſtrae curuae haberi poſſit. Quo nunc iſtud punctum O inueſtigemus ducamus arcum A O et conſideremus bina triangula ſphaerica A M O et AmO, quae non ſolum latus A O habebunt commune ſed etiam in vtroque latera M O et m O ſunt aequalia,

qualia, quare ſi ponamus arcum $MO = mO = r$, quoniam in triangulo AMO ex lateribus $AM = \theta$ et $MO = r$ cum angulo intercepto $AMO = \psi$ colligitur:

$$\text{coſ.}\, AO = \text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,r + \text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,r\,\text{coſ.}\,\psi$$

manifeſtum eſt ſi arcus θ ſuo differentiali $d\theta$ et angulus ψ ſuo differentiali $d\psi$ augeatur, valorem huius formulae eundem manere debere, hoc eſt eius differentiale, ſumtis tantum θ et ψ variabilibus nihilo aequari debere. Hoc autem facto nanciſcimur

$$-d\theta.\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,r + d.(\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\psi)\,\text{ſin.}\,r = 0 \text{ vnde fit}$$

$$\text{Tang.}\, r = \frac{d\,\theta.\,\text{ſin.}\,\theta}{d.(\text{coſ.}\,\psi\,\text{ſin.}\,\theta)},$$

quae eſt expreſſio generalis pro radiis oſculi curuarum in ſuperficie ſphaerica deſcriptarum.

XIV. Quodſi inſuper ipſum arcum curuae vocemus $BM = s$, vt ſit eius elementum $Mm = ds$ angulum $mMn = \psi$ habebimus $d\theta = ds\,\text{ſin.}\,\psi$ et $d\Phi\,\text{ſin.}\,\theta = ds\,\text{coſ.}\,\psi$, vnde ſi relatio inter s et ψ eſſet data; inde binas quantitates Φ et θ deducere liceret, foret enim $\theta = \int ds.\,\text{ſin.}\,\psi$ hincque porro $\Phi = \int \frac{ds\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\theta}$, quae integralia in ſe indeterminata ſatis declarant punctum A ab arbitrio noſtro pendere.

XV. Sin autem relatio detur inter arcum curuae s et radium oſculi r multo difficilius erit inde reliqua elementa ſcilicet ψ, θ et Φ determinare. Excluſo quidem angulo Φ habemus has duas aequationes:

$d\theta = ds$ ſin. ψ et Tang. $r = \frac{ds . ſin. \psi\, ſin. \theta}{d. (coſ. \psi\, ſin. \theta)}$

ex quibus ambas quantitates θ et ψ inueſtigari oportet; verum etiamnunc nulla patet via ad hunc ſcopum perueniendi, quum tamen in plano ex data relatione inter arcum curuae et radium oſculi conſtructio curuae facile perficiatur.

XVI. Poſtquam igitur oſtendimus quemadmodum ex curua B M tamquam data ſpectata eius radium oſculi MO definiri oporteat, hinc vniuerſam Theoriam euolutionis in ſuperficie Sphaerica deriuare poterimus, namque punctum illud O ſitum erit in curua quapiam CO, quam merito euolutam curuae B M appellare licet. Si enim curuae C O filum concipiatur applicatum, idque extendatur in ſuperficie Sphaerica arcum circuli maximi repraeſentabit, qui euolutam in ipſo puncto O tangat, omnino vti in plano vſu venit, ita vt noſtra curua BM ex euolutione curuae CO reipſa deſcribi poſſit, vnde perinde atque in plano notandum eſt, fore radium oſculi ſeu arcum M O, arcui euolutae C O aequalem, vel quantitate conſtante ſuperantem, quae quantitas conſtans quoniam ab arbitrio noſtro pendet, euidens eſt ex eiusdem curuae C O euolutione innumerabiles curuas B M produci poſſe.

Tab. I. Fig. 3. XVII. His expoſitis ordine retrogrado conſideremus primum ipſam curuam euolutam C O *o* pro qua vocemus arcum CO $= s$ vt ſit elementum O*o* $= ds$, ac ne opus habeamus punctum quodpiam arbi-

arbitrarium veluti A in computum inducere, natura huius curuae definiatur eius radio oſculi $OR = r$, quaecunque enim haec ſit curua, quoniam vt data ſpectatur, relatio datur inter s et r, iam ope fili quod initio toti curuae applicatum concipiatur, fiat euolutio, quae nunc quidem pertigerit vsque in O vbi filum extenſum erit, ſecundum arcum circuli maximi O M, cuius longitudo erit $= OC = s$, qui arcus tanget curuam C O in puncto O et nunc punctum M reperietur in curua BM per hanc euolutionem deſcripta, ad quam etiam ex puncto proximo o ducatur arcus om, qui perinde ac ille OM in hanc curuam erit normalis. Tum vero quum ſit $OM = s$ erit $om = s + ds$, quo poſito in indolem huius curuae deſcriptae B M inquiramus.

XVIII. Quoniam arcus circuli maximi MO normalis eſt ad OR eiusque continuatio pro ipſo elemento Oo haberi poteſt is cum radio proximo Ro angulum faciet MoR cuius

$$\text{Tang.} = \frac{\text{Tang. } R\,O}{\text{ſin. } O\,o} = \frac{\text{Tang. } R}{d\,s},$$

quum autem radius proximus mo ſit ad Ro normalis erit ang. Mom complementum illius anguli OoR ideoque Tang. M$om = \frac{ds}{\text{Tang. } r}$, ſiue ipſe hic angulus $= \frac{ds}{\text{Tang. } r}$, vbi notaſſe iuuabit eſſe angulum OR$o = \frac{ds}{\text{ſin. } r}$, vnde patet angulos M$om$ et ORo non eſſe inter ſe aequales vti euenit in plano, ſed illum Mom ſe habere ad hunc ORo :: ſin. r : Tang. r hoc eſt in ratione minoris inaequalitatis, atque adeo ſi radius O R fiat quadrans circuli angulus M$om = 0$

ſeu ambo radii M O, $m\,o$ coincident, ſcilicet ipſa curua circa elementum O o erit circulus maximus, qui ipſe ſibi eſt tangens in ſingulis punctis.

XIX. Nunc facile erit curuae per euolutionem deſcriptae elementum M m exprimere, quum enim hoc elementum per ſinum arcus M O diuiſum, praebeat angulum M $o\,m$, ob O M $= s$ habebimus elementum M $m = \frac{d\,s\,\text{ſin.}\,s}{\text{Tang.}\,r}$. Quocirca ſi nunc problema noſtrum circa rectificationem curuae B M adgrediamur, relatio inter binas variabiles r et s talis eſſe debet, vt formula $\frac{d\,s\,\text{ſin.}\,s}{\text{Tang.}\,r}$ fiat abſolute integrabilis. Praeterea vero quia haec curua ſimul eſſe debet algebraica vel geometrice conſtruibilis, primo requiritur vt ipſa curua C O ſit geometrica deinde vero quia arcus M O $=$ C O, curua C O, ita debet eſſe comparata vt cuilibet eius arcui C O, arcum circuli aequalem geometrice aſſignare liceat.

XX. Hic omnino notatu dignum eſt, quod pro elemento M m, tam ſimplicem formulam elicuerimus, de qua facillime iudicare licet, quibus caſibus ea integrabilis euadat, atque adeo ſtatim in oculos incurrit ſi radius oſculi O R fuerit conſtans, puta $r = c$, tum curuam B M abſolute fore integrabilem, erit enim arcus

$$\text{B M} = \frac{\int d\,s\,\text{ſin.}\,s}{\text{Tang.}\,c} = -\frac{\text{coſ.}\,s}{\text{Tang.}\,c} + \text{C},$$

vbi ſi conſtantem ita definiamus, vt deſcriptio in ipſo puncto C incoeperit vbi $s = 0$, ita vt punctum B in C incidat, tum erit arcus

B M

$$B\,M = \frac{1 - \text{coſ.}\, s}{\text{Tang.}\, c} = \frac{2\, \text{ſin.}\, \frac{s}{2}^2}{\text{Tang.}\, c}.$$

Hinc igitur patet dum initio quo $s = 0$, fit arcus B M $= 0$, ſumto arcu C O quadranti circuli maximi aequali, ita vt O M fiat quadrans, tum fore arcum B M $= \frac{1}{\text{Tang.}\, c}$, ac ſi arcus C O eo vsque augeatur, vt ſemiperipheriae circuli maximi aequalis fiat, quo caſu arcus O M abit in ſemicirculum, tum fore arcum B M $= \frac{2}{\text{Tang.}\, c}$, vbi vnitas definitur per ipſum radium Sphaerae.

XXI. En ergo ſimplicem profecto ſolutionem problematis propoſiti, quae quidem vt examinanti facile patebit prorſus conuenit cum ea, quam ante per plures ambages ſumus adepti; ſed hic eius inſignes proprietates multo clarius elucent, quam antea ex intricatis illis formulis cognoſcere licuiſſet. Quia enim ſumſimus $r = c$ ſtatim apparet euolutam curuae noſtrae B M eſſe circulum minorem, cuius radius ſit $=$ ſin. c; praeterea vero vt cuilibet huius circuli minoris arcui, C O $= s$ arcus circuli maximi aequalis M O $= s$, geometrice ſumi poſſit, neceſſe eſt, vt radius iſtius circuli minoris ſin. c ad radium Sphaerae rationem teneat rationalem, quae eſt eadem conditio, quam etiam ſupra inuenimus.

XXII. Quoniam infinitos huiusmodi circulos minores in Sphaera deſignare licet, quorum radii ad radium Sphaerae rationem habeant rationalem,

reuera

reuera quidem infinitas ſolutiones exhibuiſſe ſumus cenſendi; verum tamen quia omnes in vna quaſi formula continentur, non immerito haec ſolutio pro vnica haberi ſolet, atque nunc quaeſtio maximi momenti exoritur, vtrum praeter circulos minores non aliae dentur in ſuperficie ſphaerica lineae curuae ex quarum euolutione, etiam curuae geometricae et rectificabiles oriantur.

XXIII. Sed antequam hanc quaeſtionem diligentius examinemus, alias nonnullas inſignes proprietates harum curuarum perpendamus. Ac primo quidem patet ex eodem circulo minore infinitas deſcribi poſſe curuas problemati noſtro ſatisfacientes, quoniam in eius peripheria initium ſeu punctum C pro arbitrio aſſumi poteſt. Omnes vero tales lineae ſi in ſuperficie ſphaerica deſcriptae concipiantur, quaſi inter ſe erunt parallelae, quandoquidem omnes ab eodem circulo maximo, qui in vnam eſt normalis, ſimul normaliter ſecantur, atque omnes portiones talium circulorum maximorum inter binas curuas interceptae erunt inter ſe aequales. Euidens quidem eſt omnes has curuas eſſe aequales et tantum ratione ſitus ſuper ſphaera differre, vnde pulcherrimum exemplum infinitarum curuarum aequalium in ſuperficie ſphaerae ducendarum habemus, quarum traiectione orthogonales ſint circuli maximi.

XXIV. Initio porro curuae B M in puncto C conſtituto, ſi arcus circuli minoris C O aequalis capiatur

capiatur ſemicirculo maximo, quod ſi circulus ille fuerit ſatis exiguus, demum poſt aliquot reuolutiones eueniet, tum quia arcus O M fit ſemicirculus, punctum M e diametro puncto O opponetur, quare ſi circulus iſte minor C O *o* tamquam circulus polaris ſpectetur polo exiſtente in R, atque aequalis circulus polaris huic oppoſitus concipiatur, omnes curuae deſcriptae inter hos duos circulos polares cadent, atque ſi circuli polares fuerint ſatis parui pluribus reuolutionibus circa ſphaeram vagabuntur antequam ad alterum circulum polarem pertingant.

XXV. Hinc adhuc alia generatio curuarum B M ſe manifeſtat, facile enim perſpiciemus easdem lineas curuas B M deſcribi debere, ſi circulus ſphaerae maximus ſuper peripheria circuli minoris volvendo incedat, ſimili modo quo in plano epicycloides deſcribi ſolent. Sit enim C O circulus ille minor, quem in puncto O contingere concipiatur circulus maximus O M F G, qui voluendo per peripheriam circuli minoris continuo vlterius progrediatur initio autem contactus fuerit in puncto C, vbi punctum M circuli maximi erat applicatum, ita vt per motus voluentis naturam arcus O M aequalis ſit arcui C O, vnde ſi circulus maximus in puncto M ſtilo fuerit munitus, hoc ipſo ſtilo, curuam quandam C M deſcripſerit neceſſe eſt, atque quum O M ſit arcus circuli maximi arcui C O aequalis et circulum minorem in puncto O tangens; euidens eſt, per hunc motum voluentem eandem curuam C M deſcribi, quae ante ex ſolutione erat nata, ita Tab. I. Fig. 4.

vt haec curua etiam epicycloidibus ſphaericis ſit annumeranda, quae ſcilicet oriuntur, ſi circulus maximus mobilis per peripheriam circuli minoris fixi voluendo promouetur.

XXVI. Si etiam in ſuperficie ſphaerica, praeter circulos nullae aliae darentur curuae geometricae, quarum cuilibet arcui indefinito arcus circuli aequalis aſſignari poſſet, quod Theorema initio pro figuris planis attulimus, tum demonſtrationem haberemus validam quod praeter curuas iam inuentas nullae aliae problemati noſtro ſatisfaciant. Si quis enim dicat dari aliam quandam curuam B M geometricam, quae eſſet rectificabilis, tum certe eius radium oſculi M O ideoque omnia puncta O geometrice aſſignare liceret, vnde ipſa curua euoluta C O reſultaret geometrica eiusque arcui indefinito C O daretur arcus circuli aequalis O M, per illud ergo Theorema curua C O neceſſario foret circulus, ideoque praeter ſolutionem iam inuentam alia nulla exſpectari poſſet.

XXVII. Verum etiamſi iſtud Theorema pro figuris planis perfecte eſſet demonſtratum, tamen in ſuperficie ſphaerica nullo modo locum inuenire poſſet. Quum enim nullum ſit dubium, quin in ſuperficie ſphaerica innumerabiles lineae curuae geometricae deſcribi queant; dummodo enim Sinus vel Tangentes angulorum ſupra vſurpatorum ϕ et θ algebraicam inter ſe teneant relationem curua inde nata B M vtique pro geometrica eſt cenſenda, hic enim ad conditionem rectificabilitatis non attendamus;

mus; tum autem eius radius oſculi M O ſemper geometrice aſſignari poteſt; hincque etiam euoluta C O erit curua algebraica et quae inſuper certe ita eſt comparata, vt eius arcui C O cuicunque arcus circuli maximi O M aequalis exhiberi poſſit, inde neceſſario ſequitur infinitas dari curuas algebraicas C O, quarum ſingulos arcus per arcus circulares exprimere liceat. Quamobrem etiamnunc maximam dubitandi rationem habemus, vtrum problema noſtrum ſolutione illa, quam iam duplici modo ſumus adepti plane ſit exhauſtum nec ne? Ac ſi forte nullae aliae dentur ſolutiones longe aliam demonſtrationem adferri oportet.

XXVIII. Quodſi formulam generalem ſupra pro elemento M m inuentam $\frac{ds.\,\text{ſin.}\,s}{\text{Tang.}\,r}$ attentius conſideremus, mox deprehendemus, eam praeter caſum $r = c$ infinitis aliis integrabilem fieri poſſe veluti ſi fuerit $r = s$, vel Tang. $r =$ Coſ. s^2, priori enim fiet arcus B M $=$ Sin. $s +$ C, hoc vero B M $=$ C $- \frac{1}{\text{Coſ.}\,s}$, ac ſi eſſet Tang. $r =$ Sin. s Coſ. s^2, foret BM $=$ Tang. s $+$ C verum tum quaeſtio hic reuoluitur vtrum curva C N proditura ſit geometrica nec ne? Vbi imprimis notandum, ſi talis curua geometrica elici poſſet tum etiam alteri conditioni, qua arcus C O per arcum circularem exponi debet fore ſatisfactum, propterea quod data ſupponitur relatio inter quantitates Sin. s et Sin. r vel Tang. r; quum enim r ſit arcus circuli maximi et Sin. s per eius quampiam functionem algebraicam exprimatur etiam in circulo

 maxi-

maximo arcum s aſſignare licebit cuius Sinus ſit illi functioni aequalis, verum hoc modo in maximas difficultates delaberemur quandoquidem ante iam annotauimus nullam adhuc Methodum patere, cuius ope ex data quapiam relatione inter arcum curuae s eiusque radium oſculi in ſuperficie ſphaerica r, ipſa curua definiri poſſet. Si enim ex aequationibus §. XV. datis, vel θ vel ψ eliminemus in aequationem differentialem ſecundi gradus incidimus, quam quomodo tractari oporteat quum non perſpiciatur; multo minus iudicare licebit, vtrum curua inde proditura algebraica ſit nec ne?

XXIX. Hactenus quidem curuae, quam pro noſtro problemate eruimus ea ſymptomata recenſuimus, quae conſiderationes geometricae nobis ſuppeditauerunt, nunc igitur etiam conueniet eius aequationem analyticam accuratius euolui. Sumatur igitur punctum A in ipſo polo circuli minoris COD, ex cuius euolutione initio facto in puncto C, oriatur curua noſtra rectificabilis CM, cuius radius oſculi in puncto M referatur arcu circuli maximi MO circulum minorem in C tangente eiusque arcui CO aequali. Ducantur arcus AO et AM et poſito arcu AC $=$ AO $= c$, ita vt circuli minoris radius ſit $=$ Sin. c quoniam poſuimus arcum CO $= s$ eiusque menſura eſt angulus CAO erit hic angulus CAO $= \frac{s}{\text{Sin. } c}$, nunc quia in triangulo AMO rectangulo dantur catheti AO $= c$ et MO $= s$, ſi vocemus vt ſupra arcum AM $= \theta$, habebimus Coſ. $\theta =$ Coſ. s Coſ. c, deinde ſi porro vocemus angulum CAM $= \Phi$ erit

Tab. I. Fig. 5.

ang.

ang. M A O $= \frac{s}{\text{Sin. } c} - \Phi$, hincque Tang. huius anguli $= \frac{\text{Tang. } s}{\text{Sin. } c}$, ita vt ſit $\Phi = \frac{s}{\text{Sin. } c} -$ ang. cuius Tang. $\frac{\text{Tang. } s}{\text{Sin. } c}$, tum vero prodit ipſe curuae C M arcus $= \frac{1 - \text{Coſ. } s}{\text{Tang. } c}$.

XXX. Reducamus haec ad bina elementa Φ et θ et cum ex priore aequatione ſit Coſ. $s = \frac{\text{Coſ. } \theta}{\text{Coſ. } c}$, vnde ſtatim ſequitur arcus C M $= \frac{\text{Coſ. } c - \text{Coſ. } \theta}{\text{Sin. } c}$ ex quo manifeſtum eſt hanc curuam prorſus eandem eſſe, quam prima methodo elicueramus, tum vero quum ſit Sin. $s = \frac{\sqrt{(\text{Coſ. } c^2 - \text{Coſ. } \theta^2)}}{\text{Coſ. } c}$ et $s =$ Ang. cuius Coſ. $\left(\frac{\text{Coſ. } \theta}{\text{Coſ. } c}\right)$ inde concludimus ang. $\Phi = \frac{1}{\text{Sin. } c}$ Ang. cuius Coſ. $\left(\frac{\text{Coſ. } \theta}{\text{Coſ. } c}\right)$ $-$ Ang. cuius Tang. $\frac{\sqrt{(\text{Coſ. } c^2 - \text{Coſ. } \theta^2)}}{\text{Sin. } c \text{ Coſ. } \theta}$. Quodſi etiam formulas differentiales contemplari velimus, quum ſit $ds. \text{Sin. } s = \frac{d\theta \text{ Sin. } \theta}{\text{Sin. } c}$ hincque

$$ds = \frac{d\theta . \text{Sin. } \theta}{\text{Tang. } c \sqrt{(\text{Coſ. } c^2 - \text{Coſ. } \theta^2)}},$$

deinde quum ſit

$$d\Phi = \frac{ds}{\text{Sin. } c} - \frac{ds. \text{ Sin. } c}{\text{Coſ. } s^2 (\text{Sin. } c^2 + \text{Tang. } s^2)} = \frac{ds}{\text{Sin. } c} - \frac{-ds. \text{ Sin. } c}{\text{Sin. } c^2 \text{ Coſ. } s^2 + \text{Sin. } s^2}$$
$$= \frac{ds(\text{Coſ. } c^2 \text{ Sin. } s^2)}{\text{Sin. } c (\text{Sin. } c^2 \text{ Coſ. } s^2 + \text{Sin. } s^2}$$

erit

$$d\Phi = \frac{ds(\text{Coſ. } c^2 \text{ Sin. } s^2}{\text{Sin. } c (\text{Sin. } c^2 + \text{Coſ. } c^2 \text{ Sin. } s^2)} = \frac{ds \text{ Coſ. } c^2 \text{ Sin. } s^2}{\text{Sin. } c (1 - \text{Coſ. } c^2 \text{ Coſ. } s^2)}.$$

Iam quum ſit

$$ds = \frac{d\theta . \text{ Sin. } \theta}{\text{Tang. } c \sqrt{(\text{Coſ. } c^2 - \text{Coſ. } \theta^2)}}; \text{ Sin. } s^2 = \frac{\text{Coſ. } c^2 - \text{Coſ. } \theta^2}{\text{Coſ. } c^2}$$

et $1 - \text{Coſ. } c^2 \text{ Coſ. } s^2 = \text{Sin. } \theta^2$ habebimus

$$d\Phi = \frac{d\theta \text{ Coſ. } c \sqrt{(\text{Coſ. } c^2 - \text{Coſ. } \theta^2)}}{\text{Sin. } c^2 \text{ Sin. } \theta},$$

quae eſt eadem formula cum ea, quam ſupra pro $d\Phi$ inuenimus.

XXXI. Quum nunc quidem certum ſit, in ſuperficie ſphaerica praeter circulos infinitas dari curuas geometricas, quarum ſingulas portiones indefinite arcubus circularibus metiri liceat: ſequens Problema nihilominus tamquam aeque difficile ac omni attentione dignum ſpectandum videtur.

Problema.

In ſuperficie ſphaerica omnes inuenire curuas geometricas quarum arcui indefinito cuicunque, arcum aequalem circuli exhibere liceat.

Si quis ſolutionem huius problematis methodo directa indagare voluerit maximas ſine dubio difficultates offendet, quas methodis adhuc cognitis vix
Tab. I. Fig. 2. ac ne vix quidem ſuperare licebit. At conſiderationes ante factae nobis ſequentem ſolutionem ſatis concinnam ſuppeditant. Primum in ſuperficie ſphaerica deſcribatur curua quaecunque geometrica B M, quod fit ſi poſito angulo $BAM = \Phi$ et arcu $AM = \theta$, relatio quaecunque detur algebraica inter Sin. Φ et Sin. θ, ita vt Sin. Φ ſpectari poſſit tamquam functio algebraica ipſius Sin. θ, manifeſtum autem eſt quae hic de Sin. Φ et Sin θ dicuntur, aeque valere pro Coſinubus et Tangentibus. Tali ergo relatione inter Sin. Φ et Sin. θ conſtituta quaeratur angulus ψ, vt ſit Tangens $\psi = \frac{d\theta}{d\Phi \, \mathrm{Sin.}\,\theta}$, quem ergo angulum etiam geometrice aſſignare licet, ſicque habebitur ang. $AMO = \psi$, quem arcus M O in curuam normalis

lis cum meridiano A M facit. Porro in hoc arcu circuli maximi M O abſcindatur arcus $MO = r$, ita vt ſit $\text{Tang.}\, r = \frac{d\,\theta\,\text{Sin.}\,\theta}{d.\text{Sin.}\,\theta\,\text{Coſ.}\,\psi}$ ſic autem etiam punctum O geometrice aſſignabitur; quandoquidem Tang. r aequabitur functioni algebraicae quantitatum Sin. θ et Sin. Φ; quo facto punctum O reperietur in ipſa curua quaeſita C O, quippe quae ita erit comparata vt eius portio CO aequetur arcui circulari $MO = r$; atque iſta curua C O manifeſto erit geometrica vel algebraica, hic enim voces geometricae et algebraicae pro ſynonymis vſurpo, ita vt quicquid algebraice exprimi poteſt id etiam geometricum ſit cenſendum.

XXXII. Quo hanc curuam conſtructam C O etiam analytice euoluamus, ponamus angulum $BAO = x$ et arcum $AO = y$ et videamus cuiusmodi aequatio proditura ſit inter has quaſi coordinatas, ſeu potius inter quantitates Sin. x et Sin. y. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia ang. $MAO = \xi$ ita vt fiat $x = \Phi + \xi$; iam ex triangulo Sphaerico A M O, habemus primo

$$\text{Coſ.}\, y = \text{Coſ.}\,\theta\,\text{Coſ.}\, r + \text{Sin.}\,\theta\,\text{Sin.}\, r\,\text{Coſ.}\,\psi \text{ tum vero}$$

$$\text{Tang.}\,\xi = \frac{\text{Sin.}\, r\,\text{Sin.}\,\psi}{\text{Coſ.}\, r\,\text{Sin.}\,\theta - \text{Sin.}\, r\,\text{Coſ.}\,\theta\,\text{Coſ.}\,\psi},$$

vnde ſimul habetur $x = \Phi + \xi$, patet ergo tam Sin x, quam Sin. y etiam per functiones algebraicas quantitatum Sin. θ et Sin. Φ expreſſum iri.

XXXIII. Quodſi iam ſolutionem huius problematis methodo directa tentare velimus incipiendum erit

erit a coordinatis x et y et quum inde fiat arcus C O elementum $= \surd(dy^2 + dx^2 \text{Sin.} y^2)$ inter Sin. x et Sin. y talis relatio intercedere debet eaque algebraica vt integrale huius elementi fiat arcus circularis, quare poſito hoc arcu $= r$ neceſſe eſt fiat $\surd(dy^2 + dx^2 \text{Sin.} y^2) = dr$, ſeu ſi tangens huius arcus r vocetur $= t$, vt fiat $\surd(dy^2 + dx^2 \text{Sin.} y^2) = \frac{dt}{1+tt}$, hic igitur Methodus deſideratur, cuius beneficio cognoſci queat qualis relatio inter quantitates ſin. x et Sin. y intercedere debeat, vt haec conditio adimpleatur, ſeu quibusnam artificiis inueſtigatio ita adornari poſſit, vt intelligatur ad hoc praeſtandum opus eſſe noua quadam variabili ſin. θ cuius functio quaecunque algebraica ſit Sin. Φ, indeque deduci oportere angulum ψ, vt ſit Tang. $\psi = \frac{d\theta}{d\Phi \text{Sin.} \theta}$, hincque porro arcum r vt ſit Tang. $r = \frac{d\theta . \text{Sin.} \theta}{d . \text{Sin.} \theta \text{Coſ.} \psi}$, hincque porro angulum ξ, vt ſit:

$$\text{Tang.} \xi = \frac{\text{Sin.} r \text{Sin.} \psi}{\text{Coſ.} r \text{Sin.} \theta - \text{Sin.} r \text{Coſ.} \theta \text{Coſ.} \psi},$$

hisque omnibus factis, vt perſpici queat problemati huic ſatisfieri ſi capiatur

$$x = \Phi + \xi \text{ et Coſ.} y = \text{Coſ.} \theta \text{Coſ.} r + \text{Sin.} \theta \text{Sin.} r \text{Coſ.} \psi.$$

Cuilibet hinc ſtatim patebit hoc problema ad Analyſin infinitorum indeterminatam pertinere, quae quum adhuc parum ſit exculta, nullum eſt dubium quin ſi Methodum illam deſideratam explorare valeamus, maxima inde incrementa, in nouam hanc Analyſeos partem eſſe redundatura.

SECTIO

PHYSICO-
MATHEMATICA.

SECTIO TERTIA
DE
MOTV FLVIDORVM.
LINEARI POTISSIMVM AQVAE.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.
DE
PRINCIPIIS MOTVS LINEARIS FLVIDORVM.

Definitio.

I.

Fluidum motu lineari ferri dicitur quando eius vena ita ſecundum lineam quandam DE, quam motus directionem vocare licet, mouetur, vt in ſingulis punctis Z motus fiat ſecundum directionem eius lineae, et per totam ſectionem UV ad directricem normaliter factam celeritas in omnibus punctis ſit eadem. Tab. I. Fig. 32.

Coroll 1.

2. Ad motum ergo linearem duo requiruntur, primo vt motus vbique ſequatur directionem certae cuiusdam lineae DE, quae eius directrix vocatur, tum vero vt in ſingulis ſectionibus UV ad directricem normalibus omnia fluidi elementa pari celeritate ſecundum eandem directionem proferantur.

Coroll. 2.

3. Cognita ergo linea directrice ſi in quouis eius puncto Z fluidi celeritas fuerit data eadem quoque toti ſectioni UV eſt communis, et quia directio conuenit cum directricis tangente in puncto Z totus motus ſectionis UV erit determinatus.

Scholion 1.

Tab. I. Fig. 33. 4. Quando fluidum per tubum anguſtiſſimum DE tranſire cogitur, eius motus recte pro lineari, quem hic deſcripſimus haberi poteſt, ob anguſtiam enim tubi in ſingulis punctis Z alia motus directio eſſe nequit, niſi quam tractus tubi permittit, ac ſi rem accuracius cognoſcere velimus, per mediam tubi cauitatem lineam productam DZE concipere licet, quae motus directricem repraeſentabit et ex cuius directione in ſingulis punctis Z ipſa motus directio innoteſcet. Tum vero quia tubus eſt anguſtiſſimus, in qualibet eius ſectione UV ad directricem normali tam fluidi celeritas quam directio vbique

vbique erit eadem, non quod omnis inaequalitas abſolute excludatur, quum vtique fieri poſſet, vt per partem ZU celerius vel lentius feratur quam per partem ZV, ſed tales motus hic excludimus, dum in motum linearem inquirimus, tantum eos, qui ſint definitioni conſentanei conſideraturi. Quodſi vero talis inaequalitas adſit, perſpicuum eſt tubi amplitudinem continuo magis coarctando, tandem omnem huiusmodi inaequalitatem ceſſare debere, quocirca ſi tubos infinite anguſtos ſtatuamus, huic exceptioni ne locus quidem relinquitur. Atque hoc caſu etiam linea directrix non diſcrepat a ductu ipſius tubi; perindeque erit quodnam tubi latus pro directrice accipiatur; interim tamen non eſt neceſſe, vt tubo vbique eadem amplitudo tribuatur, quin potius inſignis diuerſitas admitti poterit, dummodo nusquam enormis ſaltus occurrat, veluti eueniret, ſi vſpiam in F tubi continuitas tumore interrumperetur, qui etiamſi eſſet infinite paruus, tamen motus non amplius legem praeſcriptam ſequi poſſet, dum fluidum in tumore fere ſtagnaret, et reliquum perinde praeterflueret, ac ſi tumor ille abeſſet. Huiusmodi ergo irregularitates in tubo motus continuitatem perturbantes omnino ſunt excludendae.

Scholion 2.

5. Quanquam motus linearis proprie tubos infinite anguſtos poſtulat, ne eiusmodi inaequalitates quae huius motus indoli aduerſarentur, locum habere

 queant,

queant, tamen etiam in tubis ſatis amplis fieri poteſt, vt motus fluidi iſtam legem ſequatur, hocque caſu iſtiusmodi etiam motus, quantumvis tubi fuerint ampli, recte ad motum linearem referuntur. Quin etiam etſi motus ab hac lege parumper recedat, in praxi hoc diſcrimen vix ſpectari ſolet, et concluſiones ex calculo deductae pro veris proxime habeantur, experientia non admodum reclamante. Ita effluxus aquae ex vaſis etiam ampliſſimis per foramen factus ex his principiis ita definiri ſolet, vt vix vllus diſſenſus ab experientia percipiatur, atque adeo a veritate eo minus aberratur, quo minus fuerit foramen, cum tamen hoc caſu tota vaſis ſtrata ad directricem normalia certe non communi motu ferantur. Verum hic commode vſu venit, vt vaſis figura ex calculo ad finem perducto iterum egrediatur, et effluxus eodem modo fieri deprehendatur, ac ſi vas reuera haberet figuram ad modum linearem accommodatam. Etſi autem haec motus linearis conſideratio ampliſſimum habet vſum, tamen quia in tubis amplioribus motus aliam legem ſequitur, vnde aberrationes, quamuis vix ſentiantur, naſci debent, noſtras inueſtigationes tantum ad tubos anguſtiſſimos referri conueniet, quamob cauſam etiam motus, quos hic ſum conſideraturus lineares vocaui.

Scholion 3.

6. Tractatio haec ingentem includit varietatem ex tuborum figura oriundam, primum ergo tubos con-

conſiderabo rectos, ſeu potius quorum directrices ſint lineae rectae, quibus quidem amplitudines vtcunque variabiles tribuere licet. Deinde fluidi motus ſum inueſtigaturus per tubos, quorum directrices ſunt lineae curuae; quae prout fuerint vel in eodem plano vel ſecus? in calculo aliquod aliſcrimen pariunt, dum priori caſu figura per duas tantum coordinatas, poſteriori vero per tres eſt definienda. Plurimum deinde intereſt, vtrum fluidum perpetuo in huiusmodi tubis fluat, an alicubi effluat tum vero ipſa fluidi natura, et vires ſollicitantes in computum ſunt ducendae. Omnino autem motus determinatio ex principiis ante ſtabilitis peti debet, et quoniam duplici modo haec motus principia ſunt euoluta, quouis caſu vti conueniet eo qui maxime accommodatus videbitur. Primum quidem tubos in quiete poſitos ſpectabo, deinceps ſeorſim in motum per tubos mobiles inquiſiturus.

Problema 42.

7. Motum linearem fluidi per tubum rectilineum ad calculum reuocare; methodum adhibendo ſupra priori loco expoſitam.

Solutio.

Sit O I A *a* tubus propoſitus eiusque directrix linea recta O A cuius amplitudo ſit vtcunque variabilis. Elapſo tempore $= t$ conſideretur fluidi particula tubi ſpatiolum X *x* V *v* occupans, atque a termino Tab. I. Fig. 34.

termino fixo O ponatur diſtantia $OX = x$, tubique amplitudo in X ſeu ſectio normaliter facta $XV = \omega$, ita vt ω ſit functio data ipſius x. Iam per ſectionem X V ſit celeritas fluidi ſecundum directionem $XA = u$, denſitas $= q$, et preſſio $= p$; eruntque u, q et p functiones duarum variabilium x et t; tum vero ex fluidi natura datur relatio inter p et q, et calorem r ſi forte eius ratio fuerit habenda. Tribuatur huic particulae craſſities $Xx = dx$ eritque eius volumen $= \omega dx$ et maſſa $= q\omega dx$. Iam tempuſculo dt progrediatur haec particula in $X'V'x'v'$; et cum celeritas in X ſit $= u$, erit ſpatiolum $XX' = udt$; in x vero celeritas $= u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ dabit ſpatiolum $xx' = udt + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$, ita vt ſit $X'x' = dx + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$. Cum autem amplitudo in X' ſit $= \omega + udt.\frac{d\omega}{dx}$, erit iſtius particulae volumen $= \omega dx + \omega dtdx\left(\frac{du}{dx}\right) + udtdx.\frac{d\omega}{dx}$. At denſitas noſtrae particulae in X' inde colligi debet, quod cum q ſit functio ipſarum x et t, prior x incrementum capiat $XX' = udt$, poſterior vero t incrementum dt, ex quo denſitas in X' erit $= q + udt\left(\frac{dq}{dx}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$ per quam ſi volumen modo inuentum multiplicetur, prodit maſſa noſtrae particulae translatae:

$$X'V'x'v' = q\omega dx + dxdt\left(q\omega\left(\frac{du}{dx}\right) + qu.\frac{d\omega}{dx} + \omega u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right)\right)$$

quae quia aequalis eſſe debet maſſae priori $q\omega dx$, haec conſideratio pro motu ſuppeditat hanc priorem aequationem

$q\,\omega$

$$q\,\omega\left(\frac{du}{dx}\right) + q\,u.\,\frac{d\omega}{dx} + \omega\,u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

ſeu $q\,u.\,\frac{d\omega}{\omega\,dx} + \left(\frac{d.\,qu}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$.

Cum porro celeritas u poſt tempuſculum dt, abeat in $u + u\,dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right)$, quia non ſolum tempori t augmentum dt ſed etiam diſtantiae $OX = x$ augmentum $XX' = u\,dt$ tribui debet, erit acceleratio particulae $XVxv = u\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$, quae cum viribus acceleratricibus conuenire debet. Ad has inveniendas primo preſſio perpendatur, quae cum in facie XV ſit $= p$, erit in facie $xv = p + dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ob $Xx = dx$. Hinc naſcitur vis acceleratrix particulam retro vrgens $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, ſiquidem vis motrix inde nata eſt $= \omega.\,dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, quae per maſſam $q\,\omega\,dx$ diuiſa illam dat vim acceleratricem. Ex viribus porro fluidi particulas ſingulas immediate ſollicitantibus naſcatur vis acceleratrix ſecundum directionem $XA = P$ ita vt iam ſecundum eandem directionem tota ſit vis acceleratrix $= P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, quae per $2g$ multiplicata accelerationi eſt aequanda, vnde pro motu fluidi altera aequatio ita ſe habet:

$$2g\,P - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$

ſeu ſi tempus t conſtans accipiatur:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,P\,dx - u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right) - dx\left(\frac{du}{dt}\right) = 2g\,P\,dx - u\,du - dx\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Haec ergo aequatio cum ante inuenta:

$$q\,u.\,\frac{d\omega}{\omega\,dx} + \left(\frac{d.\,q\,u}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

 con-

coniuncta, ſi relatio inter p et q ex natura fluidi in ſubſidium vocetur, totum motum determinabit.

Coorll. 1.

8. Multiplicetur etiam prior aequatio per dx, et in eius integratione tempus t conſtans ſpectetur; habebiturque

$$\frac{qud\omega}{\omega}+d.\,qu+dx\left(\frac{dq}{dt}\right)=0 \text{ ſeu } \omega dx\left(\frac{dq}{dt}\right)+d.\,qu\omega=0,$$

vnde ſi denſitas fluidi fuerit conſtans $q=b$ colligitur $u\omega=$ Conſt. quae conſtans tempus t vtcunque inuoluere poteſt, vnde patet celeritates in diuerſis tubi locis quouis tempore eius amplitudinibus reciproce eſſe proportionales, quae eſt notiſſima motus fluidorum per tubos proprietas.

Coroll. 2.

9. Sin autem denſitas fluidi q non fuerit conſtans, ſed etiam a preſſione p pendeat, neceſſario ambae aequationes coniungi debent, vt ex iis deinceps pro quouis loco et ad quoduis tempus t tam celeritas u, quam preſſio definiatur; quae inueſtigatio propterea ſaepe vehementer difficilis euadit.

Scholion.

10. Cum hic motus ſit caſus maxime ſpecialis problematis generaliſſimi, cuius ſupra duplicem ſolutionem exhibuimus, hicque methodo priori ſim vſus, neceſſe eſt vt ſolutio hic inuenta in illa genera-

neraliſſima contineatur, quod quidem de altera aequatione preſſionem p definiente per ſe eſt perſpicuum; dum enim hic praeter tempus t vnica variabilis x adeſt, ii etiam termini, qui differentialia dy et dz complectebantur ſunt praetermiſſi, vbi imprimis notandum eſt binas celeritates v et w euaneſcere, propterea quod per totam ſectionem X V motus ſecundum eandem directionem O A fieri concipitur. Altera autem aequatio ob terminum $qu.\frac{d\omega}{\omega dx}$ generali formae penitus aduerſari videtur; amplitudine autem tubi vbique eadem exiſtente res egregie conuenit. Verum tamen re bene perpenſa et haec aequatio immediate ex forma generali deduci poteſt. Si enim tubus ab V ad V′ diuergat, motus directio circa V aliquantillum a directione O A deflectere debet. Poſita ergo $XV = y$, ſtatuatur celeritas $v = \alpha y$, vt in X nulla ſit deflexio, vt tertia autem celeritas w euaneſcat, ſumatur $z = \text{conſt.} = \gamma$, vt ſit $\omega = \gamma y$. Quia autem denſitas q plane non ab y pendet, erit $(\frac{d.qv}{dy}) = \alpha q$; at quia y eſt functio ipſius x, erit $X'V' = y + u\,dt.\frac{dy}{dx}$, tum vero ex celeritate v fit etiam $XV' = y + v\,dt = y + \alpha y dt$, vnde fit

$$\alpha = u.\frac{dy}{ydx} = u.\frac{d\omega}{\omega dx}, \text{ ideoque } (\frac{d.qv}{dy}) = qu.\frac{d\omega}{\omega dx}.$$

Hinc ergo clare intelligitur, quomodo ſolutio ſpecialis hic data pulcerrime cum aequatione generali cohaereat, atque ex ea naſcatur.

Problema 43.

11. Praecedens problema, quo motus fluidi in tubo rectilineo quaeritur, per methodum poſteriorem reſpectu ad ſtatum initialem habito reſoluere.

Solutio.

Tab. II. Fig. 35. Fluidi particula, cuius motum inueſtigamus, initio $t = 0$ occupauerit tubi elementum $XVX'V'$, pro quo ponamus $OX = X$, $XX' = dX$, amplitudinem tubi in $X = \Omega$, vt volumen particulae ſit $= \Omega\, dX$. Sit porro denſitas in $X = Q$, preſſio $= P$ et celeritas ſecundum directionem $XA = U$ quae omnibus particulae punctis eſt communis; vnde eius maſſa $= Q\,\Omega\, dX$. Iam elapſo tempore t eadem particula reperiatur in $x\,v\,x'\,v'$ pro qua ponamus $Ox = x$, amplitudinem $xv = \omega$, tum vero denſitatem in $x = q$, preſſionem $= p$ et celeritatem ſecundum $xA = u$, eruntque litterae x, q, p, u functiones binarum variabilium X et t, at amplitudo ω eſt certa functio ipſius x ex tubi figura definienda. Cum iam ſectio $X'V'$ eodem tempore t peruenerit in $x'v'$ erit $xx' = dX\left(\frac{dx}{dX}\right)$; vnde particulae $xvx'v'$ volumen erit $\omega\, dX\left(\frac{dx}{dx}\right)$ et maſſa $= q\,\omega\, dX\left(\frac{dx}{dX}\right)$; quae cum ſemper maneat eadem habebimus pro motus determinatione hanc primam aequationem:

$$q\,\omega\left(\frac{dx}{dX}\right) = Q\,\Omega.$$

Cum deinde celeritas in x ſit $u = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, erit particulae $x\,v\,x'\,v'$ acceleratio $= \left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Ex viribus ſollicitan-

licitantibus naſcatur pro hac particula vis acceleratrix ſecundum directionem x A $= \mathfrak{P}$; tum vero quia in x' preſſio eſt $= p + dX\left(\frac{dp}{dX}\right)$, hinc oritur vis motrix retro vrgens $= \omega\, dX\left(\frac{dp}{dX}\right)$, quae per maſſam $q\,\omega\, dX\left(\frac{dx}{dX}\right)$ diuiſa dat vim acceleratricem $= \frac{1}{q\left(\frac{dx}{dX}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dX}\right)$ ab illa $\mathfrak{P}$ ſubtrahendam, vnde altera aequatio motus determinationem continens colligitur:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2g\,\mathfrak{P} - \frac{2g}{q\left(\frac{dx}{dX}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dX}\right).$$

quae ſumto tempore t conſtante abit in hanc:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,\mathfrak{P}\,dx - dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right).$$

Coroll. 1.

12. Perſpicuum eſt quantitates x, q, p et u eiusmodi functiones eſſe debere binarum variabilium X et t, vt facto $t = 0$ fiat $x = X$, $q = Q$, $p = P$, et $u = U$; quibus conditionibus per integrationem eſt ſatisfaciendum.

Coroll. 2.

13. Amplitudo ω vt functio data ſpectatur quantitatis O $x = x$, quae cum ipſa ſit functio ipſarum X et t, eatenus amplitudo ω a tempore pendere eſt cenſenda.

 Scholion.

Scholion.

14. Quia hoc problema continet caſum maxime ſpecialem problematis generaliſſimi 41, etiam ſolutionem hic datam in illa generaliſſima contentam eſſe oportet, quod quidem de aequatione poſteriori ſtatim patet, quippe qui ex forma generali naſcitur, ſi termini, qui ibi binas variabiles Y et Z inuoluunt expungantur. Quemadmodum autem aequatio prior cum ſolutione generali conueniat minus clare perſpicitur. Conſenſus autem iterum oſtendi poteſt, ſi modo ad amplitudinis tubi variationem rite reſpiciatur. Hunc in finem ſpectentur ternae tubi dimenſiones, et ſi binae Y et Z prae $OX = X$ ſunt infinite paruae, ac Z quidem vt conſtantis per totum tubum magnitudinis conſideretur, vt ſit $z = Z$ ideoque $(\frac{dz}{dZ}) = 1$, tum vero erit $\Omega = YZ$. Statuatur $y = LY$, exiſtente L functione ſolius temporis t, fietque $(\frac{dy}{dY}) = L$ et $(\frac{dy}{dX})$ cum reliquis formulis differentialibus euaneſcit, atque amplitudo in x erit $\omega = LYZ = L\omega$. Nunc ex ſolutione generali colligitur valor $K = (\frac{dx}{dX}) L, 1$, qui ob $L = \frac{\omega}{\Omega}$ abit in $K = \frac{\omega}{\Omega} (\frac{dx}{dX})$: quo inuento manifeſto eſt $Kq = Q$ vt ſolutio habet generalis; ſicque tota haec ſolutio in generali continetur, ex eaque vt caſus ſpecialis deriuari poteſt.

Problema 44.

Tab. II. Fig. 36. 15. Si tubi directrix IYK ſit linea curua quaecunque in eodem plano poſita, eiusque amplitudo

tudo Y V per tubi longitudinem vtcunque ſit variabilis, per methodum priorem ſupra traditam motum fluidi cuiuscunque in hoc tubo inueſtigare.

Solutio.

Elapſo tempore $= t$ conſideretur fluidi particula in tubo occupans ſpatiolum Y V $y\,v$, ac pro puncto Y ſtatuantur binae coordinatae O X $= x$, X Y $= y$, quarum relatio mutua cum ex figura directricis tubi detur, erit y functio ipſius x; tubi vero amplitudo in Y minima ponatur Y V $= \omega$, quae etiam vt functio ipſius x data eſt ſpectanda. Sit porro denſitas fluidi in Y $= q$ et preſſio $= p$, quae duae quantitates erunt functiones duarum variabilium x et t, perinde ac celeritas fluidi in tubo quae ſit $= \mathfrak{v}$, cuius directio cum ſit Y y, ſi hoc elementum breuitatis gratia vocemus Y $y = \surd(dx^2 + dy^2) = ds$ erit celeritas ſecundum OX $= \frac{\mathfrak{v}\,dx}{ds} = u$ et ſec. XY $= \frac{\mathfrak{v}\,dy}{ds} = v$. Quia nunc ſectio Y V $= \omega$ ad directricem eſt normalis, volumen noſtrae particulae Y V $y\,v$ erit $= \omega\,ds$ et maſſa $= q\,\omega\,ds$. Iam tempuſculo dt progrediatur haec particula in Y$'$ V$'$ $y'\,v'$ ita vt elementum Y peruenerit in Y$'$, eritque ſpatiolum X X$' = u\,dt = \frac{\mathfrak{v}\,dx}{ds}.\,dt$ et X$'$ Y$'$ $-$ X Y $= v\,dt$ $= \frac{\mathfrak{v}\,dy}{ds}.\,dt$. Cum autem in y eſſent celeritates $u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$, erit progreſſu temporis

$$x\,x' = u\,dt + dt\,dx\left(\frac{du}{dx}\right) \text{ et } x'y' - xy = v\,dt + dt\,dx\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

hinc-

hincque

$X'x' = dx + dt\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $x'y' - X'Y' = dy + dt\,dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$.

Quamobrem habebimus:

$$Y'y' = ds + \frac{dt\,dx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dt\,dx\,dy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Deinde in Y' eſt amplitudo $Y'V' = \omega + u\,dt.\frac{d\omega}{dx}$ et denſitas

$$= q + u\,dt\left(\frac{dq}{dx}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right);$$

ex quo concluditur particulae $Y'V'y'v'$ volumen

$$= \omega ds + \frac{\omega\,dt\,dx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\omega\,dt\,dx\,dy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right) + u\,dt\,ds.\frac{d\omega}{dx};$$

et maſſa

$$= q\omega ds + \frac{q\omega\,dt\,dx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{q\omega\,dt\,dx\,dy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right) + qu\,dt\,ds.\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$
$$+ u\omega\,dt\,ds\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega\,dt\,ds\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

quae cum praecedenti $q\omega ds$ aequalis eſſe debeat, per $\omega dt\,ds$ diuidendo perueniemus ad hanc aequationem:

$$\frac{q\,dx^2}{ds^2}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{q\,dx\,dy}{ds^2}\left(\frac{dv}{dx}\right) + qu.\frac{d\omega}{\omega dx} + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

ſubſtituantur autem hic valores $u = \frac{\mathfrak{v}\,dx}{ds}$, $v = \frac{\mathfrak{v}\,dy}{ds}$ et quia $\mathfrak{v}$ eſt functio ipſarum t et x, fractiones vero $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ a ſola x pendent, peruenietur ad hanc aequationem

$$q\mathfrak{v}.\frac{d\omega}{\omega ds} + \frac{dx}{ds}\left(\frac{d.q\mathfrak{v}}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

Deinde cum celeritates in Y' ſecundum directiones OX et XY ſint

$$u + u\,dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right) \text{ et } v + u\,dt\left(\frac{dv}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

erunt

erunt accelerationes:

$$u\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right) \text{ et } u\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Ex viribus nunc ſollicitantibus ponamus ſecundum easdem directiones reſultare vires acceleratrices P et Q. Poſtea vero ob preſſionem in $y=p+dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, elementum Y V $y\,v$ in directione yY retro vrgetur vi acceleratrice $=\frac{dx}{qds}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, vnde naſcuntur vires ſecundum directiones O X et X Y hae:

$$P-\frac{dx^2}{qds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) \quad \text{et} \quad Q-\frac{dx\,dy}{qds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

hincque porro iſtae aequationes:

$$2gP-\frac{2g\,dx^2}{qds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)=u\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{\text{ȣȣ}}{ds}d.\frac{dx}{ds}+\frac{\text{ȣ}dx^2}{ds^2}\left(\frac{d\text{ȣ}}{dx}\right)$$
$$+\frac{dx}{ds}\left(\frac{d\text{ȣ}}{dt}\right)$$

$$2gQ-\frac{2g\,dx\,dy}{qds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)=u\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{\text{ȣȣ}}{ds}d.\frac{dy}{ds}+\frac{\text{ȣ}dx\,dy}{ds^2}\left(\frac{d\text{ȣ}}{dx}\right)$$
$$+\frac{dy}{ds}\left(\frac{d\text{ȣ}}{dt}\right)$$

a quarum prima per dy multiplicata ſi ſubtrahatur altera in dx ducta relinquitur:

$$2g(P\,dy-Q\,dx)=\frac{\text{ȣȣ}}{ds}\left(\frac{dy\,ddx-dx\,ddy}{ds}\right)=\text{ȣȣ}d.\,\text{Ang. tang.}\frac{dx}{dy}$$

Praeterea vero hinc colligitur:

$$2g(P\,dx+Q\,dy)-\frac{2g\,dx}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)=\text{ȣ}\,dx\left(\frac{d\text{ȣ}}{dx}\right)+ds\left(\frac{d\text{ȣ}}{dt}\right).$$

Prior autem aequatio penitus hinc eſt excludenda, propterea quod ex preſſione ſolam accelerationem ſecundum motus directionem computauimus, dum inde alia quoque naſceretur a lateribus tubi excepta et deſtructa. Vires enim P et Q aliter motum non afficiunt, niſi quatenus ſecundum directionem motus

Yy agunt ex quo ſola aequatio poſterior in calculo relinquitur, quae ſi tempus t conſtans ſtatuatur, preſſionem p ita definit vt ſit

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(P\,dx + Q\,dy) - \upsilon\,d\upsilon - ds\left(\frac{d\,\upsilon}{d\,t}\right).$$

Coroll. 1.

16. Patet ergo curuaturam lineae directricis nihil in motu fluidi turbare, dum formularum $\frac{d\,x}{d\,s}$ et $\frac{d\,y}{d\,s}$ differentialia, quibus curuatura definitur, penitus ex calculo euanuerunt.

Coroll. 2.

17. Prior quoque aequatio inuenta ad formam commodiorem reduci poteſt. Cum enim s ſit functio ipſius x tantum, perinde eſt ſiue υ conſideretur vt functio ipſarum x et t ſiue ipſarum s et t: ex quo erit $dx\left(\frac{d\,\upsilon}{d\,x}\right) = ds\left(\frac{d\,\upsilon}{d\,s}\right)$ et ob eandem rationem $d\,x\left(\frac{d.\,q\upsilon}{d\,x}\right) = d\,s\left(\frac{d.\,q\,\upsilon}{d\,s}\right)$, vnde prior aequatio abit in hanc formam:

$$q\upsilon.\frac{d\,\omega}{\omega\,d\,s} + \left(\frac{d.\,q\upsilon}{d\,t}\right) + \left(\frac{d\,q}{d\,t}\right) = 0,$$

et porro in hanc: $\left(\frac{d.\,q\,\upsilon\omega}{d\,s}\right) + \omega\left(\frac{d\,q}{d\,t}\right) = 0.$

Scholion 1.

18. Solutionem huius problematis ideo per tantas ambages minus neceſſarias deduxi, quo clarius appareat, curuaturam lineae directricis nihil plane in motu fluidi turbare; quod principium ſi ſtatim ſtabilire

ſtabilire voluiſſem, merito id in dubium vocare licuiſſet. Nunc autem demum certo agnoſcimus, quidquid de viribus ad motum fluidi inflectendum inſumitur, id quaſi a tubi lateribus abſorberi, ita vt eaedem prodeant motus determinationes, ac ſi tubus eſſet rectilineus. De viribus tantum ſollicitantibus obſeruandum eſt, pro quouis fluidi elemento inde eam ſolum vim acceleratricem elici debere, quae ſecundum ipſam motus directionem agat, reliquis viribus plane neglectis, quippe quae totae in latera tubi impenduntur. Hoc notato euidens eſt ſolutionem huius problematis plane non diſcrepare a probl. 42 ex eoque ſtatim deriuari potuiſſe, tantum loco x et u ſcribendo s et ϑ, et loco vis P hanc $P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds}$. Hoc ergo compendio iam animaduerſo multo facilius ſequentia problemata reſoluemus.

Scholion 2.

19. Ne vlli dubio locus relinquatur, clarius declarandum videtur, cur in aeſtimatione preſſionum quibus particula fluidi YV yv vrgetur, nullam rationem inaequalitatis baſium yv et YV habuerim, dum tamen in reliquis inueſtigationibus ad eam tam ſollicite reſpici oporteat. Cum enim poſita amplitudine $YV = \omega$, amplitudo yv vtique fiat $= \omega + dx\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, in eamque preſſio agat $p + dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$; tota preſſio quam baſis yv ſuſtentat fit $p\omega + p\,dx\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \omega\,dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ dum ea, quam baſis YV ſuſtinet tantum eſt $= p\omega$

 ſicque

ſicque vis retro pellens maior foret, quam in ſolutione aſſumſeram, quae eadem difficultas etiam praecedentia problemata premere videtur. Verum hoc dubium facile diluitur, ſi ex iis quae ſupra de indole preſſionum ſunt tradita, recordemur omnes preſſiones, quae per aequales altitudines repraeſentantur ſe mutuo in aequilibrio tenere etiamſi in baſes maxime inaequales agant; hinc illius vis $p+dx(\frac{p}{dx})$, quam baſis xy ſuſtinet, pars p plane eſt in aequilibrio cum vi p baſin Y V vrgente, etiamſi baſis xy maxime foret inaequalis huic YV, ex quo preſſionis illius, qua baſin yv impelli vidimus, non ſola pars $p\omega$ ſed haec $p\omega+pdx(\frac{d\omega}{dx})$ a preſſione oppoſita deſtruitur, ita vt exceſſus ex ſola parte $\omega\, dx(\frac{dp}{dx})$ aeſtimari debeat, prorſus vti in horum problematum ſolutionibus feci. Deinde ſi cui dubium adhuc videatur, quomodo in euolutione aequationum inuentarum differentialia ſecundi gradus ex calculo euaneſcant ita vt ſit $\frac{\vartheta\vartheta}{ds}dxd.\frac{dx}{ds}+\frac{\vartheta\vartheta}{ds}dyd.\frac{dy}{ds}=0$ is has formulas tantum euoluat, ac reperiet,

$$\frac{\vartheta\vartheta}{ds}\left(\frac{dxddx}{dt}-\frac{dx^2dds}{ds^2}+\frac{dvddv}{as}-\frac{dy^2dds}{ds^2}\right)$$ quae forma ob $dx^2+dy^2=ds^2$ et $dxddx+dyddy=dsdds$ abit in

$$\frac{\vartheta\vartheta}{ds}\left(\frac{dsdds}{ds}-\frac{ds^2dds}{ds^2}\right)=0.$$

Problema 45.

Tab. II. Fig. 37. 29. Si tubi directrix ſit IYK linea curua in eodem plano poſita cuius amplitudo per longitudinem tubi vtcunque ſit variabilis, per methodum poſterio-

poſteriorem ſupra traditam reſpectu ad ſtatum initialem habito, motum fluidi cuiuscunque in hoc tubo definire.

Solutio.

In ſtatu initiali conſideremus fluidi particulam $Y V Y' V'$ et pro puncto Y poſitis coordinatis $O X = X$, $X Y = Y$, ſit ipſe arcus $I Y = S$ et in Y amplitudo tubi $Y V = \Omega$ quae ſiue vt functio ipſius X ſpectetur ſiue ipſius S perinde eſt. Tum vero ſit denſitas in $Y = Q$ preſſio $= P$, et celeritas ſecundum tubi directionem $Y Y' = \Upsilon$, ſi iam capiatur tubi elementum $Y Y' = dS$, erit particulae noſtrae volumen $= \Omega\, dS$ et preſſio $= Q\, \Omega\, dS$. His quae ad ſtatum initialem pertinent poſitis tempore $= t$ noſtra particula transferatur in $y v y' v'$, et pro puncto y vocetur $O x = x$ $xy = y$ et arcus directricis $I y = s$, tum vero denſitas $= q$, et preſſio $= p$, quae quantitates omnes ſunt functiones duarum varibilium S et t, eaeque tales vt poſito tempore $t = 0$ fiat $x = X$, $y = Y$, $s = S$, $q = Q$ et $p = P$ amplitudo vero tubi in y ſit $y v = \omega$ functioni ipſius s. Quod ſi iam ratiocinium inſtituatur vt in probl. 43, quoniam tubi curuatura nihil turbat in motu fluidi, loco quantitatis X ibi tubi longitudinem denotantis hic litteram S ſcribi oportet. Ex viribus autem ſollicitantibus ſi eae vires acceleratrices, quae ſecundum coordinatarum Ox et xy directiones agunt ſint $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, ea quae in y ſecundum tubi directio-

rectionem vrget, erit $\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy}{ds}$ atque hinc motus fluidi ſequentibus duabus aequationibus exprimetur.

$$q\omega\left(\frac{ds}{ds}\right) = Q\Omega \text{ et } \frac{2g\,dp}{q} = 2g(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy) - ds\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$$

in qua poſteriori tempus t conſtans eſt aſſumtum.

Coroll 1.

21. Denotat ergo $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ celeritatem fluidi in tubi puncto y elapſo tempore $= t$, quam ergo ita comparatum eſſe oportet vt facto $t = 0$ fiat $\left(\frac{ds}{dt}\right) = \Upsilon$ quippe quae celeritas in ſtatu initiali vt cognita eſt ſpectanda.

Coroll 2.

Curuamen ergo tubi tantum in effectu virium ſollicitantium variationem parit quoniam pro quauis fluidi particula ex viribus ſollicitantibus ea tantum vis acceleratrix colligi debet quae ſecundum tubi directionem agit.

Scholion.

23. Animaduerti hic conuenit in ſtatu initiali neque celeritatem Υ neque preſſionem P pro lubitu fingi poſſe, cum enim hae quantitates in aequationes pro motu inuentas non ingrediantur eas ita comparatas eſſe oportet, vt poſtquam aequationes inuentae fuerint integratae, ex valoribus ipſarum ϑ et p poſito tempore $t = 0$ illae quantitates oriantur. Quanquam autem integratio maximam amplitudinem ſecum importat, tamen effici nequit, vt in ſtatu

initiali

initiali pro ſingulis elementis illae ambae quartitates Υ et P datos valores obtineant. Quodſi enim fluidum nullius compreſſionis ſit capax, ſtatim atque in vnica tubi ſectione celeritas datur, ſimul in omnibus reliquis determinatur, tum vero etiam per preſſionem in vnico tubi loco preſſiones in omnibus reliquis determinantur. Vnde ſatis intelligitur etiamſi denſitas fuerit variabilis quia ſemper cum celeritate et preſſione certo modo cohaeret, tamen non in ſingulis locis pro ſtatu initiali celeritatem et preſſionem pro lubitu fingi poſſe.

Problema 46.

24. Si tubi directrix I Z z K fuerit linea curva quaecunque non in eodem plano ſita, eiusque amplitudo vtcunque variabilis, definire motum fluidi in huiusmodi tubo ſecundum methodum priorem ſupra expoſitam. Tab. II. Fig. 38.

Solutio.

Hac methodo vtentes ſtatim conſideramus fluidi ſtatum ad tempus quodcunque indefinitum $= t$ a certo initio elapſum. Definita igitur directrice per ternas coordinatas O$x = x$, $xy = y$, $yz = z$, quae ita a ſe inuicem pendent, vt pro vnica variabili haberi queant, ſtatuamus praeterea arcum directricis I$z = s$, et in z ſit tubi amplitudo $zv = \omega$, quae etiam vt functio ipſius s eſt ſpectanda. In hoc iam loco z ad tempus $= t$, contemplamur fluidi particulam, cuius denſitas ſit $= q$,

preſſio

preſſio $= p$ et celeritas ſecundum tubi directionem $zK = \upsilon$; quae quantitates ſunt functiones duarum variabilium ipſius s ſcilicet et temporis t. Ex viribus denique ſollicitantibus oriantur pro puncto z hae tres vires acceleratrices P, Q, R ſecundum directiones coordinatarum Ox, xy et yz; ex quibus porro vis ſecundum tubi directionem zK accelerans colligitur $\frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$. His poſitis cum tubi curuatura in motu fluidi nihil immutet, motus quaeſitus ſequentibus duabus aequationibus exprimetur, quarum prior relationem inter denſitatem, celeritatem et amplitudinem tubi definit et ita ſe habet:

$$q\upsilon . \frac{d\omega}{\omega\, ds} + \left(\frac{d.q\upsilon}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \text{ ſeu } \left(\frac{d.q\upsilon\omega}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

altera vero praeterea preſſionem inuoluit, in eaque tempus t vt conſtans ſpectatur:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - \upsilon\, d\upsilon - ds\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right).$$

Problema 47.

Tab. II. Fig. 38. 25. Si tubi directrix $IZzK$ ſit linea curua quaecunque non in eodem plano poſita, eiusque amplitudo vtcunque variabilis definire motum fluidi in huiusmodi tubo ſecundum methodum poſteriorem reſpectu ad ſtatum initialem habito.

Solutio.

Dum ſingula directricis puncta Z per ternas coordinatas definiuntur $OX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$,

$YZ = Z$, ponatur inſuper longitudo arcus $IZ = S$ et tubi amplitudo in $Z = \Omega$. Conſideretur iam fluidi particula quaecunque, quae in ſtatu initiali vbi erat tempus $t = 0$, erat in Z, eiusque denſitas $= Q$ tum vero preſſio $= P$ et celeritas ſecundum tubi directionem $ZK = \Upsilon$; quae ergo quantitates vt datae et functiones vnius variabilis S ſpectari poſſunt. Nunc elapſo tempore $= t$ eadem particula peruenerit in tubi punctum z, coordinatis $Ox = x$, $xy = y$ et $yz = z$ definitum, vbi ſit arcus $Iz = s$, et tubi amplitudo $z = \omega$, quae eſt functio ipſius s, tum vero in z ſit fluidi denſitas $= q$, preſſio $= p$, et celeritas ſecundum $zK = \upsilon$ quam per has denominationes nouimus eſſe $\upsilon = (\frac{ds}{dt})$, haeque quantitates omnes vt functiones duarum variabilium S et t ſunt ſpectandae. Denique ex reſolutione virium particulam in z ſollicitantium deriuentur ſecundum directiones Ox, xy et yz hae tres vires acceleratrices $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. Quibus poſitis cum tubi curuatura nihil in noſtra inueſtigatione perturbet, habebimus vti in Probl. 45 pro motu fluidi in hoc tubo has duas aequationes:

$$q\,\omega\,(\frac{ds}{dS}) = Q\,\Omega$$

et $$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,(\mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{Q}\,dy + \mathfrak{R}\,dz) - ds\,(\frac{dds}{dt^2})$$

in qua poſteriori tempus t conſtans eſt aſſumtum.

Scholion.

26. Omnia haec problemata duplici modo dedimus ſoluta, dum vtramque methodum in praece-

 dente

dente ſectione expoſitam adhibuimus. Solutiones quidem hae geminae ratione formae plurimum discrepant, verumtamen quin ſemper egregie inter ſe conueniant nullo modo dubitari poteſt. Prout autem quaeſtiones fuerint comparatae modo magis expediet vti ſolutione priori modo poſteriori; ſemper autem vtramque adhibendo non ſolum earum conſenſus veritatem eo magis confirmabit, ſed etiam inſignes dilucidationes ſuppeditabit, vnde veram motus naturam eo accuratius cognoſcemus. Huius autem tractationis primariam diuiſionem praebet fluidorum diuerſitas, quatenus eorum denſitas vel eſt conſtans vel variabilis, quorſum addi poteſt fluidum mixtum, veluti ſi fluidi continuitas in tubo bullis aëreis fuerit interrupta. Virium ſollicitantium ratio tam parum afficit hanc tractationem, vt vix operae pretium ſit alias vires praeter grauitatem conſiderari, neque hic etiam quicquam impedit, ſi forte actio virium $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ integrationem non admittat, hic enim x, y et z a ſe inuicem pendent, et vnicam variabilem conſtituere ſunt cenſendae quamobrem illa difficultas locum habere nequit. At vero amplitudinis tubi variatio tantopere in calculum influit, vt maxime conducat hinc diuiſionem petere; ex quo primo tubos eiuſdem vbique amplitudinis ſum contemplaturus. Denique omnem fluidorum diuerſitatem ad duas ſpecies aquae et aëris reuocare licet.

CAPVT

CAPVT II.

DE MOTV AQVAE IN TVBIS AEQVALITER VBIQVE AMPLIS.

Problema 48.

27. Si tubi aequaliter ampli directrix fuerit linea curua quaecunque in quo aqua a ſola grauitate animata moueatur, eius motum definire.

Solutio.

Habeat tubi I i K k directrix I Z z K figuram quamcunque curuam aequatione duplici inter ternas coordinatas O $x = x$, $xy = y$, $yz = z$ determinatam, ponaturque directricis arcus I $z = s$ vt ſit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, vt quantitates x, y, z vt functiones ipſius s ſpectari queant. Sit tubi amplitudo $= \alpha$, et denſitas aquae littera b deſignetur vt ſit $\omega = \alpha$ et $q = b$. Tum vero elapſo tempore $= t$ ſit preſſio aquae in $z = p$ et celeritas ibidem ſecundum directionem z K $= v$; vires autem ſollicitantes P, Q, R, ſi applicata yz ſtatuatur verticalis reducuntur ad P $= 0$, Q $= 0$ et R $= -1$. His poſitis ex probl. 46, ob $q = b$ et $\omega = \alpha$ motus duabus ſequentibus aequationibus determinabitur: Tab. II. Fig. 38.

I. $\left(\frac{dv}{ds}\right) = 0$; II. $\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - v\,dv - ds\left(\frac{dv}{dt}\right)$

in poſteriori ſumto tempore t conſtante. Ex priori ergo patet celeritatem $\mathfrak{v}$ functionem eſſe temporis t tantum, ideoque $\mathfrak{v} = \Gamma : t$; vnde cum in altera ſola s vt variabilis ſpectetur fiet $d\mathfrak{v} = 0$, et $(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}) = \Gamma' : t$, hincque habebitur:

$$\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - ds\,\Gamma' : t \text{ et integrando:}$$

$$\frac{2gp}{b} = 2g(b - z) - s\Gamma' : t + \Delta : t.$$

Quouis ergo temporis inſtante celeritas aquae in tubo vbique eſt eadem, diuerſo antem tempore vtcunque variabilis eſſe poteſt; a qua variabilitate preſſio p non ſolum maxime pendet, ſed inſuper functionem temporis quamcunque aſſumit: has autem duas functiones in ſe arbitrarias ex circumſtantiis et viribus extrinſecus aquam vrgentibus determinari debere per ſe eſt perſpicuum.

Coroll. 1.

28. Circa motum ergo aquae in tubis aeque amplis hic in genere plus non determinatur, quam quod quouis temporis momento aqua vbique pari celeritate ſecundum tubi tractum moueatur, et quod preſſio p certo quodam modo determinetur.

Coroll. 2.

29. Quaecunque igitur functio temporis t pro celeritate $\mathfrak{v}$ accipiatur, ſemper affirmare licet, eiusmodi motum aquae in tubo aequaliter amplo eſſe poſſibilem, dummodo eiusmodi vires externae adhibeantur,

beantur, quae illi continuae accelerationi ſeu retardationi producendae ſint pares.

Scholion 1.

30. In huius problematis ſolutione vſus ſum methodo priore in probl. 46 expoſita, vnde conueniet quoque ſolutionem ex altera methodo probl. 47 elicere. Ponamus ergo fluidi elementum quod nunc poſt tempus $= t$ in z conſiderauimus initio vbi $t = 0$ fuiſſe in Z exiſtente OX $= X$, XY $= Y$ YZ $= Z$ et arcu IZ $= S$, atque ob $q = Q = b$ et $\omega = \Omega = a$ prior aequatio dat $(\frac{ds}{du}) = 1$ vnde colligitur $s = S + \Gamma : t$, ideoque celeritas aquae in z fit $(\frac{ds}{dt}) = \Gamma' : t$. Altera vero aequatio praebet:

$\frac{2gdp}{b} = -2gdz - ds.\Gamma'' : t$ tempore t ſumto conſtante quae ergo integrata dat:

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h - z) - s\Gamma'' : t + \Delta : t$$

quae cum praecedente prorſus conuenit, niſi quod hic celeritas in z poſt tempus t exprimatur per $\Gamma' : t$ cum ea ante eſſet $\Gamma : t$. Id tantum obiici poſſet; quod cum z et s ſpectari debeant vt functiones binarum variabilium S et t, in poſteriori vero aequatione tempus t conſtans ſit aſſumtum, differentialia dz et ds non completa ſed eae tantum partes accipi debeant, quae ex ſola variabilitate ipſius S oriuntur; hincque viciſſim integralia non abſolute, vti eſt factum, capi debere. Cui dubio vt occurramus, ſit z functio quaecunque binarum variabilium

S et t, vnde fiat $dz = \mathrm{M}\,d\mathrm{S} + \mathrm{N}\,dt$; atque certum eſt in illa aequatione differentiali loco dz ſcribi debere $\mathrm{M}\,d\mathrm{S}$ Verum ob eandem rationem, quod hic tempus t ſumitur conſtans, membri $\mathrm{M}\,d\mathrm{S}$ integrale iterum eſt z, cui quidem functio ipſius t adiungi poſſet, quae autem iam in $\Delta : t$ contineri eſt cenſenda; quod idem de integratione differentialis ds eſt iudicandum.

Scholion 2.

31. Problema igitur propoſitum vt maxime indeterminatum ſpectari debet, cum vires quascunque externas, quibus aqua, dum in tubo mouetur, ſollicitari poteſt, in ſe complectatur, ideoque nunc demum verus eius motus ex his viribus externis penitus determinari debeat. Dum autem aqua in tubo verſatur, aliae vires externae in eam agere nequeant, niſi quibus maſſa aquae in vtroque termino prematur; maſſa ſcilicet aquae certa, quae quouis momento in tubo, cuius extenſio vt indefinita eſt conſideranda, certam longitudinem occupet, eſt ſtatuenda, quae vtrinque ope piſtillorum certis viribus ſollicitetur; quandoquidem durante motu neque nouam aquae molem accedere, neque vsquam effluxum ex tubo concedere velimus, quippe qui caſus peculiarem requirunt euolutionem. Primo ergo ſtatuamus in tubo infinitae longitudinis certam aquae molem continuo moueri, et vtroque termino iugiter certis viribus ſollicitari; et quia tubi curuatura non aliter in computum venit, niſi quatenus inde

inde altitudo z pendet, commoditatis gratia tubum, quaſi eius directrix eſſet linea recta, contemplabor, ſimul pro quouis puncto eius altitudinem ſuper plano horizontali fixo aſſignaturus.

Problema 49.

32. Si certa aquae maſſa in tubo aequaliter amplo continuo moueatur, et vtrinque a viribus quibuscunque vrgeatur, eius motum et preſſionem in ſingulis punctis ad quoduis tempus determinare.

Solutio.

Tubum quomodocunque curuum tanquam in rectum extenſum conſideremus, id tantum annotantes puncti cuiusque z altitudinem ſupra certum planum horizontale eſſe $= z$, quae pro ſingulis punctis vt data eſt concipienda. Iam elapſo tempore t aquae maſſa in tubo occupet ſpatium MN, quod ergo erit conſtantis quantitatis $= l$, ponamusque a puncto tubi fixo A diſtantia $AM = m$, $AN = n$, vt ſit $l = n - m$; eleuatio autem ſuper planum horizontale ſit puncti $M = \mu$, puncti vero $N = \nu$. At iam haec vena aquea MN in M vrgeatur preſſione $= M$, in N vero preſſione $= N$, quae ſint functiones temporis quaecunque datae, celeritas vero huius maſſae aqueae ſit $= v$ qua verſus K promoueatur, et quae eſt functio temporis quaeſita ſupra poſita $v = \Gamma : t$. Si nunc in loco z quouis medio, cuius diſtantia a termino fixo A ſit $Az = s$, preſſio ſtatuatur Tab. II. Fig. 39.

tuatur $= p$, erit $\frac{2gp}{b} = 2g(b-z) - s\Gamma' : t + \Delta : t$. Transferatur hoc punctum z primo in M, tum vero in N et quia in his punctis preſſiones illis ipſis, quibus nunc aqua in his terminis vrgeri aſſumimus, aequales eſſe debent, hinc duas elicimus aequationes:

$$\frac{2gM}{b} = 2g(b-\mu) - m\Gamma' : t + \Delta : t \text{ et}$$

$$\frac{2gN}{b} = 2g(b-\nu) - n\Gamma' : t + \Delta : t$$

quarum haec ab illa ſubtracta relinquit:

$$\frac{2g}{b}(M-N) = 2g(\nu-\mu) + (n-m)\Gamma' : t$$

vnde colligitur $\Gamma' : t = \frac{2g(M-N) - 2gb(\nu-\mu)}{b(n-m)}$ et

$$\Delta : t = \frac{2g(Mn - Nm)}{b(n-m)} - 2gb + \frac{2g(n\mu - m\nu)}{n-m}.$$

Quia autem terminorum M et N eadem eſt celeritas $\mathfrak{v} = \Gamma : t$, iique tempore dt per ſpatiola dm et dn progrediuntur, erit $\frac{dm}{dt} = \mathfrak{v} = \Gamma : t = \frac{dn}{dt}$; vnde fit $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2}$, ita vt ob $n - m = l$ conſtanti celeritas aquae $MN = \frac{dm}{dt}$ perinde ac diſtantia $AM = m$ ex hac aequatione elici debeat:

$$bl.\frac{ddm}{dt^2} = 2g(M-N) - 2gb(\nu-\mu)$$

vbi M et N ſunt functiones datae temporis t at μ et ν quantitates variabiles ab m et n pendentes. Reſoluta autem hac aequatione, qua ad tempus $= t$ locus termini M determinatur, habebitur primo celeritas aqueae venae $MN = \frac{dm}{dt}$, tum vero pro quocunque puncto medio z vt ſit $Az = s$, preſſio p ex hac aequatione definitur:

$$\frac{2gp}{b} = \frac{2g(Mn - Nm)}{bl} + \frac{2g(n\mu - m\nu)}{l} - 2gz - \frac{2gs(M - N)}{bl} + \frac{2gs(\nu - \mu)}{l}$$

quae ergo praebet:

$$p = \frac{Mn - Nm}{l} + \frac{b(n\mu - m\nu)}{l} - bz - \frac{s(M - N)}{l} + \frac{bs(\nu - \mu)}{l} \text{ ſeu}$$

$$p = \frac{M(n - s)}{l} + \frac{N(s - m)}{l} + \frac{b\mu(n - s)}{l} + \frac{b\nu(s - m)}{l} - bz$$

Poſtquam ergo pro dato tempore t inuentus fuerit locus M in tubo ſeu $AM = m$, vnde ſimul celeritas $\frac{dm}{dt}$ innoteſcit, inde pro quouis elemento aquae in ſpatio MN contento preſſio definitur.

Coroll 1.

33. Si venam aqueam vtrinque nulla plane vis vrgeat vt ſit $M = 0$ et $N = 0$ eius motus ex hac aequatione debet determinari $bl.\frac{ddm}{dt^2} = -2gb(\nu - \mu)$ ſeu $\frac{ddm}{dt^2} + \frac{2g}{l}(\nu - \mu) = 0$ tum vero preſſio erit

$$p = \frac{b\mu(n - s) + b\nu(s - m)}{l} - bz.$$

Coroll 2.

34. Sin autem binae preſſiones M et N inter ſe fuerint aequales, tum prior quidem aequatio differentio-differentialis manet eadem, altera vero parumper diſcrepat:

$$p = M + \frac{b\mu(n - s) + br(s - m)}{l} - bz$$

ita vt haec preſſio illam conſtanter ſuperet quantitate M.

Coroll 3.

35. Totum negotium ad aequationem differentialem ſecundi gradus reducitur, quae etiamſi preſſiones M et N ſint inaequales, ideo tamen non fit ſolutu difficilior ſed tota difficultas reſidet in altitudinibns μ et ν, quippe quae per *m* determinantur.

Scholion.

36. Caſus coroll 1. quo preſſiones M et N euaneſcentes fecimus, nonniſi in vacuo locum habere poteſt, quando enim motus fit in aëre, vena aquea in vtroque termino a pondere atmoſphaerae premitur et quidem pari vi, niſi ambo termini ad altitudines maxime differentes pertingant. Quare ſi vena in vtroque termino fuerit libera et aperta in coroll 2. littera M denotabit preſſionem atmoſphaerae quae cum fere aequiualeat columnae aqueae 33 pedes altae ſi pro hac altitudine ſcribamus *k* erit $M = bk$, et quia hic perpetuo de aqua eſt ſermo preſſiones etiam per columnas aqueas exprimi conueniet, vnde denſitatem aquae *b* vnitati aequalem ſtatuamus. Quocirca preſſionem in aquae vena habebimus:

$$p - k \quad \sim - \frac{\mu(n-s) + \nu(s-m)}{l}.$$

Maximi autem momenti eſt preſſionem atmoſphaerae *k* in calculum introducere, etiamſi non ſentiatur; ea enim omiſſa ſaepe fieri poſſet, vt preſſio *p* euaderet negatiua, neque tamen continuitas fluidi ſoluatur; quod tamen ſemper euenire debet, vbi preſſio reuera fit

ſit negatiua. Atmoſphaerae autem ratione habita motus inuentus durare poteſt, quamdiu preſſio p tum non ſit negatiua; ea autem negatiua euadente continuitas certe ſoluitur; niſi forte ob cohaeſionem ſeu potius aetheris preſſionem contineatur.

Exemplum 1.

37. *Si tubus fuerit rectus et ad horizontem vtcunque inclinatus, motum venae aqueae* M N *vtrinque apertae in eo definire.* Sit inclinatio tubi AK ad horizontem $= \eta$, et vena aquea in eo ſurſum moveatur impetu ſcilicet accepto; ſin autem velimus vt deſcendat, angulum η negatiuum capi oportet. Hinc ergo erunt altitudines ſuper plano horizontali $\mu = m$ ſin. η, $z = s$ ſin. η et $\nu = (l + m)$ ſin. η, vnde prima aequatio fit $\frac{ddm}{dt^2} + 2g$ ſin. $\eta = 0$; hincque celeritas $\frac{dm}{dt} = 2g(f - t$ ſin. $\eta)$, exiſtente $2gf$ celeritate initiali. At porro prodit $m = g(2ft - tt$ ſin. $\eta)$, ſiquidem initio vena occupauerit tubi portionem A B. Iam in loco quouis z ob $\mu(n - s) = m(m + l - s)$ ſin. η et $\nu(s - m) = (m + l)(s - m)$ ſin. η erit preſſio $p = k - z + s$ ſin. $\eta = k$ ideoque ſemper et vbique preſſioni atmoſphaerae aequalis. Hinc patet venam aqueam in tubo perinde moueri ac corpus ſolidum ſiue aſcendendo ſiue deſcendendo.

Exemplum 2.

38. *Si tubus* A B C D *fuerit recuruatus, vt duo habeat brachia verticalia* A B *et* D C *medio* B C Tab. II. Fig. 40.

 exiſtente

exiſtente horizontali, in eoque vena aquea M B C N *ita moueatur, vt eius termini* M *et* N *in brachiis verticalibus ſemper haereant, hunc motum determinare.* Elapſo tempore $= t$ occupet vena aquea ſpatium tubi M B C N, vt ſit $MB + BC + CN = l$, ſeu ducta horizontali E F ita vt ſit $BE = CF = \frac{1}{2}(BM + CN)$ erit $l = BC + 2BE$. Tum poſito $AM = m$ erit $\mu = BM$ et $\nu = CN$, hinc $\nu - \mu = CN - BM = -2ME$. Statuatur $AE = E$ et $ME = x$ erit $m = e - x$, vnde prima aequatio dat $-\frac{ddx}{dt^2} - \frac{4g}{l}x = 0$ ſeu $ddx + \frac{4g}{l}x\,dt^2 = 0$ quae per $2dx$ multiplicata praebet integrando $dx^2 + \frac{4g}{l}xx\,dt^2 = \frac{4g}{l}aa\,dt^2$, hincque

$$2dt\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{dx}{\sqrt{(aa - xx)}} \text{ et } 2(t + b)\sqrt{\frac{g}{l}} = \text{Ang. ſin. } \frac{x}{a}$$

ita vt iam ſit

$$x = e - m = a\,\text{ſin. } 2(t + b)\sqrt{\frac{g}{l}}$$

et celeritas in M deorſum tendens $= -\frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}}\text{coſ. } 2(t+b)\sqrt{\frac{g}{l}}$. Cum ergo in E peruenit erit eius celeritas $= \frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}}$ ſi tum fieri ponamus $2(t + b)\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi$, vnde cum motus initium vbi lubuerit conſtitui queat, faciamus $e = a$, ſitque

$m = AM = a(1 - \text{coſ. } 2t\sqrt{\frac{g}{l}})$ vt ſit $\frac{dm}{dt} = \frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}}\text{ſin. } 2t\sqrt{\frac{g}{l}}$

ita vt motus initio fuerit $m = 0$ ſeu $EM = EA$ et celeritas $= 0$. Vena aquea ergo motu oſcillatorio feretur, cuius excurſiones maximae ſupra et infra horizontalem E F erunt $= a$, et terminus M ab altitudine maxima ad minimam perueniet tempore

$t =$

$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{2\sqrt{g}}$, ſicque hic motus conueniet cum oſcillationibus penduli ſimplicis cuius longitudo $= \frac{1}{2}l = BE + \frac{1}{2}BC$. His inuentis in loco quocunque z vt ſit $Az = s$ preſſio erit

$$p = k - Bz + \frac{BM(Bz + BC + CN)}{l} + \frac{CN.Mz}{l} \text{ ſeu}$$

$$p = k + Mz - \frac{2ME.Mz}{l}$$

vbi Mz in priori loco denotat profunditatem puncti z infra M at in poſteriori loco diſtantiam in tubo a termino M. Quare in brachio horizontali erit preſſio

in $z' = k + BN - \frac{2ME(MB + Bz')}{l}$ et

in $z'' = k + BM - Cz'' - \frac{2ME(MB + BC + Cz'')}{l} = k + Nz'' + \frac{2ME.Nz''}{l}$.

Coroll. 1.

39. Cum ergo fluidum inter oſcillandum in horizontalem EF pertingit, ob $ME = 0$, preſſio in z erit $= k + Ez$, denotante Ez profunditatem puncti z infra lineam EF. Hinc ſi tubi pars BC non ſit recta ſed ſurſum inflexa, eius eleuatio ſuper EF maior eſſe nequit quam k, quia tum preſſio ibi fieret negatiua et fluidi continuitas ſolueretur.

Coroll. 2.

40. Si ergo tubus habeat figuram ABOCD, Tab. II. cuius brachia AB et DC ſint verticalia, medium Fig. 41. autem BOC ſurſum ſupra horizontalem EF in-

 flexum

flexum aequaliter vtrinque vt ſit $EB + BO = \frac{1}{2} l$, preſſio in ſummo puncto O erit $= k - OP + ME - \frac{2ME(OB+MB)}{l} = k - OP + ME - \frac{ME(MB+BO)}{EB+BO} = k - OP - \frac{ME.ME}{EB+BO}$. Ne ergo continuitas fluidi ſoluatur, non ſufficit vt ſit $OP < k$, ſed oportet eſſe $OP < k - \frac{ME^2}{EB+BO}$.

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. 42. 41. *Conſtet tubus aequaliter amplus duobus ramis rectis* A B *et* B C *ad horizontem* E F *vtcunque inclinatis, ramus autem* B C *ſuperne in* C *ſit clauſus et aëre vacuus, in hocque tubo moueatur vena aquae* M B N *datae longitudinis, eius motum definire.*

Sit angulus $ABE = \varepsilon$ et angulus $CBF = \zeta$, longitudo venae $MB + BN = l$, et $AM = m$; in M ergo aqua premitur ab atmoſphaera vt ſit $M = k$, in N vero nulla eſt preſſio, vt ſit $N = 0$, tum vero ex ſolutione problematis eſt $\mu = M\mu$ et $\nu = N\nu$, vnde denſitate aquae poſita $= 1$ habetur haec aequatio

$$l. \frac{ddm}{dt^2} = 2gk - 2g(N\nu - M\mu)$$

ac pro tubi loco quocunque z erit preſſio

$$p = \frac{k(l+m-Az)}{l} + \frac{M\mu(l+m-Az)}{l} + \frac{N\nu(Az-m)}{l} - zp \text{ ſeu}$$

$$p = \frac{k(l-Mz)}{l} + \frac{M\mu(l-Mz)}{l} + \frac{N\nu. Mz}{l} - zp$$

at pro puncto z' in altero ramo

$$p = \frac{k(l-BM-Bz')}{l} + \frac{M\mu(l-MB-Bz')}{l} + \frac{N\nu(MB+Bz')}{l} - z'p'$$

Ad

Ad hunc calculum expediendum vocemus B M $= x$ vt ſit B N $= l - x$ eritque M $\mu = x$ ſin. ε et N ν $= (l-x)$ ſin. ζ; vnde aequatio differentialis erit

$$l. \frac{ddx}{dt^2} + 2g(k + x \text{ſin.}\varepsilon - (l-x)\text{ſin.}\zeta) = 0$$

quae per $2\,dx$ multiplicata et integrata praebet:

$$l. \frac{dx^2}{dt^2} + 2g(2kx + xx\text{ſin.}\varepsilon + (l-x)^2 \text{ſin.}\zeta) = 2gff.$$

Quare celeritas venae $\frac{dm}{dt} = -\frac{dx}{dt}$; ſiquidem eam verſus C ferri ponamus erit

$$\frac{-dx}{dt} = \sqrt{\tfrac{2g}{l}}\,(ff - 2kx - xx\,\text{ſin.}\varepsilon - (l-x)^2\,\text{ſin.}\zeta) \text{ ſeu}$$

$$\frac{-dx}{dt} = \sqrt{\tfrac{2g}{l}}(ff - ll\text{ſin.}\zeta - 2kx + 2lx\,\text{ſin.}\zeta - xx(\text{ſin.}\varepsilon + \text{ſin.}\zeta))$$

vnde intelligimus celeritatem euaneſcere, cum fuerit

$$x = \frac{-k + l\,\text{ſin.}\zeta \pm \sqrt{(kk - 2kl\,\text{ſin.}\zeta - ll\,\text{ſin.}\varepsilon\,\text{ſin.}\zeta + ff(\text{ſin.}\varepsilon + \text{ſin.}\zeta)}}{\text{ſin.}\varepsilon + \text{ſin.}\zeta}$$

maxima autem fiet vbi $x = \frac{-k + l\,\text{ſin.}\zeta}{\text{ſin.}\varepsilon + \text{ſin.}\zeta}$; haecque celeritas maxima erit $= \sqrt{\tfrac{2g}{l}}\left(ff + \frac{kk - 2kl\,\text{ſin.}\zeta - ll\,\text{ſin.}\varepsilon\,\text{ſin.}\zeta}{\text{ſin.}\varepsilon + \text{ſin.}\zeta}\right)$.

Pro tempore vero habebimus:

$$dt\sqrt{\tfrac{2g}{l}} = \frac{-dx}{\sqrt{(ff - ll\,\text{ſin.}\zeta - 2kx + 2lx\,\text{ſin.}\zeta - xx(\text{ſin.}\varepsilon + \text{ſin.}\zeta))}}$$

vnde integrando colligimus:

$$x = \frac{-k + l\,\text{ſin.}\zeta + \text{coſ.}\lambda t.\sqrt{(ff(\text{ſin.}\varepsilon + \text{ſin.}\zeta) + kk - 2kl\,\text{ſin.}\zeta - ll\,\text{ſin.}\varepsilon\,\text{ſin.}\zeta)}}{\text{ſin.}\varepsilon + \text{ſin.}\zeta}$$

exiſtente $\lambda = \sqrt{\tfrac{2g}{l}}\,(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,\zeta)$.

Quodſi iam pro tubi puncto z ponamus B $z = z$ erit preſſio ibidem

$$p = \frac{(k + x\,\text{ſin.}\varepsilon)(l - x + z)}{l} + \frac{(l + x)\,\text{ſin.}\zeta}{l}(x - z) - z\,\text{ſin.}\,\varepsilon.$$

At pro puncto z' in altero ramo B C ponendo B $z' = z'$ erit

$$p' = \frac{(k + x\,\text{ſin.}\varepsilon\,(l - x - z')}{l} + \frac{(l - x)\,\text{ſin.}\zeta}{l}(x + z') - z'\,\text{ſin.}\,\zeta.$$

Illo

Illo caſu erit ſuccinctius $p = \frac{(k + x(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,\zeta))(l - x + z)}{l}$ $- z(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,\zeta)$ hoc vero $p' = \frac{(k + x(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,\zeta))(l - x - z')}{l}$.

Coroll. 1.

Tab. III. Fig. 43. 42. Sit tubi brachium A B horizontale et B C verticale hincque $\varepsilon = 0$ et $\zeta = 90°$. Vnde fit celeritas in M $= \sqrt{\frac{2g}{l}(ff - ll - 2kx + 2lx - xx)}$. Ponamus initio totam venam tubum horizontalem A B occupaſſe, ibique quieuiſſe, vt ſit A B $= l$, neceſſe ergo eſt, vt poſito B M $= x = l$ celeritas euaneſcat, ſumique debeat $ff = 2kl$; vnde cum vena in ſitum M B N peruenerit erit celeritas $= \sqrt{\frac{2g}{l}(l - x)(2k - l + x)}$; et quando tota vena in tubum verticalem peruenit, quod fit ſi $x = 0$, eius celeritas qua aſcendere perget erit adhuc $= \sqrt{\frac{2g}{l}(2k - l)}$. Dum ergo longitudo venae minor ſit quam $2k$, tota vena in tubum verticalem aſcendit, ſiquidem fuerit altior quam $2k$.

Coroll. 2.

43. Sumto autem $ff = 2kl$ et $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{l}}$, aequatio bis integrata fit: $x = -k + l + k\,\text{coſ.}(\lambda t + \gamma)$. Vnde cum initio fuerit $x = l$, angulus conſtans γ euaneſcit, vt ſit $x = l - k(1 - \text{coſ.}\,\lambda t)$. Tempus ergo quo tota vena in tubum verticalem intrat, hinc definiri debet $1 - \text{coſ.}\,\lambda t = \frac{l}{k}$ ſeu $\lambda t =$ Ang. coſ. $(1 - \frac{l}{k})$. Quare ſi $l = k$ erit $t = \frac{\pi}{2\lambda} = \frac{\pi \sqrt{l}}{2\sqrt{2g}}$ ſin autem ſit $l = 2k$ fit $t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$.

Scho-

Scholion.

44. Nihil impedit quo minus pro aqua mercurium ſubſtituamus, ac tum k erit altitudo mercurii in barometro; atque hinc oſcillationes mercurii in barometro definire poterimus, ſi ipſi infra adiunctus ſit tubus horizontalis B A eiusdem amplitudinis. Ponamus ergo in ſtatu aequilibrii altitudinem $BK = k$ et $BE = e$, vt ſit tota vena mercurialis $l = e + k$. Facta iam quadam agitatione, ſit vena in ſtatu M B N exiſtente $BM = x$ et $EM = x - e$ atque celeritas mercurii in tubo aſcendentis erit: Tab. III. Fig. 44.

$$-\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(ff - ll - 2kx + 2lx + xx)},$$

quam poſito $x = a = BA$ euanuiſſe ponamus, ita vt ſtatui debeat $ff = (l-a)^2 + 2ak$ quo facto erit celeritas $= \sqrt{\frac{2g}{l}(a-x)(2k - 2l + a + x)}$.

Statuamus $EA = c$; $EM = y$, vt ſit $a = c + e$; $x = e + y$, et ob $l = e + k$ erit haec celeritas:

$$-\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{e+k}(c-y)(c+y)} = \sqrt{\frac{2g(cc-yy)}{e+k}}$$

vnde colligimus $\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}} = \frac{-dy}{\sqrt{(cc-yy)}}$ et integrando

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}} = \text{Ang. coſ.}\frac{y}{c}. \text{ ſeu } y = c\,\text{coſ.}\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}}.$$

Quare mercurius in barometro circa ſtatum aequilibrii K k oſcillationes peraget, tempore cuiusque exiſtente $= \frac{\pi\sqrt{(e+k)}}{\sqrt{2g}}$, ſeu eae erunt iſochronae pendulo, cuius longitudo eſt $= e + k$.

Problema 50.

Tab. III. Fig. 45. 45. Si aqua in tubo aequaliter amplo ita moveatur, vt in altero termino effluat, in altero vero continuo ſuccedente prematur a vi quacunque, hunc motum effluxus et preſſionem in ſingulis elementis aquae determinare.

Solutio.

Quamcunque tubus habuerit figuram, is tanquam in directum extenſus $A\,a\,O\,o$ conſideretur; cui adiungatur ſcala altitudinum $\alpha\,\omega$, cuius applicatae $z\,\pi$ exhibent cuiusque tubi puncti z altitudinem ſuper dato plano horizontali. Iam elapſo tempore t aqua effluat per tubi orificium $O\,o$ celeritate $= \mathfrak{v}$, qua ſimul tota fluidi maſſa, quae adhuc eſt in tubo ſuccedat. Occupet autem iam aqua tubi partem $M\,O$ et in $M\,m$ vrgeatur vi exprimenda per altitudinem $= M$. In O autem vbi aqua effluit in aërem alia preſſio locum habere nequit, niſi atmoſphaerae, quae aequiualens ſtatuatur columnae aqueae, altitudinis $= k$. Pertigerit initio aqua vsque ad A et ponatur longitudo $A\,O = a$, atque nunc ſit $A\,M = m$, functio temporis t, ex qua definitur celeritas $\mathfrak{v} = \frac{d\,m}{d\,t}$. Iam quoduis aquae elementum in z conſideretur, cuius altitudo ſupra planum horizontale ſit $z\,\pi = z$ et poſita denſitate aquae $= 1$, et preſſione in $z = p$, tum vero diſtantia $A\,z = s$, ex probl. 48. hanc nanciſcimur aequationem

$$2gp = 2g(b-z) - s\Gamma' : t + \Delta : t$$

vbi eſt $\Gamma : t = \upsilon = \frac{dm}{dt}$, ideoque $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2}$; eſt enim diſtantia $AM = m$ et celeritas υ functio temporis t tantum. Transferamus nunc primo punctum z in M, vbi cum preſſio ſit data $= M$ ob $s = m$ habebimus:

$$2gM = 2g(b - M\mu) - m\Gamma' : t + \Delta : t$$

deinde transferamus punctum z in orificium O ponendo $s = a$, vbi cum preſſio pariter ſit cognita $= k$ erit

$$2gk = 2g(b - O\omega) - a\Gamma' : t + \Delta : t.$$

Ex his aequationibus colligimus primo

$$2g(M-k) = 2g(O\omega - M\mu) + (a-m)\Gamma' : t$$

ideoque $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2} = \frac{2g(M - k + M\mu - O\omega)}{a-m}$

tum vero cum ſit

$$2g(M-p) = 2g(z - M\mu) + (s-m)\Gamma' : t \text{ erit}$$

$$M - p = z - M\mu + \frac{(s-m)(M - k + M\mu - O\omega)}{a-m}$$

ſeu $p = \frac{M(a-s) + k(s-m) + M\mu(a-s) + O\omega(s-m)}{a-m} - z$

vel $p = \frac{(M + M\mu)(a-s) + (K + O\omega)(s-m)}{a-m} - z$

vel etiam $p = \frac{Oz(M + M\mu) + Mz(k + O\omega)}{MO} - z.$

Totum ergo negotium ab illa aequatione differentio-differentiali pendet.

Coroll. I.

46. Si preſſio in M fuerit vel conſtans vel a ſpatio $AM = m$ pendens, quoniam altitudo $M\mu$

ab eodem pendet et O ω eſt conſtans, aequatio differentio-differentialis per $2\,dm$ multiplicata fit integrabilis reddens:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{M - k + M\mu - O\omega}{a - m}\,dm$$

qua forma quadratum celeritatis exprimitur.

Coroll. 2.

47. Si effluxus fieret in ſpatium ab aëre vacuum, perſpicuum eſt in noſtris formis ſcribi debere $k = 0$; ac ſi in M aqua nullam aliam vim praeter preſſionem atmoſphaerae ſuſtineat, erit $M = k$. Quare ſi aqua vtrinque aëri pateat erit $M = k$ et $\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{M\mu - O\omega}{a - m}\,dm$ et pro preſſione in z fiet $p = k - z + \frac{Oz.\,M\mu + Mz.\,O\omega}{MO}$.

Exemplum 1.

Tab. III. Fig. 46. 48. *Sit tubus rectus* A O *vtcunque inclinatus ad horizontem, qui initio ab* O *ad* A *vsque fuerit aqua plenus, indeque per orificium* O o *effluat, hunc motum determinare.*

Poſito angulo $AOE = \varepsilon$, ob $MO = a - m$ erit altitudo $M\mu = (a - m)\,\text{ſin.}\,\varepsilon$ et $O\omega = 0$. Quare cum ſit $M = k$, fiet $\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int dm\,\text{ſin.}\,\varepsilon = 4gm\,\text{ſin.}\,\varepsilon$, quia facto $AM = m = 0$ motus a quiete incepiſſe ponitur. Hinc igitur porro fit $\frac{dm}{\sqrt{m}} = 2\,dt\sqrt{g}\,\text{ſin.}\,\varepsilon$, et integrando $\sqrt{m} = t\sqrt{g}\,\text{ſin.}\,\varepsilon$; vnde concludimus aquam omnem e tubo effluxuram eſſe tempore $= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g\,\text{ſin.}\,\varepsilon}}$; quod tempus conuenit cum

eo,

eo, quo corpus graue ſuper plano inclinato A O eſſet deſcenſurum.

In puncto z vero eſt preſſio $p = k - z\pi + \frac{Oz \cdot M\mu}{MO}$, cum autem ſit $MO : M\mu = Oz : z\pi$ ſit $p = k$, ſeu per totam venam M O preſſio eſt eadem ſcilicet atmoſphaerae, quae vulgo nulla reputatur.

Exemplum 2.

49. *Si vt ante ex tubo inclinato recto* A O *aqua non in aërem ſed in ſpatium vacuum effluat, hunc motum determinare.*

Manente angulo $AOE = \varepsilon$, et $AM = m$ $AO = a$, eſt $M\mu = (a - m)$ ſin. ε et $O\omega = o$, tum vero $M = k$ et quod ante eſt k hic eſt $= o$, ſicque habebimus:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int \frac{k + (a - m)\,\text{ſin.}\,\varepsilon}{a - m}\, dm = 4gk\,l\frac{a}{a - m} + 4gm\,\text{ſin.}\,\varepsilon$$

vt ſcilicet poſito $m = o$, motus a quiete inceperit: ex quo ſequitur facto $m = a$ extremam guttulam celeritate infinita expulſum iri quod non adeo abſurdum eſt putandum, cum de vltimo quaſi ſtrato infinite tenui intelligi debeat, cui ſtatim atque minima craſſities tribuitur, celeritas admodum fit modica. Ipſum autem tempus hinc nonniſi appropinquando definiri poteſt, cum ſit

$$2t\sqrt{g} = \int \frac{dm}{\sqrt{(k\,l\frac{a}{a + m} + m\,\text{ſin.}\,\varepsilon)}}$$

neque vllo caſu ſiue inclinatio ε euaneſcat, ſiue in angulum rectum abeat. Deinde vero ſumto $Az = s$ erit preſſio

$$p = \frac{k.Oz}{MO} + \frac{Oz.M\mu}{MO} - z\pi = \frac{k(a-s)}{a-m}.$$

Pro caſu autem quo tubus AO ſitum tenet horizontalem, et $\varepsilon = 0$; ſi ponamus $l\frac{a}{a-m} = \frac{x}{a}$, fit $m = a(1 - e^{-\frac{x}{a}})$ hincque $\frac{2t\sqrt{gk}}{\sqrt{a}} = \int e^{\frac{-x}{a}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, vnde approximando colligitur:

$$\frac{t\sqrt{gk}}{\sqrt{ax}} = e^{-\frac{x}{a}}(1 + \frac{2}{3}.\frac{x}{a} + \frac{2.2}{3.5}.\frac{x^2}{aa} + \frac{2.2.2}{3.5.7}.\frac{x^3}{a^3} + \text{etc.})$$

pro motus ergo initio, vbi x valde paruum et $m = x - \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{6aa} - \text{etc.}$

$$\text{fit } \frac{t\sqrt{gk}}{\sqrt{ax}} = (1 - \frac{x}{a} + \frac{xx}{2aa} - \text{etc.})(1 + \frac{2}{3}.\frac{x}{a} + \frac{2.2}{3.5}.\frac{x^2}{aa})$$

$$\text{ſeu } t = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{gk}}(1 - \frac{1}{3}.\frac{x}{a} + \frac{1}{10}.\frac{xx}{aa}).$$

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. 47. 50. *Conſtet tubus aequaliter amplus* ABO *duobus brachiis rectis altero horizontali* AB, *altero verticali* BO *deorſum verſo, qui cum initio fuiſſet plenus, aqua per orificium* Oo *effluere coeperit, eius motum determinare, et preſſionem in ſingulis locis.*

Sit longitudo brachii horizontalis $AB = b$, et verticalis $BO = c$ ideoque $a = b + c$. Cum igitur tempore t aqua ex A in M profluxerit exiſtente $AM = m$, ob preſſionem in $M = k$, perinde ac in O, erit celeritatis in M quadratum:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{c\,dm}{a-m} = 4gc\,l\frac{a}{a-m}$$

vnde

vnde fit $2\,dt\,\surd gc = \frac{dm}{\surd l \frac{a}{a-m}}$, vbi eadem occurrit difficultas integrationis atque in exemplo praecedente.

Preſſio autem in puncto quouis z tubi horizontalis erit

$$p = k - c + \frac{(c + BZ)c}{a-m} = k - \frac{c.MZ}{a-m} = k - \frac{BO.MZ}{BM+BO}$$

ſicque in angulo B erit preſſio $= k - \frac{BM.BO}{BM+BO}$ minima.

At ſumto z' in tubo verticali preſſio ibi erit

$$p' = k - Oz' + \frac{Oz'.BO}{BM+BO} = k - \frac{Oz'.BM}{BM+BO}.$$

Motus autem initium in A reſpondet vi acceleratrici $= \frac{c}{a}$ grauitate per vnitatem expreſſa.

Coroll. 1.

51. Initio ergo motus, dum ambo tubi erant pleni, preſſio in B eſt omnium minima; atque adeo negatiua fieri poteſt, ſi vterque ramus maior quam k; quod ſi euenerit continuitas in B rumpitur, et aqua per tubum verticalem celerius deſcendit, quam reliqua per tubum horizontalem ſequi poteſt.

Exemplum 4.

52. *Sit tubus rectus verticalis ſupra in A hermetice clauſus infra apertus, at altior preſſione atmoſphaerae* k, *qui ſi initio fuerit plenus, deſcenſum fluidi definire.* Tab. III. Fig. 48.

Tem-

Tempore t deſcenderit fluidum per $AM = m$, exiſtente altitudine $AO = a > k$, et quia ſupra Mm erit vacuum, fiet $M = 0$ vnde celeritatis deſcenſus in M quadratum fit

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{-k+a-m}{a-m}dm = 4g\left(m - kl\frac{a}{a-m}\right).$$

Quare cum celeritas initio vbi $m = 0$ fuerit nulla, ea maxima fiet, vbi $m = a - k$ ſeu $OM = k$, quo caſu erit $\frac{dm}{dt} = 2\sqrt{g\left(a - k - kl\frac{a}{k}\right)}$ dehinc vero iterum decreſcet et euaneſcet vbi fit $kl\frac{a}{a-m} = m$. Ponamus altitudinem a valde parum excedere k, eſſeque $a = k + \omega$ et celeritas maxima fiet $= 2\sqrt{g\left(\omega - kl\left(1 + \frac{\omega}{k}\right)\right)} = 2\omega\sqrt{\frac{g}{2k}}$ reſpondens ſpatio $AM = \omega$. Iterum autem celeritas euaneſcet vbi erit $k\left(\frac{m}{a} + \frac{mm}{2aa}\right) = m$ ſeu $m = 2\omega$ propius vero reperitur:

$$m = 2\omega - \frac{2\omega^2}{3k} + \frac{4\omega^3}{9kk} - \frac{44\omega^4}{135k^3} + \text{etc.}$$

Preſſio tandem in quouis loco z erit

$$p = \frac{Oz.MO + Mz.k}{MO} - Oz = \frac{k.Mz}{MO}.$$

Problema 51.

53. Si aqua in tubo aequaliter amplo ita moueatur, vt in altero eius termino Oo effluat, in altero vero Aa continue aliunde affluat data vi propulſa, hunc aquae per tubum propulſae motum definire.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 49. Tubum igitur vtcunque curuatum AO hic conſidero, in cuius orificium Aa aqua continuo intru-

intruditur vi quacunque per altitudinem L expreſſa quae vel vt conſtans, vel functio temporis t ſpectari poteſt, cuiusmodi continua aquae intruſio et propulſio ope antliarum effici ſolet, quarum vi ex loco inferiori A in altiorem O eleuatur, ibique effunditur. Quamobrem tubi terminum A in imo loco poſitum ſumo, a quo ducta horizontali A ω, ſingulorum punctorum tubi z altitudines ſuper ea aeſtimo, ita vt ſupremi orificii O o, vbi aqua expellitur altitudo ſit Oa. Poſita ergo pro puncto quouis z longitudine tubi $Az = s$ et altitudine $\pi z = z$, ſit elapſo tempore $= t$ celeritas aquae in tubo $= \upsilon$, qua ſimul in O o effluit, et quae eſt functio temporis t quam in probl. 48. poſui $\upsilon = \Gamma : t$ tum vero denotante p preſſionem in z, quam etiam ad aquam referamus vt ſit $b = 1$, hanc inuenimus aequationem

$$2gp = 2g(b-z) - s\Gamma' : t + \Delta : t$$

dum ſcilicet ſumimus aquam in tubo a termino A ad terminum O progredi, atque in hac aequatione vniuerſa motus ratio continetur. Eam ergo ad caſum oblatum accommodari oportet has conditiones implendo, vt et in A ſit preſſio data $= L$, et in $O = k$, denotante k altitudinem columnae aqueae atmoſphaerae aequiponderantis. Punctum z indefinitum primum ad orificium A transferamus quo fit $s = 0$, $z = 0$ et $p = L$, ideoque

$$2gL = 2gb + \Delta : t$$

Deinde eodem ad orificium O translato, vbi fit $s = AO$, $z = O\omega$ et $p = k$, habebimus:

$$2gk = 2g(h - O\omega) - AO.\Gamma' : t + \Delta : t$$

vnde colligimus

$$2g(L - k) = 2g.O\omega + AO.\Gamma' : t$$

ita vt ſit:

$$\Gamma' : t = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{2g(L - k - O\omega)}{AO}.$$

Tum vero pro preſſione in loco indefinito fiet

$$2g(L - p) = 2gz + \frac{2gs(L - k - O\omega)}{AO} \text{ ſeu}$$

$$p = L - z - \frac{s(L - k - O\omega)}{AO}.$$

Statuamus nunc totam tubi longitudinem $AzO = l$ et orificii Oo altitudinem $O\omega = a$, ac primo pro celeritate $\mathfrak{v}$ obtinuimus $\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{2g(L - K - a)}{l}$, ſicque integrando $\mathfrak{v} = \frac{2g}{l}(\int L\,dt - (a + k)\,t)$, deinde vero pro preſſione in quouis loco tubi z erit

$$p = L - z - \frac{s(L - k - a)}{l}.$$

Coroll. 1.

54. Quodſi ergo vis propellens L fuerit conſtans et $= a + k$ acceleratio aquae in tubo euaneſcit, ideoque eius fluxus per tubum erit vniformis, quanta autem ſit futura eius celeritas ex his principiis non definitur, ſed ex natura virium impellentium concludi debet.

Coroll. 2.

55. Sin autem vis propellens L perpetuo maior eſſet quam $a + k$, aquae per tubum propulſae celeritas continuo augeretur, ſin autem minor eſſet con-

continuo diminueretur. Neque ergo hinc quicquam certi circa aquae celeritatem dato tempore effuſam ſtatui poteſt.

Scholion I.

56. Quantumuis hoc paradoxum atque adeo experientiae contrarium videatur, tamen hypotheſi qua ſtatuimus, preſſionem in A perpetuo eadem vi aquam propulſare, quaecunque fuerit eius celeritas, prorſus eſt conſentanea, ac ſi tales vires applicare liceret, nullum eſt dubium, quin etiam hic effectus reuera ſit ſecuturus. Quare cum hoc in praxi minus eueniat, iudicandum eſt, vires quae ad aquam propulſandam adhiberi ſolent, neutiquam eius eſſe indolis, vt eadem preſſione agant, quacunque celeritate aqua progrediatur. Satis autem ſuperque conſtat, omnes vires, quae ab hominibus, animalibus, aquae fluxu et vento peti ſolent, ita eſſe comparatas, vt aucta celeritate debilitentur, ac tandem euaneſcant. Quantacunque enim ſit huiusmodi vis obiecto quieſcenti applicata, ſtatim atque hoc obiectum mouetur, ea minor euadit, quare tales vires non abſolute definire licet, ſed earum quantitas pro quouis celeritatis gradu quo agunt, ſeorſim debet determinari. Ita ſi ponamus machinae, qua aqua per tubum propellitur, eiusmodi vim eſſe applicatam quae dum celeritate $= c$ operatur, aequalis ſit ponderi aquae cuius volumen ſit $= V$: atque machinam ita eſſe inſtructam, vt perpetuo hac celeritate $= c$ agat id quod ſemper ope rotarum fieri poteſt. Cum

iam in noſtro caſu preſſio in A altitudine $= L$ exprimatur, ſi amplitudinem tubi ſtatuamus $= \omega$, aequabitur ea ponderi voluminis aquae $= L\omega$, quae vt a vi illa V celeritate c mota producatur, illius celeritas hinc determinatur, ſcilicet ſi vim $L\omega$ celeritate υ aquam propellere ſumamus, oportet ſit $L\omega\upsilon = Vc$, hincque $\upsilon = \frac{Vc}{L\omega}$. Vt autem aqua hoc motu vniformiter propellatur, vidimus eſſe debere $L = a + k$, vbi quidem preſſionem atmoſphaere k omittere poſſumus, qui eadem quoque vim in A comitatur, ita vt ſufficiat ſtatui $L = a$, ex quo perſpicuum eſt aquam per tubum propulſum iri celeritate $\upsilon = \frac{Vc}{a\omega}$.

Scholion. 2.

57. Cum hic non vis principalis ſollicitans ſola V, ſed in celeritatem c qua agit ducta incomputum ingrediatur, hoc productum Vc, quod in omnium machinarum effectu determinando, maxime debet ſpectari, peculiarem denominationem meretur, et propterea *actio* a me eſt vocatum, ita vt *actio* ſit productum cuiusque vis per celeritatem qua agit multiplicata, vbi imprimis eſt obſeruandum, dum in machinis vires vel intenduntur, vel minuuntur, celeritatem ſemper in ratione inuerſa mutari, vt *actio* eadem maneat. Sic ſi per machinam vis principalis V in alium locum translata abeat in V', celeritas qua haec operatur erit $= \frac{Vc}{V'}$, ac ſi tum celeritas actionis ſit $= c'$, vis erit $V' = \frac{Vc}{c'}$.

Machi-

Machinarum ſcilicet vſus praecipuus in hoc conſiſtit vt ſeruata eadem *actione* vis ſollicitantis, vel vis vel celeritas ad lubitum immutetur. Ita in caſu problematis, quo opus erat vi $= a\,\omega$ ad aquam per tubum A O propellendam, ſi vis principalis machinam mouens ſit $= V$ cum celeritate $= c$ coniuncta, machinam ita inſtructam eſſe oportet, vt in translatione vis ad locum A vbi aqua in tubum intruditur, vis fiat $= a\,\omega$ et quia tum eius celeritas neceſſario fit $v = \frac{Vc}{a\omega}$, hinc celeritas aquae per tubum propulſae ſponte determinatur. Si forte ob machinae ſtructuram vis vrgens in A, quam poſuimus $= L\,\omega$ maior extaret quam $a\,\omega$, celeritas actionis in eadem ratione imminueretur, verum ob $L > a$ motus aquae accelleraretur: tum ergo vis principalis maiorem obtineret celeritatem, hincque eius quantitas ipſa V diminutionem pateretur ex quo prout eius *actio* increſcat vel decreſcat, deinceps cum motus ad vniformitatem fuerit perductus celeritas aquae per tubum propulſae definiri debet.

Scholion. 3.

58. Omnium autem virium quae ad machinas agitandas adhiberi ſolent, ratio ita eſt comparata, vt dum obiectum quieſcens vrgent, celeritateque propterea nulla agunt, maximam vim exerant, quae ſit $= F$, tum vero aucta celeritate continuo minorem exerant vim, tandemque plane nullam, cum certa celeritate quae ſit $= e$ agere debeant.

Quia ergo illo caſu celeritas, hoc vero vis euaneſcit, vtroque *actio* eſt nulla. Si iam celeritate quacunque minore quam e, quae ſit $= u$ eadem vis agat, eius quantitas aeſtimari poteſt $= F(1 - \frac{u}{e})^2$ cuius ergo *actio* eſt $= F u (1 - \frac{u}{e})^2$, quae vtique tum caſu $u = 0$ quam $u = e$ euaneſcit, maxima ergo euadit, ſi $u = \frac{1}{3} e$, ac tum erit $= \frac{4}{27} F e$. Quare ſemper machinas ita inſtrui conueniet vt virium, quae adhibentur *actio* reddatur maxima, quae regula niſi obſeruetur, machina multo minorem effectum praeſtabit, quam ab iisdem viribus agitata, ſi debite inſtrueretur, obtineri poſſet. Tali ergo vi adhibita problema praecedens ad ſolutionem determinatam reuocemus.

Problema 52.

59. Si in caſu praecedentis problematis aqua in tubum AO intrudatur a potentia, quae in quiete exerat vim $= F$, mota autem celeritate $= e$ omni vi deſtituatur, definire quomodo machina ad hanc vim ſit accommodanda, vt effectus maximus reddatur ſeu maxima aquae copia dato tempore eiiciatur.

Solutio.

Ponamus hanc potentiam machinae applicatam celeritate $= u$ operari, vt ſit vis quam exerat $= F(1 - \frac{u}{e})^2$ machinam autem ita eſſe inſtructam, vt ad aquam per tubum propulſandam ea vis in ratione $1 : n$ multiplicetur, ibi igitur agat celeritate $= \frac{u}{n}$,

$= \frac{u}{n}$, qua propterea aqua iam per tubum promoveatur, vndecunque ipſi hic motus ſit impreſſus, quandoquidem hic ad motus continuationem ſpectamus. Erit ergo nunc $\mathfrak{v} = \frac{u}{n}$, et poſita tubi amplitudine $= \omega$, vis aquam in tubo propellens $nF(1 - \frac{u}{e})^2 = L\omega$, ita vt ſit $L = \frac{nF}{\omega}(1 - \frac{u}{e})^2$. Quare cum inuenerimus $\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{2g(L - a)}{l}$, vbi preſſionem atmoſphaerae k in orificio Oo omittimus, quia pari preſſione ipſa vis propellens adiuuatur. Iam ſiue ſit $L > a$ ſiue $L < a$, vtroque caſu motus mox ita ad vniformitatem perducetur vt fiat $L = a$ ideoque $1 - \frac{u}{e} = \sqrt{\frac{a\omega}{nF}}$: ſicque a potentia ita applicata, vti aſſumimus, ob $u = e(1 - \sqrt{\frac{a\omega}{nF}})$ aqua per tubum propelletur celeritate $\mathfrak{v} = \frac{e}{n}(1 - \sqrt{\frac{a\omega}{nF}})$, ita vt ſingulis minutis ſecundis aquae volumen $= \mathfrak{v}\omega$ per orificum eiiciatur Hic primo patet, ſi fuerit $\frac{a\omega}{nF} > 1$, ſeu $nF < a\omega$. nullum plane motum produci poſſe. Maximus autem effectus obtinebitur ſi $u = \frac{1}{3}e$, hincque $\frac{4}{9} = \frac{a\omega}{nF}$, vnde machina ita inſtrui debet, vt fiat $n = \frac{9a\omega}{4F}$, tum vero $\mathfrak{v} = \frac{4}{27} \cdot \frac{Fe}{a\omega}$, et quantitas aquae vno minuto ſecundo eiecti $= \frac{4}{27} \cdot \frac{Fe}{a}$, vbi vis F ad pondus reducta per vo'umen maſſae aqueae aequilibrantis exprimi debet ita vt F denotet certum volumen.

Coroll. 1.

60. Si ergo tam altitudo a ad quam aqua debet eleuari quam celeritas e ſeu ſpatium ea percurrendum

rendum vno minuto ſecundo in pedibus, volumen F vero in pedibus cubicis exprimatur; tum formula $\frac{4}{27}.\frac{Fe}{a}$ dabit volumen aquae itidem in pedibus cubicis expreſſum, quod ſingulis minutis ſecundis ad altitudinem a pedum eleuari poterit.

Coroll. 2.

61. A potentia ergo, quae in quiete exerit vim $= F$, celeritate autem motu $= e$ omnem vim amittit, maior aquae copia ad altitudinem a eleuari nequit, quam $\frac{4}{27}.\frac{Fe}{a}$. Neque vero hic effectus obtinebitur niſi machina ita ſit inſtructa vt vis mouens ei applicata in translatione ad aquam propellendam augeatur in ratione $1 : n = 1 : \frac{9a\omega}{4F}$.

Scholion 1.

62. Quo haec clarius perſpiciantur, ponamus vi hominis eſſe vtendum, quae in quiete aeſtimetur 70 librarum ſeu vnius pedis cubici aquae vt ſit $F = 1$; maximam autem celeritatem, qua nullam amplius vim exerere valeat eſſe $7\frac{1}{2}$ pedum ſeu $e = 7\frac{1}{2}$. Hic ergo homo, ſi eius opera modo maxime lucroſo impendatur, ſingulis minutis ſecundis ad altitudinem a pedum eleuare poterit volumen aquae $= \frac{10}{9a}$ ped. cub. hocque fit ſi machina ita ſit inſtructa vt operari poſſit celeritate $= 2\frac{1}{2}$ ped. ac tum eius actio eſt $= \frac{4}{27}.Fe = \frac{10}{9}$, ita vt ſemper actio hoc modo expreſſa, ſi per altitudinem a diuidatur, praebeat quantitatem aquae ſingulis minutis ſecundis eleuandae.

dae. In machinae autem conſtructione inſuper ad amplitudinem tubi ω eſt ſpectandum, quoniam vis mouens per translationem augeri debet in ratione $1 : \frac{9 a \omega}{4 F}$; quae ratio contra non a celeritate $= e$ pendet. Deinde cum vnius hominis actio maxima ſit $= \frac{10}{9}$, ſi λ homines operi admoueantur eorum actio erit $= \frac{10}{9}\lambda$, cui ſemper effectus eſt proportionalis. Si equis ſit vtendum, et in quiete vnius equi vis triplo maior cenſeatur quam hominis, celeritasque maxima etiam triplo maior, eius actio nouies fiet maior, ſeu vnus equus tantum praeſtare valebit quantum nouem homines.

Scholion 2.

63. Si curſu fluminis ad machinam agitandam vti velimus cuius impulſu palmulae rotae ad motum incitentur; determinatio effectus in aqua elevanda hoc modo inſtitui debet. Sit ff ſuperficies quae aquae impulſum normaliter excipiat, et e denotet celeritatem fluminis, vnde altitudo, ex qua graue eandem celeritatem lapſu acquirit erit $= \frac{ee}{4g}$: vis ergo fluminis in hanc ſuperficiem quietam erit $= \frac{eeff}{4g}$, ponderi ſcilicet tanti voluminis aquae quam loco litterae F ſcribi oportet; tum vero quia impulſus euaneſcit ſtatim ac palmula ipſa fluminis celeritate $= e$ mouetur, haec eſt illa celeritas, quam ante littera e notauimus. Actio ergo maxima euadet, cum ſuperficies ff celeritate $= \frac{1}{3}e$ mouetur, eritque haec actio $= \frac{e^3 ff}{27 g}$, ideoque cubo celeritatis fluminis

proportionalis. Hac itaque actione ad altitudinem $= a$ ſingulis minutis ſecundis eleuabitur aquae quantitas $= \frac{e^3 ff}{27 g a}$, cum ergo ab vno homine eleuetur quantitas $= \frac{10}{a}$ ped. cub. effectus aquae aequiualebit λ hominibus exiſtente $\lambda = \frac{e^3 ff}{30 g}$, dum e et f in pedibus exprimuntur, vbi notandum eſt eſſe $g = 15\frac{1}{2}$ ped. ideoque $\lambda = \frac{e^3 ff}{465}$. Quodſi $ff = 1$ ped. quadr. et fluvius conficiat ſpatium $7\frac{3}{4}$ ped. vno minuto ſecundo, vnus homo eundem effectum producet. Hic quidem aſſumſimus, tubum A O eiusdem vbique eſſe amplitudinis, verum res pari modo ſe habet, etiamſi eius amplitudo fuerit variabilis, quem caſum ſequenti capite expendamus ſemper autem tenendum eſt tubum vt anguſtiſſimum conſiderari.

CAPVT III.

DE MOTV AQVAE IN TVBIS INAEQVALITER AMPLIS.

Problema 53.

64. Si data aquae quantitas in tubo, cuius amplitudo vtcunque eſt variabilis, moueatur, et vtrinque a viribus quibuscunque prematur, eius motum et preſſionem in ſingulis punctis determinare.

Solutio.

Solutio.

Quamcunque directrix tubi habuerit figuram, ea vt linea recta A O conſideretur, cui autem adiungatur linea curua $\alpha\,\omega$ cuius applicatae $z\,\pi$ ſingulorum punctorum z altitudines ſuper plano horizontali fixo denotent. Iam elapſo tempore t conſideretur aquae particula quaecunque, quae verſetur circa tubi punctum z, exiſtente directricis longitudine $Az = s$ a puncto fixo A computata, ibique ſit tubi amplitudo $zv = \omega$, et altitudo $z\pi = z$ quae per s datae aſſumuntur. Denſitas aquae vnitate exprimatur vt ſit $q = 1$, in z vero vocetur preſſio $= p$ pariter ad aquam relata, et celeritas huius particulae in tubo verſus O ſit $= \text{ȣ}$ quae ſunt functiones duarum variabilium s et t. Quibus poſitis probl. 46. primo nobis ſuppeditat hanc aequationem $(\frac{d.\,\text{ȣ}\,\omega}{d\,s}) = 0$ vnde $\text{ȣ}\,\omega$ functioni ſolius temporis aequetur neceſſe eſt, cum ergo hoc tempore vbique celeritas ſit reciproce vt amplitudo, concipiamus alicubi amplitudinem datam $= ff$, in qua ſit celeritas $= v$, functio ipſius tempore t, eritque $\text{ȣ}\,\omega = ffv$ et $\text{ȣ} = \frac{ffv}{\omega}$; ita vt ſi definita fuerit celeritas v amplitudini datae ff conueniens pro hoc tempore, ex ea celeritas in quacunque alia amplitudine ω innoteſcat ad idem tempus; hacque formula $\text{ȣ} = \frac{ffv}{\omega}$ iam prima determinatio contineatur, vbi probe notetur celeritatem v eſſe functionem ſolius temporis t amplitudinem vero ω ſpatii s tantum. Nunc ad alteram aequationem progrediamur,

Tab. IV. Fig. 50.

 qua

qua preſſio p definitur, et quia aquam a ſola gravitate animari ponimus erit $P = o$, $Q = o$ et $R = -1$ tum vero quia in hac aequatione tempus t conſtans accipitur, erit $d\vartheta = \frac{-ffv\,d\omega}{\omega\omega}$ et $(\frac{d\vartheta}{dt}) = \frac{ff\,dv}{\omega\,dt}$, ſicque aequatio poſterior abit in hanc formam:

$$2g\,dp = -2g\,dz + \frac{f^4vv\,d\omega}{\omega^3} - \frac{ff\,ds}{\omega} \cdot \frac{dv}{dt}$$

quae quia v et $\frac{dv}{dt}$ vt conſtantes ſpectantur per integrationem dat:

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 vv}{2\omega\omega} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

vbi cum ω ſit functio ſolius s integrale $\int\frac{ds}{\omega}$ vt quantitas cognita ſpectari poteſt.

Nunc ad ambos terminos noſtrae maſſae aqueae reſpiciamus qui ſint in M et N exiſtente $AM = m$, $AN = n$, amplitudine in $M = \mu$, in $N = \nu$, altitudine $M\mu = \mathfrak{m}$, $N\nu = \mathfrak{n}$, integralis $\int\frac{ds}{\omega}$ valore in $M = \mathfrak{M}$ in $N = \mathfrak{N}$; tum vero preſſione in $M = \mathrm{M}$ et in $N = \mathrm{N}$. Cum igitur celeritas in M ſit $= \frac{ffv}{\mu}$, in $N = \frac{ffv}{\nu}$, tempuſculo dt ambo termini M et N promouebuntur in M′, N′ vt ſit

$$M'M = \frac{ffv\,dt}{\mu} \quad \text{et} \quad NN' = \frac{ffv\,dt}{\nu}$$

vnde quia m et n ſunt functiones ſolius temporis t erit $dm = \frac{ffv\,dt}{\mu}$, $dn = \frac{ffv\,dt}{\nu}$ hincque $\mu\,dm = \nu\,dn$.

Ex cognitis autem preſſionibus in M et N has duas obtinemus aequationes:

$$2g\mathrm{M} = \Delta : t - 2g\mathfrak{m} - \frac{f^4vv}{2\mu\mu} - \frac{ff\,dv}{dt} \cdot \mathfrak{M}$$

$$2g\mathrm{N} = \Delta : t - 2g\mathfrak{n} - \frac{f^4vv}{2\nu\nu} - \frac{ff\,dv}{dt} \cdot \mathfrak{N}$$

vnde

vnde colligimus:

$$2g(M-N)=2g(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})+\frac{f^4 vv}{2}\left(\frac{1}{\nu\nu}-\frac{1}{\mu\mu}\right)+\frac{ff\,dv}{dt}(\mathfrak{N}-\mathfrak{M})$$

quae aequatio tantum functiones ipſius temporis t inuoluit, indeque propterea celeritas v definiri poterit. Tum vero pro preſſione inuenitur:

$$2g(M-p)=2g(z-\mathfrak{m})+\frac{f^4 vv}{2}\left(\frac{1}{\omega\omega}-\frac{1}{\mu\mu}\right)+\frac{ff\,dv}{dt}\left(\int\frac{ds}{\omega}-\mathfrak{M}\right)$$

quae eliſa formula $\frac{ff\,dv}{dt}$ praebet hanc aequationem:

$$\left(2g(p+z)+\frac{f^4vv}{2\omega\omega}\right)(\mathfrak{N}-\mathfrak{M})=\begin{array}{l}+\left(2g(M+\mathfrak{m})+\frac{f^4vv}{2\mu\mu}\right)\left(\mathfrak{N}-\int\frac{ds}{\omega}\right)\\+\left(2g(N+\mathfrak{n})+\frac{f^4vv}{2\nu\nu}\right)\left(\int\frac{ds}{\omega}-\mathfrak{M}\right).\end{array}$$

Coroll 1.

65. Cum detur maſſa fluidi in tubo contenta, ex dato ſpatio $AM=m$, quo ſimul quantitates μ, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{M}=\int\frac{dm}{\mu}$ determinantur definitur ſpatium $AN=n$, cum $\int\nu\,dn-\int\mu.dm$ praebeat illam maſſam ſicque etiam n cum ν, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{N}=\int\frac{dn}{\nu}$ vt functiones ſolius quantitatis m ſpectari poterunt.

Coroll. 2.

66. Quoniam totum negotium a reſolutione aequationis differentialis inuentae pendet, et eſt $dt=\frac{\mu\,dm}{ff\,v}$, ſi ea aequatio per $\mu\,dm=ff\,v\,dt$ multiplicetur habebitur:

$$2g(M-N+\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\mu\,dm=\tfrac{1}{2}f^4\,vv\,\mu\,dm\left(\frac{1}{\nu\nu}-\frac{1}{\mu\mu}\right)+f^4\,v\,dv(\mathfrak{N}-\mathfrak{M})$$

quae poſito $f^4\,vv=V$ abit in hanc

$$4g(M-N+\mathfrak{m}-\mathfrak{n}).\frac{\mu\,dn}{\mathfrak{N}-\mathfrak{M}}=dV+\frac{V\mu\,dm}{\mathfrak{N}-\mathfrak{M}}\left(\frac{1}{\nu\nu}-\frac{1}{\mu\mu}\right)$$

ex quo quantitatem V elici oportet, qua inuenta primo reperitur celeritas $v = \frac{\nu V}{ff}$, indeque porro tempus $t = \int \frac{\mu\, d\, m}{\nu\, V}$.

Coroll 3.

67. Si enim preſſiones M et N vel ſint conſtantes, vel a ſpatiis m et n pendeant, quia n per m determinatur aequatio illa duas tantum variabiles m et V continere eſt cenſenda, et integrabilis redditur ſi multiplicetur per e^Q exiſtente $Q = \int \frac{\mu\, d\, m}{\mathfrak{N} - \mathfrak{M}} \left(\frac{1}{\nu\nu} - \frac{1}{\mu\mu}\right)$. Quia vero eſt $\mu\, d\, m = \nu\, d\, n$ et $\frac{d\, n}{\nu} = d\,\mathfrak{N}$ item $\frac{d\, m}{\mu} = d\,\mathfrak{M}$, fit $Q = \int \frac{d\,\mathfrak{N} - d\,\mathfrak{M}}{\mathfrak{N} - \mathfrak{M}}$. hincque multiplicator $e^Q = \mathfrak{N} - \mathfrak{M}$.

Coroll 4.

68. Quamobrem illius aequationis integrale eſt:

$$(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) V = f^4 v v (\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = 4g \int \mu\, d\, m (M - N + m - n)$$

vbi notandum eſt cum ſit celeritas aquae in $M = \frac{ffv}{\mu}$ et in $N = \frac{ffv}{\nu}$, expreſſionem $f^4 v v (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) = \int \frac{f^4 vv}{\nu\nu} . \nu\, d\, n - \int \frac{f^4 vv}{\mu\mu} . \mu\, d\, m$ deſignare vim viuam maſſae aquae $M\, m\, N\, n$ quandoquidem $\nu\, d\, n$ eſt eius elementum $N\, n\, N'\, n'$, idque in celeritatis quadratum ducitur.

Scholion.

69. Omni attentione dignum eſt; quod aequatio differentialis inuenta tam commode integrari potuerit, eiusque integrale ad vim viuam aquae in tubo

tubo contentae ſit perductum, vnde ſummus vſus principii conſeruationis virium viuarum, quo iam olim Celeb. *Bernoulli* in Hydrodynamica feliciſſimo ſucceſſu eſt vſus, clariſſime perſpicitur. Hinc ſcilicet intelligimus, ſi vires vtrinque prementes M et N fuerint aequales, et tubi directrix horizontalis, vt nullae adſint vires motum fluidi vel accelerantes vel retardantes, tum fluidi maſſam eandem perpetuo vim viuam eſſe conſeruaturam, poſito enim $\mathrm{M} = \mathrm{N}$ et $\mathfrak{m} = 0$ et $\mathfrak{n} = 0$ ſeu in genere $z = 0$, prodit vis viua $f^4 vv(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = \text{Conſt.}$ ſin autem altitudines $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ non euaneſcant, aequatio inuenta ob $\mu\, dm = \nu\, dn$ ita repraeſentari poteſt:

$$f^4 vv(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = 4g\int(\mathrm{M} + \mathfrak{m})\mu\, dm - 4g\int(\mathrm{N} + \mathfrak{n})\nu\, dn.$$

vnde manifeſtum eſt, quantum incrementum vis viua capiat a vi accelerante; quandoquidem preſſio M motum accelerat, preſſio vero N retardat, ac praeterea ex altitudinibus $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ ſingulorum elementorum vel aſcenſus vel deſcenſus definitur. Ceterum hic imprimis notari meretur, quod aequatio differentialis inuenta ſola multiplicatione per $2\mu\, dm = 2\nu\, dn = 2ffv\, dt$ ſtatim integrabilis reddatur dum prodit

$$4g(\mathrm{M} - \mathrm{N} + \mathfrak{m} - \mathfrak{n})\mu\, dm = f^4 vv\left(\frac{dn}{\nu} - \frac{dm}{\mu}\right) + 2f^4 v\, dv(\mathfrak{N} - \mathfrak{M})$$

cuius integrabilitas ob $\frac{dn}{\nu} = d\mathfrak{N}$ et $\frac{dm}{\mu} = d\mathfrak{M}$ ſtatim in oculos incurrit; ita vt iam totum negotium ad integrationem primae partis reducatur. Ad maiorem ergo dilucidationem ſufficit, vt nonnulla exempla proferamus.

Exem-

Exemplum I.

Tab. IV. Fig. 51. 70. *Si tubus ſit conicus eiusque directrix* A O *verticalis, in quo maſſa aquea* A C c *libere deſcendat, eius motum definire.*

Sit A C $= c$ et amplitudo tubi in C nempe C $c = \alpha c c$, vt fiat tota maſſa aquae A C $c = \frac{1}{3}\alpha c$, quae poſt tempus t occupet tubi ſpatium M m N n, vnde ob A M $= m$ et A N $= n$ erit $n^3 = c^3 + m^3$. Tum vero poſita altitudine fixa A O $= a$, erunt primo amplitudines M $m = \mu = \alpha m m$; N $n = \nu = \alpha n n$ et $z v = \omega = \alpha s s$ poſito A $z = s$, deinde altitudines O M $= \mathrm{m} = a - m$; O N $= \mathrm{n} = a - n$ et O $z = \mathrm{z} = a - s$. Porro ob $\int \frac{ds}{\omega} = -\frac{1}{\alpha s}$, fit $\mathfrak{M} = -\frac{1}{\alpha m}$ et $\mathfrak{N} = -\frac{1}{\alpha n}$. Quare ſi preſſiones in M et N aequentur ſoli preſſioni atmoſphaerae k, quod euenit ſi tubus in apice A apertus concipiatur, erit M $=$ N $= k$. Quodſi iam amplitudini ff conueniat celeritas $= v$ deorſum tendens, aequatio noſtra integralis pro hoc caſu colligitur:

$$f^4 v v\left(\frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{\alpha n}\right) = 4 g \int \alpha m m d m (n - m) = 4 \alpha g \left(\tfrac{1}{4} n^4 - \tfrac{1}{4} m^4\right) + \text{Conſt.}$$

ob $m m d m = n n d n$. Cum autem deſcenſus ex quiete incipiat facto $m = 0$ et $n = c$ celeritas euaneſcere debeat, vnde habebitur:

$$f^4 v v\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = \alpha \alpha g (n^4 - m^4 - c^4)$$

hincque $ff v = \alpha \sqrt{\frac{g m n (n^4 - m^4 - c^4)}{n - m}}$

ſicque colligitur tempus,

$$t = \int \frac{u d m}{ff v} = \int \frac{m d m \sqrt{m (n - m)}}{\sqrt{g n (n^4 - m^4 - c^4)}}$$

cuius

cuius formulae ob $n^3 = c^3 + m^3$ integrale eſt capiendum, vt ad datum tempus t ſpatium $AM = m$ definiri poſſit.

Denique pro preſſione in z, quae eſt p, inuenienda, habetur haec aequatio ſuperiorem per z multiplicando

$$(4g(p+a-s)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha s^4})(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha n}) = \begin{matrix} +(4g(k+a-m)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha m^4})(\frac{1}{\alpha s}-\frac{1}{\alpha n}) \\ +(4g(k+a-n)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha n^4})(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha s}) \end{matrix}$$

quae ob $\frac{f^4vv}{\alpha\alpha} = \frac{g\,mn(n^4-m^4-c^4)}{n-m}$ abit in hanc:

$$\frac{4(p+a-s)(n-m)}{mn} = \frac{4(k+a-m)(n-s)}{ns} + \frac{4(k+a-n)(s-m)}{ms}$$
$$+ \frac{(s-m)(n-s)(n^4-m^4-c^4)(mmnn+mn(m+n)s+(m^2+mn+nn)ss)}{m^3n^3s^4}$$

vnde deducimus:

$$p = k + \frac{mn}{s} - m - n + s + \frac{(s-m)(n-s)(n^4-m^4-c^4)(mmnn+mn(m+n)s+(mm+mn+nn)ss)}{4mmnn(n-m)s^4}.$$

Exemplum 2.

71. *In caſu praecedentis exempli ſi tubus ſit in* A *clauſus vt ſuperior ſuperficies* Mm *nullam preſſionem ſuſtineat, motum aquae determinare.*

Cum omnia maneant vt in praecedente exemplo niſi quod hic ſit $M = 0$, et $N = k$, aequatio prior abit in hanc formam

$$f^4vv(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha n}) = 4g\int \alpha mm\,dm(n-m-k) \text{ ſeu}$$
$$f^4vv(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}) = \alpha\alpha g(n^4-m^4-c^4-\tfrac{4}{3}km^3)$$

Hic autem primum obſeruo initio vbi $m = 0$ et $n = c$ motum incipere non potuiſſe niſi fuerit $c > k$, ſi enim ſit $c < k$ vel etiam $c = k$ aqua per-

 petuo

petuo in ſummitate tubi haerebit, nullusque motus ſequetur. Sin autem ſit $c > k$ motus primo quidem accelerabitur, donec fiat $n = \sqrt[3]{(c^3 + m^3)} = m + k$ hoc eſt

$c^3 = 3kmm + 3kkm + k^3$ ſeu $m = \sqrt{(\frac{c^3}{3k} - \frac{1}{12}kk)} - \frac{1}{2}k$

Inde vero celeritas decreſcet, atque adeo euaneſcet, quando fiet

$$n^4 = (c^3 + m^3)^{\frac{4}{3}} = c^4 + m^4 + \tfrac{4}{3}km^3,$$

quae euoluta dat

$$\begin{matrix} 4km^8 + \tfrac{16}{3}kkm^7 + \tfrac{64}{27}k^3m^6 + 3c^4m^5 + 8kc^4m^4 + \tfrac{16}{3}k^2c^4m^3 + 3c^8m + 4kc^8 = 0 \\ -4c^3m^6 \qquad\qquad\qquad\qquad -6c^6m^3 \qquad\qquad -4c^9 \end{matrix}$$

Quo hinc aliquid facilius concludere queamus, ponamus c valde parum excedere k ſtatuamusque $c = (1 + \delta)k$ denotante δ fractionem minimam et quia m quoque erit ſpatium valde paruum fiet $n = c + \frac{m^3}{3cc}$ hincque

$$f^4 vv(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{c} + \tfrac{m^3}{3c^4}) = \alpha\alpha g(\tfrac{4\delta c m^3}{3(1+\delta)} - m^4 + \tfrac{2m^6}{3cc})$$

ac celeritas maxima reſpondebit loco $m = \frac{\delta c}{1+\delta} + \frac{m^3}{3cc} = \frac{\delta c}{1+\delta} + \frac{\delta^3 c}{3(1+\delta)^3}$ rurſusque euaneſcet vbi $m = \frac{4\delta c}{3(1+\delta)} + \frac{2m^3}{3cc}$ ſeu ſatis exacte $m = \frac{4\delta c}{3(1+\delta)}$. Deinde vero colligitur

$$ffv = \alpha mm\sqrt{g(\tfrac{4\delta c}{3(1+\delta)} - m)} = \alpha mm\sqrt{g(\tfrac{4}{3}\delta k - m)}$$

hincque tempus

$$t = \int \frac{dm}{\sqrt{g(\frac{4}{3}\delta k - m)}} = 2\sqrt{\frac{4\delta k}{3g}} - 2\sqrt{\frac{4\delta k - 3m}{3g}}$$

et tempus totius deſcenſus $= 4\sqrt{\frac{\delta k}{3g}}$.

Exem-

Exemplum 3.

72. *Si tubus habeat duo brachia verticaliter erecta* A B *et* C O *iuncta ramo horizontali* B C *et quaelibet pars ſit aequaliter ampla ſed a reliquis diverſa definire motum oſcillatorium aquae in hoc tubo.* Tab. IV. Fig. 52.

Tubi AB in quo alter venae terminus M m reperitur amplitudo ſit vbique $= \mu$, tubi vero O C $= \nu$, horizontalis vero B C $= \lambda$. Cum aqua vtrinque eſt in aequilibrio, pertingat ad horizontalem E F, ponaturque B E $=$ C F $= a$, et B C $= b$ vt totum aquae volumen ſit $= a\mu + b\lambda + a\nu$. Iam in ſtatu motus ad tempus $= t$ vocetur E M $= \nu x$ eritque F N $= \mu x$, et iam quantitates μ et ν ſunt conſtantes. Statuatur A E $= e$, erit $m = e - \nu x$ $\mathfrak{m} = a + \nu x$, $\mathfrak{M} = \frac{e - \nu x}{\mu}$, porro $n = e + 2a + b - \mu x$, $\mathfrak{n} = a - \mu x$ et $\mathfrak{N} = \frac{e + a}{\mu} + \frac{b}{\lambda} + \frac{a - \mu x}{\nu}$, vnde $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ $= \frac{b}{\lambda} + \frac{a + \nu x}{\mu} + \frac{a - \mu x}{\nu}$. Deinde ob M $=$ N $= k$ preſſioni atmoſphaerae, et $\mathfrak{m} - \mathfrak{n} = (\mu + \nu)x$ erit

$$f^4 vv\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a + \nu x}{\mu} + \frac{a - \mu x}{\nu}\right) = -4g\int \mu\nu\, dx(\mu + \nu)x$$
$$= -2g\mu\nu(\mu + \nu)xx + C.$$

Ponamus facto $x = 0$ celeritatem amplitudini ff conuenientem fieri $v = 2\sqrt{gc}$, vt hinc conſtans ita determinetur.

$$4gcf^4\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a(\mu + \nu)}{\mu\nu}\right) = C\text{, atque habebitur.}$$

$$ffv\sqrt{\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a + \nu x}{\mu} + \frac{a - \mu x}{\nu}\right)} =$$

$$\sqrt{2g\mu\nu(\mu + \nu)}\left(\frac{2cf^4}{\mu\nu(\mu + \nu)}\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a(\mu + \nu)}{\mu\nu}\right) - xx\right)$$

 pro

pro excurſionibus maximis ergo erit

$$x = \pm \sqrt{\left(-\frac{2cf^4}{\mu\nu(\mu+\nu)}\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a(\mu+\nu)}{\mu\nu}\right)\right)}$$

Pro tempore autem hanc aequationem integrari oportet

$$t = -\mu\nu \int \frac{dx}{ffv}$$

quae formula autem nimis eſt perplexa, quam vt eius euolutio ſuſcipi queat, niſi caſu quo c ac proinde etiam x eſt quantitas quam minima. In genere enim tempus tali forma definitur $t = \int \frac{dx\sqrt{(A+Bx)}}{\sqrt{(bb-xx)}}$, cuius integratio reiecto termino B x eſt manifeſta. Admiſſo autem termino B x totae quidem oſcillationes erunt iſochronae ſed tempora, quibus terminus Mm ſupra libellam E F vel aſcendit vel deſcendit non erunt aequalia temporibus, quibus infra libellam verſatur.

Problema 54.

Tab. IV. Fig. 50. 73. Si aqua ex tubo vtcunque inaequaliter amplo et cuius directrix eſt linea curua quaecunque per orificium Oo effluat, vt eius quantitas in tubo continuo minuatur eius motum determinare.

Solutio.

Maneant omnia vti in ſolutione problematis, praecedentis niſi quod amplitudo illa conſtans ff iam ipſi orificio Oo tribuatur per quod nunc aqua elapſo tempore $= t$ effluat celeritate $= v$ alter vero aquae terminus haereat in M m, vbi amplitudo ſit $= \mu$

$= \mu$ altitudo ſupra horizontem $M\mu = \mathfrak{m}$, et preſſio $=$ M quae quidem ſi aeri pateat, erit aequalis preſſioni atmoſphaerae k periude ac in ipſo orificio O o. A loco autem tubi dato A ſecundum eius directricem ſit diſtantia A M $= m$ et tota longitudo A O $= a$ tum vero celeritas qua aquae ſuprema ſuperficies M m per tubum promouetur erit $= \frac{ffv\,dt}{\mu}$. Statuamus nunc pro loco tubi quocunque z, longitudinem A $z = s$, amplitudinem $zv = \omega$, altitudinem $z\pi = z$ et preſſionem $= p$, ac principia motus hanc nobis ſuppeditant aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 vv}{2\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

quam primo ad extremitatem M m tum vero ad orificium O o transferri oportet, quandoquidem in his duobus locis preſſio eſt data. Pro illa autem M m fit $p = M$; $z = \mathfrak{m}$, $\omega = \mu$, integralis vero $\int\frac{ds}{\omega}$ valor hic fiat $= \mathfrak{M}$, vnde fit

$$2gM = \Delta : t - 2g\mathfrak{m} - \frac{f^4 vv}{2\mu\mu} - \frac{ffdv}{dt}\mathfrak{M}$$

Pro orificio vero O o ſiquidem aqua in aerem effluat, habetur preſſio $p = k$, amplitudo $\omega = ff$, altitudo vero O ω fit nulla, quoniam planum horizontale per ipſum orificium O o ducere licet valor autem formulae integralis $\int\frac{ds}{\omega}$ ad hunc locum translatus fiat $= \mathfrak{A}$, quippe qui erit conſtans ex quo noſtra aequatio fiet

$$2gk = \Delta : t - \tfrac{1}{2}vv - \frac{ffdv}{dt}.\,\mathfrak{A}$$

quae ab illa ſubtracta relinquit

$$2g(M-k) = -2g\mathfrak{m} - \frac{f^4 vv}{2\mu\mu} + \tfrac{1}{2}vv + \frac{ffdv}{dt}(\mathfrak{A} - \mathfrak{M})$$

 quam

quam aequationem, in qua ſolum tempus t variabile ineſt, integrari oportet, hanc formulam $dm = \frac{ffvdt}{\mu}$ in ſubſidium vocando. vnde ob $dt = \frac{\mu dm}{ffv}$ habetur

$$2g(M-k)\mu dm = -2g\mathfrak{m}\mu dm + \tfrac{1}{2}vv\mu dm\left(1-\frac{f^4}{\mu\mu}\right) + f^2 vdv(\mathfrak{A}-\mathfrak{M})$$

vbi eſt $\mathfrak{M} = \int\frac{dm}{\mu}$, ex quo valore naſcitur quantitas $\mathfrak{A}$ ſi fiat $m = a$. Sunt autem μ et $\mathfrak{m}$ functiones datae ipſius m, vnde haec aequatio duas tantum variabiles m et v inuoluit, ex qua valorem ipſius vv facile elicere licet, quo inuento ope formulae $dt = \frac{\mu dm}{ffv}$ ad quoduis tempus t cum longitudo AM $= m$ tum celeritas v, qua aqua per orificium Oo effluit aſſignari poterit. Deinde vero etiam pro preſſione p in loco quocunque z, habebitur:

$$2g(p-k) = -2gz + \tfrac{1}{2}vv\left(1-\frac{f^4}{\omega\omega}\right) + \frac{ffdv}{dt}\left(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}\right)$$

quare ſi terminus $\frac{ffdv}{dt}$ elidatur colligitur:

$$2g(M-k)\left(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}\right)+2g(k-p)(\mathfrak{A}-\mathfrak{M}) = 2gz(\mathfrak{A}-\mathfrak{M})-2g\mathfrak{m}\left(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}\right) + \tfrac{1}{2}vv\left(\mathfrak{M}-\int\frac{ds}{\omega}\right)-\frac{f^4vv}{2\mu\mu}\left(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}\right) + \frac{f^4vv}{2\omega\omega}(\mathfrak{A}-\mathfrak{M}).$$

Coroll. 1.

74. Sumamus tubi terminum fixum A in ipſo orificio O vt ſit $a = 0$, et vocemus OM $= m$, atque O$z = s$, ita vt iam in formulis inuentis hae duae quantitates m et s negatiue capi debeant; tum vero erit $\mathfrak{A} = 0$, et loco $\mathfrak{M}$ et $\int\frac{ds}{\omega}$ ſcribi oportebit $-\int\frac{dm}{\mu}$ et $-\int\frac{ds}{\omega}$, vnde pro preſſione habebimus:

2 g

$$2g(M-k)\int\frac{ds}{\omega}+2g(k-p)\int\frac{dm}{\mu}=2gz\int\frac{dm}{\mu}-\tfrac{1}{2}vv\left(1-\frac{f^4}{\omega\omega}\right)\int\frac{dm}{\mu}+\tfrac{1}{2}vv\left(1-\frac{f^4}{\mu\mu}\right)\int\frac{ds}{\omega}$$
$$-2g\mathfrak{m}\int\frac{ds}{\omega}.$$

Coroll. 2.

75. Manentibus autem $OM = m$ et $Oz = s$, primum pro tempore habebitur $dt = -\frac{\mu\, d\, m}{ffv}$, quoniam labente tempore t interuallum $OM = m$ minuitur celeritas autem effluxus v ex hac aequatione debet definiri

$$2g(M-k+\mathfrak{m})\mu\, dm = \tfrac{1}{2}vv\mu\, dm\left(1-\frac{f^4}{\mu\mu}\right)-f^4 v\, dv\int\frac{dm}{\mu}$$

quae commodius ita repraeſentatur:

$$2f^4 v\, dv\int\frac{dm}{\mu}+\frac{f^4 vv\, dm}{\mu}-vv\mu\, dm+4g(M-k+\mathfrak{m})\mu\, dm=0.$$

Coroll 3.

76. Ponatur hic $f^4 vv\int\frac{dm}{\mu}=u$, vt habeatur:

$$du-\frac{\mu u\, dm}{f^4\int\frac{dm}{\mu}}+4g(M-k+\mathfrak{m})\mu\, dm=0$$

quae vt integrabilis reddatur multiplicari debet per e^{O} exiſtente $O=-\frac{1}{f^4}\int\frac{\mu\, d\, m}{\int\frac{dm}{\mu}}$ eritque tum

$$e^{O}u+4g\int e^{O}(M-k+\mathfrak{m})\mu\, dm=\text{Conſt.}$$

Scholion.

77. In hac ſolutione omnia continentur, quae vulgo de effluxu aquae ex vaſis cuiuscunque figurae tradi ſolent, quae autem eatenus tantum admitti poſſunt, quatenus ea vaſa vel ſunt anguſtiſſima, vel motus

motus per ea ita fiat, vt ſingula ſtrata ad directricem normaliter ſumta communi motu ferantur, niſi enim haec conditio locum habeat, celeritas effluxus hic definita a veritate recedet, etſi ſaepenumero diſcrimen experimentis inſtituendis vix percipitur. Quodſi in formulis inuentis ſtatuatur $M = k$, habebitur caſus, quo ſuprema aquae ſuperficies eſt aperta, et effluxus fit in aërem, ſin autem aqua in ſpatium aëre vacuum efflueret, ſumi deberet $k = 0$, at ſi tubi orificium O o aquae ſtagnanti eſſet immerſum, littera k preſſionem huius aquae in orificium exprimere deberet. Totum autem negotium ſemper reducitur ad aequationem differentialem inventam, ex cuius integratione pro quouis loco vbi ſuperficies aquae ſuprema haeret celeritas effluxus cognoſcetur, tum vero formulam $dt = -\frac{\mu\, dm}{ffv}$ (75) in ſubſidium vocando tempus innoteſcet, quo aqua in tubo ad datum locum M m ſubſidit; ac denique cum elapſo tempore $= t$ aqua per orificium O o, cuius amplitudo eſt $= ff$ celeritate $= v$ effluat, omnis aqua quae tempore t effluxerit, erit $= ff \int v\, dt = -\int \mu\, dm$. Quod quo clarius appareat, aliquot caſus euoluamus.

Exemplum I.

Tab. IV. Fig. 53. 78. *Si tubi directrix* A O *ſit recta verticalis, at tubus initio ad* A a *fuerit aqua plenus, quae tum per orificium* O o = ff *effluere inceperit, ad datum quoduis tempus celeritatem effluxus et preſſionem in quavis ſectione* z v *determinare.*

Poſito

Poſito ergo interuallo $OM = m$ et amplitudine $Mm = \mu$, quem in locum aquam ex Aa elapſo tempore $= t$ ſubſediſſe aſſumimus erit etiam altitudo $OM = m = m$, et preſſio $M = k$. Poſita nunc celeritate effluxus per orificium $= v$, eam ex aequatione definiri oportet:

$$2f^4 v\,dv \int \frac{dm}{\mu} + \frac{f^4 vv\,dm}{\mu} - vv\mu\,dm + 4g\mu m\,dm = 0$$

quae poſito $f^4 vv \int \frac{dm}{\mu} = u$ abit in hanc formam

$$du - \frac{u\mu\,dm}{f^4 \int \frac{dm}{\mu}} + 4g\mu m\,dm = 0.$$

Deinde pro preſſione in ſectione quacunque zv ſit $Oz = s$ et amplitudo $zv = \omega$, erit quoque altitudo $z = s$, ideoque

$$2g(k-p)\int \frac{dm}{\mu} = 2gs\int \frac{dm}{\mu} - 2gm\int \frac{ds}{\omega} - \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)\int \frac{dm}{\mu}$$
$$+ \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{\mu\mu}\right)\int \frac{ds}{\omega}.$$

Aequatio autem illa differentialis ita integrari debet, vt facta altitudine $OM = m = OA = a$ celeritas v euaneſcat, tum vero inuenta celeritate v calculus ad tempus accommodabitur ope huius formulae $t = -\int \frac{\mu\,dm}{ffv}$, quae poſito $m = a$ euaneſcere debet. Quod ſi deinceps ponatur $m = 0$, tempus totius effluxus innoteſcet.

Praeterea vero durante effluxu, quoniam ab initio celeritas v continuo creſcit, celeritas maxima vbi $dv = 0$, ita definitur vt ſit $vv = \frac{4gm\mu\mu}{\mu\mu - f^4}$, ideoque $v = \frac{2\mu\sqrt{gm}}{\sqrt{(\mu\mu - f^4)}}$. Cum ergo ſit $v > 2\sqrt{gm}$,

 celeri-

celeritas maxima maior erit ea, quam graue delabens ex altitudine m acquirit.

Coroll. I.

Tab. IV. Fig. 54. 79. Si vas vbique ſit aeque amplum ſeu $\mu = \omega = cc$, cuius fundum OC foramine $Oo = ff$ eſt pertuſum, habebimus:

$$du - \frac{c^4}{f^4} \cdot \frac{u\,dm}{m} + 4gccm\,dm = 0.$$

Sit $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$, erit $m^{-\lambda}u + \frac{4gcc}{2-\lambda}m^{2-\lambda} = C$ hincque

$$u = Cm^{\lambda} + \frac{4gcc}{\lambda-2}mm = \frac{f^4mvv}{cc}$$

et conſtante rite definita

$$f^4vv = \frac{4gc^4m}{\lambda-2}(1 - a^{2-\lambda}m^{\lambda-2})$$

ſeu $v = \sqrt{\frac{4\lambda gm}{\lambda-2}\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right)}$, vnde colligitur preſſio

$p = k + \frac{\lambda-1}{\lambda-2}(m-s)\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right)$ pro ſectione zv ad altitudinem $Oz = s$, denique pro tempore erit

$t = -\int \frac{dm\sqrt{(\lambda-2)}}{2\sqrt{gm(1-a^{2-\lambda}m^{\lambda-2})}}$ celeritas autem maxima fit $= \frac{2cc\sqrt{gm}}{\sqrt{(c^4-f^4)}} = \frac{2\sqrt{\lambda gm}}{\sqrt{(\lambda-1)}}$, quae conuenit altitudini m hinc definiendae $\frac{\lambda-2}{\lambda-1} = 1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}$, ita vt

fit $m = \frac{a}{\sqrt[\lambda-2]{(\lambda-1)}}$.

Coroll.

Coroll. 2.

80. Caſus quo $\lambda = 2$ ſeu $c^4 = 2 f^4$ ſingularem poſtulat euolutionem; quia aequatio $du - \frac{2 u dm}{m} + 4 g c c m dm = 0$ integrata dat $u = 4 g c c m m l \frac{a}{m} = \frac{c c m v v}{2}$, hinc $v = \sqrt{8 g m l \frac{a}{m}}$ et $t = -\int \frac{dm}{\sqrt{4 g m l \frac{a}{m}}}$, pro preſſione vero $p = k + (m - s) l \frac{a}{m}$.

Coroll. 3.

81. Sit tubus conus ad orificium truncatus, et $\mu = (f + \alpha m)^2$, atque $\omega = (f + \alpha s)^2$, hinc fit $\int \frac{dm}{\mu} = \frac{1}{\alpha f} - \frac{1}{\alpha (f + \alpha m)} = \frac{m}{f(f + \alpha m)}$, ſimilique modo $\int \frac{ds}{\omega} = \frac{s}{f(f + \alpha s)}$. Pro motu ergo habetur:

$$du - \frac{u dm}{m}\left(1 + \frac{\alpha m}{f}\right)^3 + 4 g m dm (f + \alpha m)^2 = 0$$

vnde inuento u erit $f^4 v v = \frac{f(f + \alpha m) u}{m}$.

Coroll 4.

82. Expandatur tubus ſuperne in infinitum ſecundum hanc aequationem $\omega\omega = \frac{a f^4}{a - s}$, ita vt initio ſuprema ſuperficies Aa fuerit infinita; eaque etiamnunc nihil ſubſederit, vt ſit elapſo tempore t altitudo $m = a$ et $\mu\mu = \frac{a f^4}{a - m} = \infty$. Quam ob cauſam aequatio differentialis ſtatim praebet $v v = 4 g m = 4 g a$, ita vt aqua conſtanter eadem celeritate effluat. Quia autem hic motus effluxus eſt vniformis ob $\frac{dv}{dt} = 0$ preſſio ad $z v$ ex aequatione primum inuenta ita definitur:

$$2g(p-k) = -2gs + 2ga\left(1-\frac{a+s}{a}\right) = 0$$

vbique ſcilicet preſſio aequalis erit preſſioni atmoſphaerae ſeu latera tubi extrinſecus aequaliter preſſa nullam vim ſuſtinent, iisque adeo remotis fluxus perinde fieret.

Exemplum 2.

Tab. IV. Fig. 55. 83. *Sit ſuperior tubi pars* A a B b *verticalis et aequaliter ampla inferior vero pars* B b O o *vtcunque curua et inaequaliter ampla, definire aquae ex eo effluentis motum, quamdiu ſuprema aquae ſuperficies* M m *in parte ſuperiori verſatur.*

Sit amplitudo partis ſuperioris $Mm = \mu = cc$, longitudo tubi inferioris $BzO = a$; altitudo $BC = b$ et $BM = x$; erit ergo $m = a + x$; et $\mathfrak{m} = b + x$; Tum ſumta longitudine $Oz = s$, cui reſpondeat amplitudo $zv = \omega$ et altitudo $Pz = z$, ſit valor integralis $\int \frac{ds}{\omega}$ per totam partem inferiorem extenſi $= B$ quandoquidem hic valor erit conſtans; tum igitur idem integrale ad ſuperficiem ſupremam Mm extenſum erit $= B + \frac{x}{cc} = \int \frac{dm}{\mu}$: vnde hanc habebimus aequationem ob $M = k$:

$$2gcc(b+x)dx = \tfrac{1}{2}ccvvdx\left(1-\frac{f^4}{c^4}\right) - f^4 v dv\left(B+\frac{x}{cc}\right)$$

quae poſito $f^4 vv\left(B + \frac{x}{cc}\right) = u$ abit in hanc:

$$du - \frac{c^4 u dx}{f^4(Bcc+x)} + 4gcc(b+x)dx = 0.$$

Ponatur $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$ et multiplicando per $(Bcc+x)^{-\lambda}$ erit integrale:

$vv =$

$$vv = C(Bcc+x)^{\lambda-1} - \frac{4\lambda g}{(1-\lambda)(2-\lambda)}((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)x).$$

Si iam deſcenſum ex A a incepiſſe aſſumamus exiſtente

$$AB = e, \text{ fiet } C = \frac{4\lambda g}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \cdot \frac{(2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)e}{(Bcc+e)^{\lambda-1}}$$

ideoque

$$vv = \frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)e)}{(1-\lambda)(2-\lambda)}\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}$$

$$- \frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)x)}{(1-\lambda)(2-\lambda)}$$

$$\text{vel } vv = \frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc)}{(1-\lambda)(2-\lambda)}\left(\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1} - 1\right)$$

$$+ \frac{4\lambda g}{2-\lambda}\left(e\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1} - x\right)$$

$$\text{ſeu } vv = \frac{4\lambda g(Bcc+(\lambda-2)b)}{(\lambda-1)(\lambda-2)}\left(1 - \left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}\right)$$

$$+ \frac{4\lambda g}{\lambda-2}\left(x - e\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}\right).$$

Ac ſi tempore $= t$ aqua ab A a ad M m ſubſederit erit $dt = \frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}$: cum autem aqua maxima celeritate effluit fiet

$$vv = \frac{4\lambda g(b+x)}{\lambda-1}$$

quod ergo euenit vbi erit

$$x = -Bcc + \frac{(Bcc+e)^{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}}}{(Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e)^{\frac{1}{\lambda-2}}}.$$

Denique pro preſſione p qua tubi pars inferior in ſectione zv vrgetur, aequatio ſupra inuenta hanc induet formam:

$$2g(k-p)(B+\frac{x}{cc})=(2gz-\frac{1}{2}vv(1-\frac{f^4}{\omega\omega}))(B+\frac{x}{cc})$$
$$-(2g(b+x)-\frac{1}{2}vv(1-\frac{1}{\lambda}))\int\frac{ds}{\omega}$$

vnde fit

$$p=k+\frac{cc(b+x-\frac{(\lambda-1)vv}{4\lambda g})\int\frac{ds}{\omega}}{Bcc+x}-z+\frac{vv}{4g}(1-\frac{f^4}{\omega\omega}).$$

Caſus hic imprimis notari meretur quo $\lambda=\frac{c^4}{f^4}$ eſt numerus valde magnus, quo caſu ex aequatione differentiali

$$4\lambda g(b+x)dx=(\lambda-1)vvdx-2(Bcc+x)vdv$$

ſtatim colligitur $vv=4g(b+x)$, ſcilicet quia orificium Oo eſt minimum, quaſi a primo ſtatim initio celeritas fit maxima, et preſſio in ſectione zv prodit

$$p=k-z+(b+x)(1-\frac{f^4}{\omega\omega}+\frac{cc}{\lambda}\int\frac{ds}{\omega})$$

et quia vltimum terminum per λ diuiſum omittere licet erit $p=k-z+(b+x)(1-\frac{f^4}{\omega\omega})$.

Coroll. 1.

84. Caſus iſte quo $\lambda=\frac{c^4}{f^4}$ eſt numerus valde magnus imprimis notari meretur, quia experimenta facillime ad eum accommodantur; quibus etiam euincitur celeritatem effluxus vix diſcrepare a valore inuento.

Coroll.

Coroll. 2.

85. Circa preſſiones autem in tubi parte inferiori B O, hoc caſu potiſſimum obſeruari conuenit, eas non ſolum vltra k diminui, ſed etiam negatiuas fieri poſſe. Si enim ſectio $z v = \omega$ aequalis ſit orificio ff, erit $p = k - z = k - z$ P, at ſi haec ſectio minor eſt foramine ff preſſio multo magis diminuitur.

Coroll. 3.

86. Quando autem preſſio p reuera fit negatiua fluidi continuitas tollitur, et quia latera tubi deſerendo ſe in arctius ſpatium contrahit, neque amplius legem ſtabilitam ſequitur. Quamdiu autem preſſio eſt poſitiua quidem ſed minor quam k, tum quia preſſio externa ſuperat internam ſi tubus ibi foraminulo perforetur, aër aliudue fluidum extra poſitum intrudetur, ita vt tubus ibi vi attractrice praeditus videatur.

Scholion 1.

89. Huc fere redeunt quae de effluxu aquae ex tubis vel vaſis cuiuscunque formae tradi ſolent, quae quia iam copioſe ac diligenter ſunt pertractata, hic fuſius euoluere nolo: idque adeo ob hanc potiſſimum rationem, quod in plerisque caſibus, ad quos haec Theoria applicari ſolet, calculus non mediocriter a veritate aberrare deprehendatur. Statim enim ac vas, vti fig. 54. notabilem prae foramine O o

habet

habet amplitudinem manifeſtum eſt tota ſtrata zv non aequaliter ſubſidere, ſed partes foramini imminentes magis ad deſcenſum impelli. Tum vero vbi tubus ſubito in foramen coarctatur, ibi certe neutiquam aquae motus ita eſt comparatus, vti in hac ſectione aſſumimus. Tantopere potius verus motus ab hac hypotheſi diſcrepabit vt mirandum ſit experimenta non multo magis a calculo diſcrepare. Interim tamen diſſenſus inſignis ſe prodit, quando fundus vaſis OC tenuiſſimo foramine Oo eſt pertuſus, quo caſu in vena effluente ingens contractio animaduertitur inde oriunda quod aqua a lateribus erumpens oblique effluit; quo fit vt per foramen minor aquae copia quam pro eius amplitudine eiiciatur. Cui incommodo ii, qui experimenta calculo conſentanea reddere volunt ita medentur, vt foramini tubulum cylindricum inſerere ſoleant, vt hoc modo obliquitas motus euitetur.

Scholion. 2.

88. Caſus quo $\lambda = \frac{e^4}{f^4}$ eſt numerus vehementer magnus euolutionem ſingularem poſtulat, qua dilucide explicetur, quomodo aqua, dum eius motus a quiete incipit ſubito maximam celeritatem adipiſcatur. Hunc in finem formula $\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}$ rite euolui oportet, vt motum ab initio genitum exhibeat. Statim ergo ac motus incipit altitudo x fit minor quam e, ponamus igitur $\frac{Bcc+x}{Bcc+e} = 1 - \frac{y}{\lambda-1}$, vt ſit

$x = e$

$x = e - \frac{y(Bcc+e)}{\lambda - 1}$, ac denotante ε numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, erit proxime $\left(1 - \frac{y}{\lambda - 1}\right)^{\lambda - 1} = \varepsilon^{-y}$. Habebimus ergo:

$$vv = \frac{4\lambda g(Bcc + \lambda b)}{\lambda\lambda}(1 - \varepsilon^{-y}) + \frac{4\lambda g}{\lambda}(x - e\varepsilon^{-y}) \text{ ſeu}$$

$$vv = 4gb(1 - \varepsilon^{-y}) + 4g(x - e\varepsilon^{-y}) = 4g(b + x) - 4g(b + e)\varepsilon^{-y}$$

vnde patet in ipſo initio, vbi $x = e$ et $y = 0$, ob $\varepsilon^{-y} = 1$ reuera fieri $v = 0$, ſtatim autem, atque aqua ſubſederit per interuallum minimum $\frac{y(Bcc+e)}{\lambda - 1}$, quoniam y valorem notabilem ſortitur, quantitatem ε^{-y} euaneſcere, ideoque fieri $vv = 4g(b + x)$. Deinde vero ex aequatione pro tempore $dt = \frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}$, quoniam in valore ipſius vv loco x ſcribere licet e, vt ſit $vv = 4g(b + e)(1 - \varepsilon^{-y})$ erit

$$dt = \frac{-dx\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{g(b+e)(1 - \varepsilon^{-y})}} = \frac{dy(Bcc + e)}{2\sqrt{\lambda g(b+e)(1 - \varepsilon^{-y})}},$$

vnde colligitur integrando

$$t = \frac{Bcc + e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{(1 - \varepsilon^{-y})}}{1 - \sqrt{(1 - \varepsilon^{-y})}}.$$

Simul igitur atque ε^{-y} fit fractio quam minima, ob

$$l\,\frac{1 + \sqrt{(1 - \varepsilon^{-y})}}{1 - \sqrt{(1 - \varepsilon^{-y})}} = l(4\varepsilon^{y} - 1) = l4\varepsilon^{y} = y + l4 \text{ erit}$$

$$t = \frac{Bcc + e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}(y + l4) = \frac{Bcc + e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}\left(\frac{\lambda(e - x)}{Bcc + e} + l4\right).$$

 Cum

Cum porro celeritas euadat maxima vbi

$$x = -Bcc + (Bcc + e)\left(\frac{Bcc + e}{Bcc + \lambda(b + e)}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = e - \frac{(Bcc + e)l\lambda}{\lambda}$$

eueniet hoc vbi $y = l\lambda$, ideoque poſtquam ab initio effluxerit tempus $t = \frac{(Bcc + e)l\lambda}{2\sqrt{\lambda g(b + e)}}$, quod cum $\frac{l\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ euaneſcat ſi $\lambda = \infty$, erit quam minimum ita vt aqua primo quaſi inſtanti maximam celeritatem adipiſcatur. Interim hinc intelligitur quo longior ſimulque anguſtior fuerit tubi pars inferior B O eo tardius ad celeritatem maximam peruentum iri.

Scholion. 3.

89. Euoluto caſu quo $\lambda = \frac{e^4}{f^4}$ eſt quaſi numerus infinitus, etiam is quo λ eſt numerus mediocriter magnus accuratiori euolutione dignus videtur. Cum igitur inuenerimus:

$$\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)vv}{4\lambda g} = Bcc + (\lambda - 2)b + (\lambda - 1)x$$
$$-(Bcc + (\lambda - 2)b + (\lambda - 1)e)\left(\frac{Bcc + x}{Bcc + e}\right)^{\lambda - 1}$$

ponamus vt ante $\frac{Bcc + x}{Bcc + e} = 1 - \frac{y}{\lambda - 1}$, vt ſit $y = \frac{(\lambda - 1)(e - x)}{Bcc + e}$; et quia totum negotium ad commodam euolutionem formulae $\left(1 - \frac{y}{\lambda - 1}\right)^{\lambda - 1}$ reducitur poſita ea $= Y$ fit $lY = (\lambda - 1)l(1 - \frac{y}{\lambda - 1})$, ac quia ſemper eſt $y < \lambda - 1$, ob $\frac{y}{\lambda - 1} = \frac{e - x}{Bcc + e}$ erit

$$lY = -y - \frac{yy}{2(\lambda - 1)} - \frac{y^3}{3(\lambda - 1)^2} - \frac{y^4}{4(\lambda - 1)^3} - \text{etc.}$$

quae

quae ſeries vtique valde conuergit. Hinc ergo invento valore Y erit:

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)vv}{4\lambda g}=(Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e)(1-Y)-(Bcc+e)y$$

vbi eſt $y=(\lambda-2)(1-Y^{\frac{1}{\lambda-1}})$ et $x=(Bcc+e)Y^{\frac{1}{\lambda-1}}-Bcc$

Cum iam celeritas maxima ſit:

$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)vv}{4\lambda g}=(\lambda-2)(b+x)$, hic locus definitur hac aequatione

$$Y^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}=\frac{Bcc+e}{Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e}$$

et poſito

$$\frac{Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e}{Bcc+e}=E,\ \text{fit}\ Y^{\frac{1}{\lambda-1}}=E^{-\frac{1}{\lambda-1}}=\varepsilon^{-\frac{1}{\lambda-1}lE}$$
$$=1-\frac{lE}{\lambda-1}+\frac{(lE)^2}{2(\lambda-1)^2}-\frac{(lE)^3}{6(\lambda-1)^3}+\text{etc.}$$

vnde celeritas erit maxima vbi

$$x=e-(Bcc+e)(\frac{lE}{\lambda-1}-\frac{(lE)^2}{2(\lambda-1)^2}+\frac{(lE)^3}{6(\lambda-1)^3}-\text{etc.}$$

Cum nunc porro ſit

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)vv}{4\lambda g}=(Bcc+e)(E(1-Y)-y)$$

erit pro tempore

$$dt=\frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}=\frac{-Y^{\frac{2-\lambda}{\lambda-1}}dY\sqrt{(\lambda-2)(Bcc+e)}}{2\sqrt{(\lambda-1)g(E(1-Y)-(\lambda-1)(1-Y^{\frac{1}{\lambda-1}})}}$$

et facto $Y=u^{\lambda-1}$, fit

$$dt=\frac{-du\sqrt{(\lambda-1)(\lambda-2)(Bcc+e)}}{2\sqrt{g(E-\lambda+1+(\lambda-1)u-Eu^{\lambda-1})}}$$

 Verum

Verum calculus commodius inſtituetur ſolam quantitatem y retinendo et ponendo:

$$Y = \varepsilon^{-y}\left(1 - \frac{yy}{2(\lambda-1)} - \frac{y^3}{3(\lambda-1)^2} + \frac{y^4}{8(\lambda-1)^2}\right)$$

vnde ſolutio §. praeced. propius ad veritatem perducetur, dum etiam termini per λ diuiſi introducuntur. Sed quia haec mere ſunt analytica, ea hic vberius non petracto.

Problema 55.

Tab. V. Fig. 56. 90. Si tubus, dum aqua per orificium Oo effluit in altero termino Aa continuo nouum aquae ſupplementum accipiat vt perpetuo ad Aa vsque plenus conſeruetur, ibique aqua a vi quacunque iugiter protrudatur, eius motum definire.

Solutio.

Poſita amplitudine orificii $Oo = ff$ ſit v celeritas, qua iam elapſo tempore $= t$, aqua ibi effluit in alio vero loco quocunque z, cuius diſtantia ab initio A ſit $Az = s$, tubique amplitudo $zv = \omega$, et altitudo ſuper plano horizontali fixo $z\pi = z$, ſiquidem curuae $\alpha\pi\omega$ applicatae ſingulorum tubi punctorum altitudines ſuper eodem plano exhibere aſſumuntur. His poſitis ſi in ſectione zv ſtatuatur preſſio $= p$, principiia motus hanc ſuppeditant aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 vv}{2\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}.$$

Sit

Sit nunc preſſio in $Aa = L$ amplitudo $Aa = cc$ et altitudo $A\alpha = \mathfrak{a}$, et quia hic $s = 0$, ſimulque integrale $\int \frac{ds}{\omega}$ euaneſcit, ob $p = L$, $z = \mathfrak{a}$, et $\omega = cc$, erit:

$$2gL = \Delta : t - 2g\mathfrak{a} - \frac{f^4 vv}{2c^4}$$

Deinde pro orificio Oo, ſit ibi preſſio $= k$, pondus atmoſphaerae referens, et valor integralis $\int \frac{ds}{\omega}$ per totum tubum AO extenſi fiat $= \mathfrak{O}$, altitudo vero $O\omega = \mathfrak{o}$. Quocirca ob $p = k$, $z = \mathfrak{o}$ et $\omega = ff$ habebitur;

$$2gk = \Delta : t - 2g\mathfrak{o} - \tfrac{1}{2}vv - \frac{ff\,dv}{dt}.\mathfrak{O}$$

Nunc haec aequatio ab illa ſubtracta relinquit

$$2g(L-k) = 2g(\mathfrak{o}-\mathfrak{a}) + \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) + \frac{ff\,dv}{dt}.\mathfrak{O} \text{ ſeu}$$

$$4g(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o})dt - vv\,dt\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) = 2\mathfrak{O}ff\,dv$$

vnde cum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{O}$ ſint quantitates conſtantes, preſſio vero L functionem temporis denotare poſſit, ſiquidem ea cum tempore varietur, celeritas v ad quoduis tempus definiri debet. Poſita autem preſſione L conſtante huiusmodi aequatio erit reſoluenda:

$$dt = \frac{A\,dv}{B \pm Cvv},$$

exiſtente

$$A = 2\mathfrak{O}ff;\ B = 4g(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o}) \text{ et } \pm C = \frac{f^4}{c^4} - 1;$$

tres ergo caſus ſunt euoluendi.

I. Si $cc = ff$ ſeu amplitudo Aa orificio $Oo = ff$ aequalis, erit $C = 0$ et $t = \frac{Av}{B}$ ſeu $v = \frac{B}{A}t + \text{Conſt.}$ vnde ſi $B > 0$ celeritas continuo creſcere poſſet.

II. Si $cc > ff$ ſeu amplitudo Aa orificium Oo ſuperet, poſito $C = 1 - \frac{f^4}{c^4}$ aequatio $dt = \frac{A\,dv}{B - Cvv}$ integrata dat $t = \frac{A}{2\sqrt{BC}}\, l\, \frac{\sqrt{B} + v\sqrt{C}}{\sqrt{B} - v\sqrt{C}} +$ Conſt. quae conſtans, ſi motus a quiete inceperit euaneſcit; hocque caſu celeritas quidem creſcit, ſed elapſo etiam tempore infinito non vltra $v = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{C}}$ augetur.

III. Si $cc < ff$ ſeu amplitudo Aa minor ſit orificio Oo, poſito $C = \frac{f^4}{c^4} - 1$, aequatio $dt = \frac{A\,dv}{B + Cvv}$ integrata dat:

$$t = \frac{A}{\sqrt{BC}} \text{ Ang. tang. } \frac{v\sqrt{C}}{\sqrt{B}}, \quad \text{ſeu } v = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{C}} \text{ tang. } \frac{t\sqrt{BC}}{A},$$

vbi hoc memoratu dignum euenit, vt elapſo tempore $t = \frac{A}{\sqrt{BC}} \cdot \frac{\pi}{2}$ celeritas iam infinita euadat.

Inuenta celeritate effluxus v ad quoduis tempus t, in quouis loco medio zv preſſio p ita exprimitur:

$$2g(p-k) = 2g(\mathfrak{o} - z) + \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right) + \frac{ff\,dv}{dt}\left(\mathfrak{O} - \int\frac{ds}{\omega}\right)$$

quae eliſa formula differentiali $\frac{ff\,dv}{dt}$ praebet:

$$4g(p - L + z - \mathfrak{a})\mathfrak{O} = vv\left(\frac{f^4}{c^4} - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)\mathfrak{O} + vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right)\int\frac{ds}{\omega}$$
$$- 4g(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o})\int\frac{ds}{\omega}$$

ſicque omnia quae ad motum pertinent ſunt determinata.

Coroll. 1.

91. Si motus ad vniformitatem peruenerit, ita vt iam aqua conſtanter eadem celeritate per orificium

ficium Oo expellatur, ob $dv = 0$ habebitur haec aequatio:

$$4g(\text{L} - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o}) = vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right)$$

vnde ſi amplitudo in Aa aequalis ſit orificio Oo vti in capite praecedente preſſio in Aa debet eſſe $\text{L} = k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$, neque hinc celeritas v ipſa determinatur.

Coroll. 2.

92. At ſi amplitudo A$a = cc$ maior fuerit quam orificium O$o = ff$, pro motus vniformitate celeritas effluxus v ita definitur vt ſit:

$$vv = \frac{4gc^4(\text{L} - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o})}{c^4 - f^4}.$$

Hoc ergo caſu neceſſe eſt vt ſit $\text{L} > k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$, atque ex hoc exceſſu celeritas effluxus determinatur.

Coroll. 3.

93. Sin autem amplitudo A$a = cc$ minor ſit orificio O$o = ff$, motus vniformitas hanc praebet aequationem

$$vv = \frac{4gc^4(k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a} - \text{L})}{f^4 - c^4}:$$

vnde patet motum aequabilem obtineri non poſſe niſi ſit $\text{L} < k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$; atque ex hoc defectu celeritas effluxus determinatur.

Scholion 1.

94. Omnia haec certe ſunt maxime paradoxa, cum ex eadem preſſione L, qua aqua in ſectione

A a

A *a* vrgetur, celeritas quantumuis magna oriri poſſe ſit inuenta; atque hoc imprimis videbitur abſurdum, quod in caſu tertio a vi finita L tempore finito aquae celeritas adeo infinita imprimi poſſit. Haec autem abſurditas ſtatim euaneſcet, ſi modo hypotheſin, cui totum problema innititur, attentius perpendamus; aſſumimus enim dum aqua per ſectionem A *a* propellitur, continuo aliunde nouam aquae copiam eadem celeritate eo influere, neque hic curamus, vnde haec aqua adueniat, et a quanam vi ipſi hic motus inducatur; longe diuerſa ſcilicet haec vis eſt a vi L quae nihil aliud agit, niſi vt aquam iam illa celeritate intruſam vlterius per tubum propellat. Dum ergo haec vis L valeat aquae per A *a* ingreſſae motum accelerare celeritas effluxus increſcet, ideoque per hypotheſin aqua noua etiam continuo maiori celeritate ab illa vi peregrina ingeri aſſumitur. Quando igitur calculus oſtendit, celeritatem mox fieri adeo infinitam, hic effectus minime vi noſtrae finitae L, aquam per tubum propellenti, ſed manifeſto vi illi peregrinae, quae hoc caſu vtique ſit infinita tribui debet; quippe quae aquam nouam celeritate infinita in tubum compellit. Atque eidem cauſae eſt etiam illud paradoxon adſcribendum quod celeritas effluxus ipſa in problemate non determinetur; quo celerius enim et copioſius aqua noua a vi illa peregrina, quaecunque ea ſit, ſubminiſtratur, eo celerius etiam eadem preſſio L in A *a* eam per tubum propellere valebit; quoniam igitur illius vis peregrinae nulla ratio in

noſtro

noſtro calculo habetur, mirum non eſt, quod calculus tam immania paradoxa in ſe implicet, quae autem re bene expenſa ſponte diluuntur.

Scholion 2.

95. Introductio autem eiusmodi potentiae L, quae iugiter pari vi premat ſiue aqua per tubum celerius promoueatur ſiue tardius, a natura virium, quae ad aquam propellendam vſurpantur, maxime abhorret, cum omnes iſtae vires ita ſint comparatae, vt quo celerius iam aqua per tubum promovetur, eo magis debilitentur. Quamobrem ſi hoc problema ad caſus reales, quibus aqua ad certam altitudinem eleuari debet, accommodare velimus, naturam earum virium, quibus ad hunc finem eſt vtendum, probe conſiderari oportet. Quam indolem cum iam in praecedente capite dilucide expoſuerim inde ad praeſens inſtitutum id tantum repeto, ad opus peragendum adhiberi certam vim F quae certa velocitate e agat, ita vt iam tota quaeſtio eo redeat; quomodo machinam inſtrui conueniat, vt ab iſta vi hac celeritate agente aqua vniformiter per tubum propelli poſſit.

Problema 56.

96. Si aqua per tubum vtcunque inaequaliter amplum A a O o ad altitudinem datam O $\omega = a$ motu vniformi eleuari debeat a data vi $= F$, quae data celeritate $= e$ operetur, machinam inuenire Tab. IV. Fig. 49.

cuius ope hic effectus obtineri queat, ſimulque copiam aquae dato tempore eleuandae definire.

Solutio.

Quia omnis machinae indoles in hoc conſiſtit, vt vim qua agitatur, in alium locum transferat, eamque ſimul in data ratione vel augeat vel minuat, ponamus machinam quaeſitam id praeſtare, vt vis aquam per orificium inferius A a propellens fiat $= n$ F; atque ex natura machinarum iſta vis hic aget celeritate $= \frac{e}{n}$, ita vt machinae conſtructio a ſolo numero n pendeat, quem ergo definiri oportet. Nunc praecedens problema in ſubſidium vocando, quia amplitudo A a poſita eſt $= cc$ in quam vis n F agit, preſſio ibi exerta erit $= \frac{nF}{cc}$, quae cum preſſione atmoſphaerae k adiuuetur, habebimus preſſionem ibi poſitam $L = \frac{nF}{cc} + k$; atque aqua per orificium inferius A a propelletur celeritate $= \frac{e}{n}$. Quare cum ſuperioris orificii O o amplitudo ſit poſita $= ff$, aqua ibi expelletur celeritate $= \frac{cce}{nff}$, ita vt ſit $v = \frac{cce}{nff}$: et $dv = 0$. Nunc porro altitudo orificii O o ante poſita $= o$ hic eſt O $\omega = a$, inferioris vero A a nulla ſeu $a = 0$, ex quo aequatio pro motu ibi inuenta induet hanc formam:

$$4g\left(\frac{nF}{cc} - a\right) - \frac{c^4 ee}{nnf^4}\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) = 0 \text{ ſeu}$$

$$4gnn\left(\frac{nF}{cc} - a\right) = ee\left(\frac{c^4}{f^4} - 1\right)$$

vnde

vnde numerum n ideoque machinam definire licet. Tum autem neceſſe eſt vt aqua aliunde iugiter celeritate $= \frac{e}{n}$ in orificium A a aduehatur; ſingulisque minutis ſecundis aquae aduectae volumen ſit $= \frac{cce}{n}$, tantum autem ſingulis minutis ſecundis per orificium ſuperius O o exonerabitur.

Deinde ſi in loco tubi quouis z ponatur amplitudo $z v = \omega$, altitudo $z \pi = z$, et longitudo A $z = s$, preſſio vero ibidem $= p$, erit ex problemate praecedente:

$$2g(p-k) = 2g(a-z) + \frac{c^4 ee}{2nnf^4}\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)$$

vnde ſi per praecedentem aequationem $\frac{c^4 ee}{nnf^4}$ eliminemus fit

$$p = k - z + \left(a\left(\frac{f^4}{\omega\omega} - \frac{f^4}{c^4}\right) + \frac{n\mathrm{F}}{cc}\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)\right) : \left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right).$$

Coroll. 1.

97. Si ambo orificia A a et O o ſunt aequalia, ſeu $cc = ff$ fit $\frac{n\mathrm{F}}{cc} - a = 0$, ideoque $n = \frac{acc}{\mathrm{F}}$; pro machinae inſtructione tum ſingulis minutis ſecundis eiicitur aquae volumen $= \frac{\mathrm{F}e}{a}$; tanta vero copia interea continuo celeritate $= \frac{\mathrm{F}e}{acc}$ in orificium A a ſuppeditari debet; ad quod peculiari opus eſt vi, ad quam hic non reſpicimus.

Coroll. 2.

68. Si ſit $cc > ff$, ideoque $\frac{c^4}{f^4} - 1 > 0$, fit $\frac{n}{cc} > \frac{a}{\mathrm{F}}$, hinc aquae volumen vno minuto ſecundo

eiectum erit $< \frac{Fe}{a}$ ac tantumdem aquae in orificium A a aduehi debet celeritate minore quam $\frac{Fe}{acc}$, ad quod minori vi peculiari opus eſt quam caſu praecedente.

Coroll. 3.

99. Sin autem orificium ſuperius ff minus ſit quam inferius cc, prodit $\frac{n}{cc} < \frac{a}{F}$, et volumen aquae vno minuto ſecundo eiectae fit $> \frac{Fe}{a}$, ita vt hoc modo plus aquae eleuetur quam caſu primo $ff = cc$; verum etiam tanto plus aquae a vi illa peregrina in orificium A a, idque maiori celeritate quam $\frac{Fe}{acc}$ aduehi debet.

Scholion.

100. Mirum igitur non debet videri, quod ab eadem vi machinam mouente modo maior modo minor aquae copia ad eandem altitudinem eleuetur, prout ſuperius orificium O o fuerit maius vel minus inferiore A a. Si enim integrum effectum perpendere velimus, etiam integra cauſa eſt ſpectanda, quae habetur, ſi ad eam vim, qua machinam agitari aſſumimus, inſuper adiungatur illa vis, quae ad aquam continuo in orificium A a ingerendam requiritur, hae autem ambae vires iunctim ſumtae eo caſu quo minor aquae copia eleuatur vtique minorem praebent ſummam quam altero caſu, quo maior copia eleuatur, ita vt hic nihil occurrat, quod aequalitati inter cauſam et effectum aduerſetur.

Quo-

Quoniam vero in praxi eadem vis qua aqua per tubum propellitur, etiam aquam continuo in tubum ſuppeditare debet, quatenus hic duplex effectus ab eadem cauſa producitur, in vſum practicum accuratius eſt inueſtigandum. Cum igitur antliarum ope aqua tam in tubum attrahi, quam per eum propelli ſoleat, huic inueſtigationi, quae in praxi ampliſſimum habet vſum, caput peculiare deſtinamus.

CAPVT IV.

DE ELEVATIONE AQVAE ANTLIARVM OPE.

Problema 57.

101. Si tubus cylindricus $BbCc$ inferius ad Aa vehementer ampliatus aquae ſtagnanti Ee ſit immerſus, in eoque embolus POo data vi ſurſum trahatur, vt ob preſſionem atmoſphaerae aqua continuo ſuccedat, hunc aquae motum aſcenſus definire. Tab. V. Fig. 57.

Solutio.

Elapſo tempore t embolus cum aqua iam eleuatus ſit ad altitudinem $CO = x$; ſitque amplitudo tubi $Oo = ff$, et celeritas tam emboli quam aquae aſcendentis $= v$. Vis autem embolum ſurſum

 tollens

tollens ſit $= ffu$, et cum embolus ab atmoſphaera deprimatur preſſione $= k$, foret preſſio in $Oo = k - u$ ſi nullus adeſſet motus, cum autem motus mutationem afferat, ponatur ea $= \pi$, donec ex ſequentibus determinetur. Sectio porro Aa ampliſſima ponatur $= cc$, eiusque profunditas infra ſuperficiem aqua $C\alpha = \alpha$, eritque preſſio in $Aa = k + \alpha$. His poſitis ſolutio problematis 55. huc accommodabitur, ſi ponamus $L = k + \alpha$, $\mathfrak{a} = -\alpha$, $\mathfrak{o} = x$, et quia cc eſt valde magnum loco $\mathfrak{O} = \int \frac{ds}{\omega}$ habebimus $\frac{x}{ff}$, quod autem ibi erat k hic nobis eſt π; vnde fit $L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o} = k - \pi - x$. Sicque hanc adipiſcimur aequationem:

$$4g(k-\pi-x)dt - vvdt = 2xdv$$

eleuatio autem elementaris dat $dt = \frac{dx}{v}$, eritque

$$2xvdv + vvdx = 4g(k-\pi-x)dx$$

et integrando

$$vvx = 4g\int(k-\pi-x)dx$$

hinc ergo fiet

$$vvx = 4g(kx - \tfrac{1}{2}xx - \int\pi dx)$$

et nunc tantum reſtat vt preſſionem adhuc incognitam π inueſtigemus; cuius valorem ex motu emboli repeti oportet. Ponamus ergo totius emboli maſſam aequari maſſae aqueae cuius volumen eſt $= ffh$, quo ſimul eius pondus exprimitur, et quia frictio emboli maxime motui obſtat, ponatur ea $= \delta ffh$. Iam ob preſſionem inter embolum et aquam $= \pi$

ab

ab ea embolus ſurſum vrgetur vi motrice $= \pi ff$, cui addatur vis actu ſurſum tollens ffu; a ſumma vero ſubtrahatur preſſio atmoſphaerae ffk, ita vt vis ſurſum pellens ſit $= ff(\pi + u - k)$ a qua porro auferri debet reſiſtentia tam a pondere emboli quam a frictione nata, quae eſt $= (1 + \delta) ffb$ vnde ob maſſam mouendam $= ffb$ vis acceleratrix prodit $= \frac{\pi + u - k - (1+\delta)b}{b}$. Quia nunc celeritas emboli ſurſum directa eſt v, qua tempuſculo dt per ſpatiolum dx eleuatur erit acceleratio $= \frac{dv}{dt} = \frac{v\,dv}{dx}$, vnde naſcitur haec aequatio $\frac{v\,dv}{dx} = \frac{2g}{b}(\pi + u - k - (1 + \delta)b)$, quae in $2\,b\,dx$ ducta et integrata praebet

$$bvv = 4g(\int \pi\,dx + \int u\,dx - kx - (1 + \delta)bx)$$

ante vero inuenimus

$$xvv = 4g(kx - \tfrac{1}{2}xx - \int \pi\,dx);$$

quarum aequationum additione formula incognita $\int \pi\,dx$ eliditur, oriturque

$$(b + x)vv = 4g(\int u\,dx - (1 + \delta)bx - \tfrac{1}{2}xx)$$

qua aequatione celeritas in quauis altitudine $CO = x$ determinatur. Sin autem ex illis duabus aequationibus vv eliminemus, peruenimus ad hanc aequationem: $(b + x)\int \pi\,dx - k(b + x)x + x\int u\,dx - (\tfrac{1}{2} + \delta)bxx = 0$ ſeu

$$\int \pi\,dx = kx + \frac{(\tfrac{1}{2} + \delta)bxx}{b + x} - \frac{x\int u\,dx}{b + x}$$

quae differentiata monſtrat preſſionem illam incognitam

$$\pi = k + \frac{(\frac{1}{2}+\delta)b(2bx+xx)}{(b+x)^2} - \frac{b\int u\,dx}{(b+x)^2} - \frac{ux}{b+x}$$

quam ideo tantum noſſe oportet, vt quando ea ſit negatiua agnoſcamus aquam non amplius embolum ſequi ſed inter eum et aquam ſpatium vacuum relinqui, continuitate, cui calculus innititur, e medio ſublata.

Coroll. I.

102. Cum igitur inuenerimus eſſe:

$$vv = \frac{4g(\int u\,dx - (1+\delta)bx - \frac{1}{2}xx)}{b+x}$$

niſi haec quantitas ſit poſitiua, nullus motus producetur; iam igitur primo motus initio vbi $x = 0$ eſſe debet $u > (1+\delta)b$. Poſt motum vero creſcente x continuo maiori opus eſt vi.

Coroll I.

103. Si vis attollens u ſit conſtans, fiet:

$$vv = \frac{4gx(u-(1+\delta)b-\frac{1}{2}x)}{b+x}$$

vnde patet celeritatem v quae ab initio creuerat, iterum decreſcere et tandem euaneſcere cum euaſerit $x = 2u - 2(1+\delta)b$ tum autem prodit preſſio

$$\pi = k + (\tfrac{1}{2}+\delta)b - u + \frac{bb}{4(u-(\frac{1}{2}+\delta)b)}$$

quae dum ne ſit negatiua, aqua eo vsque embolum ſequetur.

Coroll.

Coroll 3.

104. Vt igitur cognoſcamus, ad quantam altitudinem aquam eleuare liceat, faciamus illam preſſionem euaneſcentem et poſito breuitatis gratia $u-(\frac{1}{2}+\delta)h=r$ erit:

$4kr-4rr+hh=0$ hincque $r=\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\sqrt{(hh-kk)}$ et

$$u=(\tfrac{1}{2}+\delta)h+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}\sqrt{(hh+kk)}$$

Atque ab hac vi aqua attolletur ad altitudinem

$$x=k+\sqrt{(hh+kk)}-h$$

vnde patet quo minor ſit emboli maſſa, eo maiorem fore hanc altitudinem, quae adeo vsque ad $2k$ increſcere poſſet ſi eſſet $h=0$. Ad hoc autem frictionem nihil conferre, notari meretur.

Scholion 1.

105. Tubo $BbCc$ ideo infra partem ampliatam $CcAa$ anneximus ne opus eſſet aquae in tubum intranti ſubito celeritatem finitam tribuere cum ante quieuiſſet, cum autem eius ratio prorſus ex calculo exceſſerit, intelligimus aquae eleuationem eandem fore, etiamſi tubus totus cylindricus adhibeatur, eiusque inferius orificium Cc aquae ſtagnanti immergatur. Neque vero putandum eſt tum aquam per Cc intrantem ſubito celeritatem finitam accipere, ſed potius in aqua externa circa orificium Cc eiusmodi motus generabitur quaſi talis pars amplata $CcAa$ eſſet annexa. Deinde imprimis neceſſe erat cum motus generatione etiam emboli motum coniungere eiusque tam inertiae quam

frictionis rationem habere quoniam in his obſtaculis ſuperandis notabilis virium ſollicitantium pars inſumitur, quod potiſſimum in ipſo motus initio maximum affert momentum. Si enim quod fieri nequit emboli tam inertia quam frictio euaneſceret, vt vis attollens cum nulla plane maſſa mouenda eſſet coniuncta ob $h = 0$, foret $vv = \frac{4g(\int u\,dx - \frac{1}{2}xx)}{x}$, ideoque ſi vis u eſſet finita poſito $x = 0$ ſtatim ab initio celeritas adeo orietur infinita in aqua, mox quidem imminuenda verum hoc calculi incommodum etiam nunquam in mundo locum habere poteſt quia nullae dantur vires quae non propriam quandam maſſam mouendam ſibi habeant adiunctam.

Scholion 2.

106. Huiusmodi cylindrus embolo inſtructus antlia vocatur, cuius ope dum embolus ſurſum attollitur, orificio inferiori Cc aquae ſtagnanti immerſo aqua ſimul in cylindrum eleuatur, vel potius a preſſione atmoſphaerae intruditur. Etſi enim in formula pro celeritate v inuenta preſſio atmoſphaerae k non reperitur, in ea tamen conditione manifeſto inuoluitur, quod aqua embolum in tubo aſcendentem non ſequatur, niſi preſſio π inter embolum et aquam ſit poſitiua, ſi enim atmoſphaerae preſſio k eſſet nulla, ſtatim ab initio poſito $x = 0$, foret preſſio π nulla, neque propterea aqua embolum ſequeretur ſimulque totus calculus pro ſequenti motu ſublata con-

continuitate per ſe corrueret. Ex quo patet ſolam atmoſphaerae preſſionem k in cauſa eſſe cur aqua in his antliis eleuetur. Hic autem contra vulgarem opinionem calculus noſter declarat fieri poſſe, vt aqua longe vltra altitudinem k, quae 32 pedum aeſtimatur, atque adeo fere duplo maiorem eleuetur ſi modo inertia emboli b ſatis ſit parua et vis elevans ſatis magna. Ex coroll. 3 autem ad hoc neceſſe eſt vt ſit vis embolum attollens

$$u = (\tfrac{1}{2} + \delta)b + \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}\sqrt{(bb+kk)}$$

quo aqua ad altitudinem $k + \sqrt{(bb+kk)} - b$ elevari queat, tum vero in quauis altitudine minore x pro motus celeritate v erit

$$vv = \frac{2gx(k+\sqrt{(bb+kk)}-b-x)}{b+x},$$

quae celeritas fit maxima vbi

$$x = -b + \sqrt{(bk + b\sqrt{(bb+kk)})}$$

ipſaque celeritas maxima erit

$$= (\sqrt{(bk+b\sqrt{(bb+kk)})} - b)\sqrt{\tfrac{2g}{b}}.$$

Si exempli gratia eſſet $b = \frac{3}{4}k$, aqua ad altitudinem $= \frac{3}{2}k$ eleuari poſſet a vi $u = \frac{3}{2}k + \frac{3}{4}\delta k$, et maxima celeritas foret $= \frac{3-\sqrt{3}}{2}\sqrt{2gk}$, qua vno minuto ſecundo ſpatium $19\frac{1}{2}$ pedum percurritur.

Scholion 3.

107. In vſu autem huiusmodi antliarum quo aqua, poſtquam modo expoſito in cylindrum fuerit eleuata, depreſſione emboli ad altitudinem multo maio- Tab. V. Fig. 58.

maiorem propelli ſolet, plerumque altitudo antliae ſatis parua eſſe ſolet, ita vt ille caſus tantae altitudinis neutiquam locum habeat, neque multo minus ſit verendum, vt aqua embolum ſequatur. Tales antliae in ſectione C c diaphragma habent foramine pertuſum quod valuula m ita operitur, vt dum embolus aquam attrahit, valuula haec aperiatur, aquae inferiori viam aſcendendi patefaciens. Tum vero plerumque haec ſectio C c non in ſuperficie aquae ſtagnantis Ee ſed ad quandam altitudinem AC ſupra eam ſtatuitur, prout circumſtantiae exigere videntur, ita vt inferior haec tubi pars C A ſemper aqua maneat plena indeque in ſuperiorem cauitatem ſit haurienda. Ob hunc autem tubum annexum, ſi eius altitudinem ſuper aqua ſtagnante ponamus $AC = \alpha$ manente in ſuperiori ſpatio $CO = x$, praecedens determinatio aliquam mutationem poſtulat, qua fit $vv = \frac{4g(\int u\,dx - \alpha x - (1+\delta)bx - \frac{1}{2}xx)}{b + \alpha + x}$ ſiquidem inferior tubus C A ſit aeque amplus ac ſuperior BC, ſin autem eſſet amplior in denominatore quantitas α minor accipi deberet, contra vero maior, quandoquidem haec pars ex quantitate $\mathfrak{D} = \int \frac{ds}{\omega}$ naſcitur in numeratore vero ſemper α ipſam altitudinem A C denotat. Quando vero embolus Oo ad certam altitudinem fuerit eleuatus tum iterum deprimitur, ſimulque valuula m clauditur, antliae autem infra inſertus eſt alius D d V v, cuius orificium D d hactenus ope valuulae n erat clauſum nunc vero embolo depreſſo aperitur, vt aqua ante

hauſta

hauſta per tubum D d V v propelli queat, qui motus quomodo eueniat, in ſequenti problemate inueſtigabimus.

Problema 58.

108. Cum antlia B b C c fuerit vsque ad B b aqua repleta, tum vero embolus data vi detrudatur, et aqua per tubum quemcunque D d Z z expellatur quem tubum iam ab initio aqua plenum fuiſſe aſſumimus, hunc motum quo aqua per orificium Z z eiicietur, inueſtigare. Tab. V. Fig. 59.

Solutio.

Sit vt ante amplitudo antliae $= ff$, altitudo B C $= b$, et elapſo tempore t embolus iam ad O o ſit detruſus, vbi celeritas emboli deorſum ſit $= v$ et altitudo CO $= x$. Vis porro embolum detrudens ſit $= ffu$, a qua in ſuperficie O o naſcatur preſſio $= \pi$ deinceps ex comparatione motus emboli definienda. Iam in tubo annexo D z, ſit orificii Z z amplitudo Z $z = ee$ et altitudo T Z $= a$, eritque celeritas effluxus per hoc orificium $= \frac{ffv}{ee}$. Tum in loco quouis medio S s ſit longitudo tubi D S $= s$, amplitudo S $s = \omega$, et altitudo V S $= z$, preſſio autem in S $s = p$, quibus poſitis, cum in S s ſit celeritas $\mathfrak{v} = \frac{ffv}{\omega}$ principia motus ſuppeditant hanc aequationem

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 vv}{2\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

vbi $\int \frac{ds}{\omega}$ ab O o vsque ad S s extendi debet. Huius autem valor in tubo OC eſt $= \frac{x}{ff}$, per totum vero tubum annexum DZ vocetur valor inde oriundus $=$ D. Hinc quia preſſio in O o eſt $= \pi$ erit

$$2g\pi = \Delta : t - 2gx - \tfrac{1}{2}vv$$

et ob preſſionem in Z z aequalem preſſioni atmoſphaerae $= k$ erit ibi:

$$2gk = \Delta : t - 2ga - \frac{f^4 vv}{2e^4} - \frac{ffdv}{ds}\left(\mathrm{D} + \frac{x}{ff}\right)$$

quarum aequationum haec ab illa ſubtracta dat

$$2g(\pi - k) = 2g(a - x) + \tfrac{1}{2}vv\left(\frac{f^4}{e^4} - 1\right) + \frac{ffdv}{dt}\left(\mathrm{D} + \frac{x}{ff}\right)$$

Quoniam vero tempuſculo dt altitudo x minuitur elemento dx celeritate v erit $dt = \frac{-dx}{v}$, fiet

$$4g(\pi - k - a + x)dx = \left(\frac{f^4}{e^4} - 1\right)vvdx - 2ffvdv\left(\mathrm{D} + \frac{x}{ff}\right)$$

Ponamus $\mathrm{D} = \frac{m}{ff}$ et $\frac{f^4}{e^4} - 1 = \lambda$ vt ſit

$$4g(\pi - k - a + x)dx = \lambda vvdx - 2(m + x)vdv$$

quae diuiſa per $(m+x)^\lambda$ et integrata praebet

$$4g\int \frac{\pi - k - a + x}{(m+x)^\lambda}dx = \text{Conſt.} - \frac{vv}{(m+x)^\lambda}$$

vbi conſtantem ita definiri oportet, vt poſito $x = b$ celeritas v euaneſcat.

Iam pro motu emboli poſito eius pondere $= ffh$, frictione $= \delta ffh$, is deorſum vrgetur vi $= ff(k + u + h - \pi - \delta h)$, vnde eius motus erit

$$vv = \text{Conſt.} - \frac{4g(kx + (1-\delta)hx + \int udx - \int \pi dx)}{h}$$

verum

verum pro eliminatione preſſionis π potius vtamur aequationibus differentialibus:

$$4g(\pi-k-a+x)dx = \lambda vvdx - 2(m+x)vdv$$

et $4g(k+u+h-\delta h-\pi)dx = -2hvdv$

ex quarum ſumma colligitur:

$$4g\int\frac{(u-a+(1-\delta)h+x)dx}{(h+m+x)^{\lambda-1}} = \text{Conſt.} - \frac{vv}{(h+m+x)^{\lambda}}$$

vbi conſtanti tribuendus eſt valor formulae integralis, quem recipit facto $x = b$, ſiquidem ea ita integretur, vt euaneſcat poſito $x = 0$.

Coroll. 1.

109. Si ponatur interuallum $BO = y$, ob $x = b-y$, aequatio motum definiens erit:

$$\frac{vv}{(h+m+b-y)^{\lambda}} = 4g\int\frac{u-a+(1-\delta)h+b-y}{(h+m+b-y)^{\lambda+1}}dy$$

integrali ita ſumto vt euaneſcat poſito $y = 0$.

Coroll. 2.

110. Vt ergo embolus aquae ſaltem motum imprimere poſſit, neceſſe eſt ſit vis ſollicitans $u > a + \delta h - h - b$; tum vero ab initio motus accelerabitur, maximusque euadet, cum fiet $y = u - a + (1-\delta)h + b$. Si igitur fuerit $u < a + \delta h - h$, ideoque intra limites $a-(1-\delta)h$ et $a-(1-\delta)h-b$ contineatur, motus poſtquam maximam celeritatem fuerit conſecutus, iterum retardabitur.

Coroll.

Coroll. 3.

111. Si altitudo $TZ = a$ ad quam aqua elevari debet, fuerit valde magna prae altitudine antliae $BC = b$; etiam quantitas $m = Dff = ff\int\frac{ds}{\omega}$ valde erit magna, cum ſi tubi amplitudo vbique fuerit $= ff$, fiat $m = DSZ$. Hoc ergo caſu ob $b + m + b - y$ conſtans, habebitur $(b + m + b)vv = 4g\int(u - a + b + (1 - \delta)b)\,dy$ ſeu $(b + m + b)vv = 4g(\int u\,dy - (a - b - (1 - \delta)b)y)$: neque hic amplitudo ſupremi orificii $Zz = ee$ in computum ingreditur.

Scholion.

112. Tempus quo embolus per totam antliae altitudinem BC deprimitur, et aquae in ea contentae volumen $= bff$ per orificium Zz eiicitur hic non definio, quia vis embolum ſollicitans ffu ſeu quantitas u nondum eſt cognita; neque enim eam pro arbitrio fingere licet, quia ex natura virium naturalium cuiuis celeritati peculiaris conuenit efficacia. Sin autem ope ponderis cuiusdam embolo impoſiti hic effectus obtineri debeat, peculiari inveſtigatione non eſt opus, quoniam iſtud pondus coniunctim cum pondere emboli per ffh exhiberi poteſt; tum vero quia frictio ſolum embolum afficit numerus δ tanto minor euadet, vt δffh quantitatem frictionis praebeat. Cum igitur hoc pacto quantitas u in h inuoluatur, erit:

$$\frac{vv}{(h+m+b-y)^\lambda} = 4g\int\frac{(1-\delta)h-a+b-y}{(h+m+b-y)^{\lambda+1}}dy =$$

$$\frac{4g(h+m+b-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{4g(a+m+\delta h)}{\lambda}(h+m+b-y)^{-\lambda}$$

$$-\frac{4g(h+m+b)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{4g(a+m+\delta h)}{\lambda}(h+m+b)^{-\lambda}$$

et facta euolutione

$$vv = \frac{4g}{\lambda(1-\lambda)}\Big(\lambda(h+b-y)+m+(1-\lambda)(a+\delta h)\Big)$$

$$-\frac{4g(h+m+b-y)^\lambda}{\lambda(1-\lambda)(h+m+b)^\lambda}\Big(\lambda(h+b)+m+(1-\lambda)(a+\delta h)\Big).$$

Vnde primo quidem patet eſſe debere $h > a - b + \delta h$, quia alioquin ne motus quidem inciperet, deinde ſi y eſt valde paruum repectu $h+m+b$ erit proxime

$$vv = \frac{2g}{h+m+b}\Big(2(h-a-\delta h+b)y + \frac{(1-\lambda)(h-a-\delta h+b)}{h+m+b}yy - yy\Big)$$

Sed quia non conuenit ſolam vim, qua aqua iam hauſta propellitur, conſiderari, ſed ei priorem vim, qua aqua in antliam hauriebatur, adiungi oportet, ambo praecedentia problemata iam coniunctim pertractemus binas antlias alteram haurientem alteram propellentem ſimul contemplaturi.

Problema 59.

113 Si binae antliae ſimiles B b C c et B$'$ b' C$'$ c', quarum illa aquam hauriat, haec vero per fora- Tab. V. Fig. 60.

foramen D′ ad altitudinem $= a$ propellat, vti in praec. probl. ſtatuimus; a data vi ſimul agitentur, definire motum in vtraque antlia.

Solutio.

Sit vt ante vtriusque antliae altitudo $BC = b$, et amplitudo $= ff$, emboli vtriusque maſſa $= ffh$ et frictio $= \delta ffh$. Eodem tempore inceperit embolus aſcendens a baſi Cc attolli, et deſcendens a ſummitate $B'b'$ deprimi, piſtilla autem bina ſuperne iuncta ſint vecti PQ circa eius medium V mobili, ita vt quouis tempore quantum embolus Oo eſt elevatus, tantum alter $O'o'$ infra $B'b'$ ſit depreſſus; et vtriusque motus pari celeritate peragatur. Ponamus nunc vectem in Q deprimi a vi $= Vff$, quam vt cognitam ſpectamus, ex eaque naſcatur vis embolum Oo attollens $= Pff$, ex altera vero parte vis embolum $O'o'$ deprimens $= Qff$, ita vt ſit $P + Q = V$. Vocetur porro ſpatium $CO = B'O' = x$, et celeritas vtriusque emboli $= v$. Ac pro priori ex §. 107 ob $u = P$ habebimus:

$$vv = \frac{4g(\int P\,dx - \alpha x - (1+\delta)hx - \frac{1}{2}xx)}{h + \alpha + x}$$

pro motu poſteriori vero ex §. 109. quia hic fit $u = Q$ et $y = x$ erit

$$\frac{vv}{(h+m+b-y)^{\lambda}} = 4g\int \frac{Q - a + (1-\delta)h + b - x}{(h+m+b-x)^{\lambda+1}}\,dx.$$

Conſi-

Conſiderentur autem potius harum aequationum differentialia, quae ſunt

$$2vdv(h+\alpha+x)+vvdx=4gdx(P-\alpha-(1+\delta)h-x)$$

$$2vdv(h+m+b-x)+\lambda vvdx=4gdx(Q-a+(1-\delta)h+b-x)$$

quae inuicem additae ob $P+Q=V$ praebent pro vtroque motu

$$2vdv(2h+m+b+\alpha)+(\lambda+1)vvdx=4gdx(V-\alpha-a-2\delta h+b-2x).$$

Poſito ergo breuitatis gratia $\frac{\lambda+1}{2h+m+b+\alpha}=\mu$ erit integrando

$$vv=\frac{4g\varepsilon^{-\mu x}}{2h+m+b+\alpha}\int\varepsilon^{\mu x}dx(V-\alpha-a-2\delta h+b-2x)$$

integrali ita ſumto vt euaneſcat poſito $x=0$, vbi litterae α et m idem ſignificant quod in praecedentibus problematibus, et denotante ee amplitudinem orificii ſupremi Zz erat $\lambda=\frac{f^4}{e^4}-1$.

Coroll. 1.

114. Qualibet ergo vectis PVQ agitatione, qua brachium VP eleuatur, alterum vero VQ deprimitur, antlia BC aqua repletur, antlia vero B′C′ euacuatur, dum aqua in ea contenta ad altitudinem a eleuatur; vtriusque autem aquae maſſa eſt $=bff$.

Coroll. 2.

115. Finita hac agitatione, ſi ſequente brachium VQ ſimili modo eleuatur alterumque VP

deprimitur, antlia $B'C'$ iterum aqua repletur, ex altera vero BC aqua, qua fuerat repleta eiicitur, idque ad eandem altitudinem, ſi modo tubi vtrique antliae in D et D' inſerti in tubo aquam ſurſum euehente vniantur.

Coroll 3.

116. Tali ergo vectis PVQ agitatione reciproca aqua continuo ſurſum eleuatur, et ſingulis agitationibus volumen aquae $= bff$ per tubi euehentis ſuperius orificium Zz eiicitur; hicque effectus producitur a vi illa vectem agitante, quae aequatur ponderi aquae, cuius volumen $= Vff$.

Scholion.

117. Ex formula pro celeritate inuenta, intelligitur, quomodo vim illam Vff, qua vectem agitari aſſumimus, comparatam eſſe oporteat, vt huic effectui producendo par ſit. Euidens ſcilicet ſtatim a cuiusque agitationis initio eſſe debere $V > \alpha + a + 2\delta b - b$, vbi α eſt profunditas aquae ſtagnantis, vnde aqua hauritur, infra antliae vtriusque fundum Cc et a altitudo ſupra eundem, ad quam aqua eleuatur, ita vt $\alpha + a$ exhibeat totam altitudinem eleuationis, quae quo fuerit maior vtique eo maiorem vim poſtulat: Deinde vero $2\delta b$ exprimit frictionem, quam vterque embolus in motu ſuo offendit, quae pariter a vi ſollicitante ſuperari debet. Denique a ſumma $\alpha + a + 2\delta b$ ſubtrahitur

trahitur altitudo antliae b, quia aqua in ea contenta etiam pondere ſuo motum iuuat. Porro vero ad motus ipſius determinationem concurrunt quantitates $2b$ et m, quarum illa $2b$ inertiam vtriusque emboli continet quacum etiam inertiam tam vectis P V Q quam eam, quae vi ſollicitanti eſt propria, coniungi oportet, quantitas vero m cum ex longitudine tubi deuehentis, tum ex eius amplitudine ita definitur vt ſit $m = \int \frac{ff\,ds}{\omega}$ denotante s longitudinem huius tubi indefinitam D s (fig. 59.) et ω eius amplitudinem S s in hoc loco. Denique etiam orificium tubi euehentis ſuperius $Zz = ee$ in computum ingreditur et in numero $\lambda = \frac{f^4}{e^4} - 1$ continetur; ex quo intelligitur determinationem motus maxime eſſe difficilem cum hinc in genere formula temporis $dt = \frac{dx}{v}$ tractari nequeat. His autem difficultatibus occurremus, ſi actionem cuiuspiam machinae modo magis determinato ad hunc motum producendum accommodemus.

Problema 60.

118. Si vectis P V Q, quo in praecedente problemate ad binas antlias agitandas vſi ſumus, ope manubrii vel axis incuruati M F N vniformiter in gyrum acti alternatim deprimatur et attollatur, definire vires, quibus hunc axem incuruatum quouis tempore agitari oportet, vt effectus ante deſcriptus producatur. Tab. V. Fig. 61.

 Solutio.

Solutio.

Eiusmodi vectis P V Q alternus motus, qualem deſcripſimus effici ſolet ope axis horizontalis M N ad F inflexi, qui in F gerit virgam rigidam F Q cum vectis extremitate altera Q ita connexam, vt dum ille axis in gyrum agitur, primo terminus ille Q ope virgae F Q deprimatur per ſpatium $= 2$ F G, tum vero per tantum ſpatium iterum attollatur; ſicque qualibet axis M F N reuolutione vtriusque antliae embolus deprimatur et attollatur. Quare vt vterque embolus per totam antliae altitudinem B C $= b$ agitetur, oportet ſit F G $= \frac{1}{2} b$, et virgae F Q ſuperior terminus per peripheriam circuli verticalis F S H mouebitur, quem motum, quo deinceps commodius ad machinam referre liceat, vniformem aſſumo. Primo virga rigida ſupremum tenuerit ſitum in F, quo vectis extremitas Q fuerit in I, ponamusque virgae longitudinem F I $= l$, motusque, quo eius terminus F per peripheriam circuli circumfertur, celeritas ſit $= c$. Iam elapſo tempore t peruenerit virgae terminus ſuperior in S, ſitque angulus F G S$=\Phi$; erit arcus F S $= \frac{1}{2} b . \Phi$, et elementum temporis $dt = \frac{b\,d\Phi}{2c}$; virga vero nunc tenebit ſitum S Q, vt ſit S Q $= l$ et ſpatium I Q $= x$, quoniam embolum vtrumque iam per ſpatium x protruſum ponimus. Cum ergo ſit G I $= l - \frac{1}{2} b$ erit

Tab. V. Fig. 62.

$$GQ = l - \tfrac{1}{2} b + x; \text{ et } \cos.\Phi = \frac{bl - \frac{1}{2} bb - (2l - b)x - xx}{bl - \frac{1}{2} bb + bx},$$

at

at ex angulo Φ interuallum x ita definitur vt ſit

$$x = \sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)} - l + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\,\Phi$$

hinc fit differentiando

$$dx = \frac{-\tfrac{1}{4}bb\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}} + \tfrac{1}{2}\,b\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

At eſt $dt = \frac{dx}{v} = \frac{b\,d\Phi}{2c}$, ideoque $v = \frac{2c}{b} \cdot \frac{dx}{d\Phi}$ ſeu

$$v = c\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{\tfrac{1}{2}bc\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}.$$

Ponamus nunc ad virgae terminum S in circulo promouendum opus eſſe vi $= Sff$, cuius directio cum ſit ad radium GS normalis, dabit pro directione SQ vim $\frac{Sff}{\text{ſin.}\,GSQ}$ qua virga ſecundum ſuam directionem pellitur, ea ergo punctum Q deprimitur vi $= \frac{Sff\,\text{coſ.}\,GQS}{\text{ſin.}\,GSQ}$, quae eſt illa ipſa vis quam in praecedente problemate vocaui Vff vt ſit $V = \frac{S\,\text{coſ.}\,GQS}{\text{ſin.}\,GSQ}$. Eſt vero ſin. $GSQ = \frac{GQ\,\text{ſin.}\,\Phi}{l}$ et

$$\text{coſ.}\,GQS = \frac{GQ + \tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\,\Phi}{l}, \text{ ideoque } V = \frac{S(GQ + \tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\,\Phi)}{GQ\,\text{ſin.}\,\Phi}:$$

et ob $GQ = \sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)} - \tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\,\Phi$, fiet

$$V = \frac{S\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)} - \tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

His definitis conſideremus aequationem differentialem qua praecedentis problematis ſolutio continetur.

$$a v dv(2b + m + b + \alpha) + (\lambda + 1)vv\,dx = 4g\,dx(V - \alpha - a - 2\delta b + b - 2x)$$

Conſi-

Conſideremus virgae longitudinem l vt praemagnam prae radio circuli $\frac{1}{2}b$, eritque

$x = \frac{1}{2}b(1 - \cos.\Phi)$; $\frac{dx}{d\Phi} = \frac{1}{2}b\sin.\Phi$; $vv = cc\sin.\Phi^2$; $\frac{2vdv}{d\Phi} = 2cc\sin.\Phi\cos.\Phi$ et

$$V = \frac{Sl}{l\sin.\Phi - \frac{1}{2}b\sin.\Phi\cos.\Phi} = \frac{S}{\sin.\Phi};$$

vnde facta ſubſtitutione erit

$$(2b+m+b+\alpha)2cc\sin.\Phi\cos.\Phi + (\lambda+1)cc\sin.\Phi^2.\tfrac{1}{2}b\sin.\Phi$$
$$= 2gb(S-(\alpha+a+2\delta b-b)\sin.\Phi - 2gb\sin.\Phi.b(1-\cos.\Phi)$$
$$= 2gb(S-(\alpha+a+2\delta b-b\cos.\Phi)\sin.\Phi)$$

hincque elicimus vim ad motum axis vniformem requiſitam

$$S = (\alpha+a+2\delta b-b\cos.\Phi)\sin.\Phi + \frac{cc}{gb}(2b+m+b+\alpha)\sin.\Phi\cos.\Phi + \frac{(\lambda+1)cc}{4g}\sin.\Phi^3.$$

Qua vi efficietur vt dum axis ſemireuolutionem peragit hoc eſt tempore $= \frac{\pi b}{2c}$ ſec: aquae maſſa $= bff$ per tubum euehentem DZ ſupra eiiciatur. Cum autem curuatura axis in imum locum H fuerit perducta, tum gyratione continuata vectis terminus Q attolletur, ſimilique modo vbi peruenerit in S′ exiſtente iam angulo HGS′ $= \Phi$, pro vi, qua axis gyrari debet reperitur vt ante:

$$S = (\alpha+a+2\delta b-b\cos.\Phi)\sin.\Phi + \frac{cc}{gb}(2b+m+b+\alpha)\sin.\Phi\cos.\Phi + \frac{(\lambda+1)cc}{4g}\sin.\Phi^3.$$

ita vt ſiue axis cubitus ſit in S ſiue e regione in S′ eadem vis ad eius conuerſionem requiratur.

Coroll.

Coroll 1.

119. Dum igitur axis cubitus verſatur ſiue in loco ſummo F ſiue in imo H, fit $S = 0$, ſeu nulla plane opus eſt vi ad motum gyratorium vniformem conſeruandum. In locis autem hinc 90° diſtantibus, pro vi hac erit

$$S = \alpha + a + 2\delta b + \frac{(\lambda+1)cc}{4g}.$$

Coroll. 2.

120. Si angulus $FGS = \Phi$ fuerit 45° vel 225° ob ſin. $\Phi = \frac{1}{\surd 2}$ et coſ. $\Phi = \frac{1}{\surd 2}$ erit

$$S = \frac{\alpha + a + 2\delta b}{\surd 2} - \frac{b}{2} + \frac{cc}{2gb}(2b + m + b + \alpha) + \frac{(\lambda+1)cc}{8g\surd 2}$$

in alteris vero octantibus vbi $\Phi = 135°$ vel $\Phi = 315°$ ob ſin. $\Phi = \frac{1}{\surd 2}$ et coſ. $\Phi = \frac{-1}{\surd 2}$ fit

$$S = \frac{\alpha + a + 2\delta b}{\surd 2} + \frac{b}{2} - \frac{cc}{2gb}(2b + m + b + \alpha) + \frac{(\lambda+1)cc}{8g\surd 2}.$$

Coroll. 3.

121. Quodſi ergo axis MN duos huiusmodi habeat cubitos, inter ſe perpendiculares quibus quaternae ſimiles antliae agitentur, vt tempore $\frac{\pi h}{2c}$ ſec. ſuperne effundatur aquae volumen $= 2bff$; tum dum alter cubitus in ſummo loco F vel imo H verſatur vi opus eſt

$$S = \alpha + a + 2\delta b + \frac{(\lambda+1)cc}{4g}$$

dum autem vterque a verticali FH declinat angulo 45° erit:

 S =

$$S = (\alpha + a + 2\delta b)\sqrt{2} + \frac{(\lambda+1)cc}{4g\sqrt{2}}$$

quae duae vires erunt inter ſe aequales ſi fuerit

$$\alpha + a + 2\delta b = \frac{(\lambda+1)cc}{4g\sqrt{2}}.$$

Scholion. I.

122. In omni machinarum actione plurimum intereſt, vt earum motus ſit quantum fieri poteſt vniformis, et vt perpetuo aequali vi agitentur, ex quo manifeſtum minime conuenire, vt modo deſcripto duae tantum antliae ad machinam applicentur, quoniam ad hoc vis maxime inaequabilis requireretur; ſin autem duo antliarum paria ita applicentur, vt cubiti axis ſint inter ſe normales, vires ad machinam circumagendam requiſitae multo magis ad aequalitatem accedent: minime tamen conuenit ad maiorem aequabilitatem obtinendam formulae $\frac{(\lambda+1)cc}{4g}$ tantum valorem conciliare quantum inuenimus. Quin potius ſemper conſultum eſt hanc formulam tam exiguam reddi quam circumſtantiae permittunt, quandoquidem hoc modo vis ad effectum producendum requiſita diminuitur. Cum igitur poſita orificii ſupremi Zz amplitudine $= ee$ ſit $\lambda + 1 = \frac{f^4}{e^4}$ vtique conueniet hoc orificium quam ampliſſimum effici, circa celeritatem autem c nihil arbitrio noſtro relinquitur quia enim tempore $\frac{\pi b}{2c}$ ſec. quantitas aquae $= 2bff$ ſuperne eiicitur, quantitas vno minuto ſecundo eiecta eſt $= \frac{4}{\pi}cff$; quam cum actione vis ſollicitantis comparemus. Cum igitur inter binos

valores

valores ipſius S medium capiendo ſit quaſi $S = \frac{5}{4}(\alpha + a + \delta b) + \frac{5}{8}.\frac{(\lambda+1)cc}{4g}$, quia vis ipſa eſt $= Sff$ et celeritate $= c$ agit, erit eius actio $= cff\left(\frac{5}{4}(\alpha + a + \delta b) + \frac{5}{8}.\frac{(\lambda+1)cc}{4g}\right)$. Quod ſi ergo vis principalis machinam totam agitans ſit $= V$ eaque celeritate $= u$ operetur, eius actio erit $= Vu$, cui illa aequalis poſita praebet quantitatem aquae ſingulis minutis ſecundis ad altitudinem $\alpha + a$ eleuatae

$$\frac{\frac{16}{5\pi} V u}{\alpha + a + \delta b + \frac{(\lambda+1)cc}{6g}},$$

vbi coefficiens $\frac{16}{5\pi}$ fere aequatur vnitati.

Scholion. 2.

123. Si autem vt modo ſumſimus, duo tantum antliarum paria ad machinam applicentur etſiamſi cubiti eas agitantes ad angulum rectum ſint diſpoſiti, tamen nobabilis adhuc inaequalitas in viribus ad hoc requiſitis deprehenditur; quam autem multo magis diminuere licet, ſi quatuor antliarum paria applicentur, et cubiti axis quatuor ea agitantes ad angulos ſemirectos ſint inter ſe diſpoſiti, tum enim fere perpetuo erit

$$S = \frac{5}{2}(\alpha + a + \delta b) + \frac{17}{10}.\frac{(\lambda+1)cc}{4g},$$

ſicque ſingulis minutis ſecundis aquae quantitas $\frac{8}{\pi}cff$ eleuatur. Quare ſi vt ante vim machinam mouentem principalem vocemus V et celeritatem qua

operatur u ab ea, quantitas aquae ſingulis minutis ſecundis eleuata erit

$$\frac{\frac{16}{5\pi} V u}{\alpha + a + \delta b + \frac{17}{100} \cdot \frac{(\lambda + 1)cc}{g}}$$

quae a praecedente vix differt. Hinc intelligitur ſemper expedire celeritatem c quam minimam ſtatui quod iam pro lubitu fieri poteſt, inde enim amplitudo antliarum ita definitur, vt ſit

$$ff = \frac{\frac{2}{5c} V u}{\alpha + a + \delta b + \frac{(\lambda + 1)cc}{6g}}:$$

quare ſemper conducit ipſas antlias ampliſſimas conſici vt inde celeritas c eo minor euadat: tum vero altitudo antliarum b per elongationem cubitorum ab axe determinatur, cum ſit $b = 2\,FG$, id quod arbitrio noſtro permittitur.

CAPVT V.

DE MOTV AQVAE PER TVBOS DIVERSO CALORIS GRADV INFECTOS.

Problema 61.

124. Dato caloris gradu in ſingulis tubi locis quem ſtatim cum aqua ibi contenta communicari aſſumi-

Tab. VI. Fig. 63.

aſſumimus definire motum, quem aqua in huiusmodi tubo recipere poterit.

Solutio.

Sit tubus AO ratione amplitudinis vtcunque variabilis et incuruatus, ſumtoque in eo interuallo indefinito $AS = s$, ſit ibi amplitudo $= \omega$ et altitudo puncti S ſuper plano horizontali fixo $S\sigma = z$; gradus autem caloris tantus, vt ibi aquae tribuatur denſitas $= q$, quae ergo per hypotheſin eſt variabilis et functio certa ipſius $AS = s$, quoniam in eodem loco aquam perpetuo eodem caloris gradu infectam aſſumimus. Elapſo autem tempore t ſit aquae per ſectionem Ss transfluentis celeritas $= \upsilon$ in plagam SO directa et preſſio $= p$, quae ſunt functiones vtriusque variabilis s et t. His poſitis quia $(\frac{dq}{dt}) = 0$ ex problemate 46 has duas conſequimur aequationes:

$$\left(\frac{d.\, q\omega\upsilon}{ds}\right) = 0 \text{ et } \frac{2g\, dp}{q} = -2g\, dz - \upsilon\, d\upsilon - ds\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

Ex priori aequatione ſequitur fore $q\upsilon\omega = \Gamma : t$, ita vt eodem tempore quantitas $q\upsilon\omega$ per totum tubum eundem obtineat valorem. Ponamus ergo in certo tubi loco, vbi amplitudo $= ff$ et denſitas aquae $= 1$, celeritatem eſſe $= v$, quae ergo erit functio ſolius temporis t; ac prima conditio praebet $q\upsilon\omega = ffv$, ita vt ſit $\upsilon = \frac{ffv}{q\omega}$, hincque quia quantitates q et ω a ſola vatiabili s pendent, erit $(\frac{d\upsilon}{dt}) = \frac{ff}{q\omega}\frac{dv}{dt}$ qui valor in altera aequatione, qua tempus t conſtans ſpectatur, ſubſtitutus praebet

$$2g\,dp = -2gq\,dz - q\,\text{ꝸ}\,d\text{ꝸ} - \frac{ff\,dv}{dt}\cdot\frac{ds}{\omega}$$

ex qua integrando elicimus:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \tfrac{1}{2}q\,\text{ꝸꝸ} + \tfrac{1}{2}\int \text{ꝸꝸ}\,dq - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

ſeu loco ꝸꝸ ſubſtituto valore $\frac{f^4 vv}{qq\omega\omega}$

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{f^4 vv}{2q\omega\omega} + \tfrac{1}{2}f^4 vv\int\frac{dq}{qq\omega\omega} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

Quodſi ergo in duobus locis preſſio aliunde fuerit cognita ad ea hanc aequationem applicando, primo functio temporis $\Delta : t$ eliminari, tum vero celeritas v pro quouis tempore determinari poterit, qua cognita deinceps omnia quae ad motum ſpectant, innoteſcent.

Coroll. 1.

125. Cum ſit $\int\frac{dq}{qq\omega\omega} = \frac{-1}{q\omega\omega} - 2\int\frac{d\omega}{q\omega^3}$, aequatio inuenta etiam ita repraeſentabitur:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{f^4 vv}{q\omega\omega} - f^4 vv\int\frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

in qua hoc commodi occurrit, vt quoties tubus vbique eſt aequaliter amplus, terminus $\int\frac{d\omega}{q\omega^3}$ euaneſcat, ſimulque fiat $\int\frac{ds}{\omega} = \frac{s}{\omega}$.

Coroll. 2.

126. Quia v denotat celeritatem in data tubi ſectione, cuius amplitudo $= f$, et vbi denſitas q ſit $= 1$; hanc ſectionem vbi lubuerit aſſumere licet; quoniam denſitas, quam aqua ibi ob certum caloris gradum habet, vt denſitas naturalis ſpectari poteſt, ex qua preſſiones definiuntur.

Scho-

Scholion.

127. Quoniam ſupra vidimus maſſam fluidam grauem in aequilibrio eſſe non poſſe, niſi in aequalibus altitudinibus vbique eadem denſitas locum habeat, operae omnino erit pretium hic eiusmodi caſus euoluere, vbi aequilibrium prorſus ſubſiſtere nequit. Ac primo quidem ſe offert tubus circularis in ſitu verticali poſitus, qui ab vna parte calidus, ab altera frigidus ſeruatur. Sit ſcilicet A S B D tubus circularis in plano verticali poſitus cuius A C B ſit diameter horizontalis; hunc tubum circa A ita calefieri ſumamus, vt aqua ibi contenta tantum non ebulliat e regione vero in B tubus ſit frigidus, gradu caloris ab A ad B ſiue ſurſum ſiue deorſum progrediendo ſucceſſiue decreſcente, vt in A calor ſit maximus in B vero minimus. Quatenus ergo tubum vehementer anguſtum ponimus, aqua per eum mota quaſi puncto temporis in quouis loco tubi calorem recipiet. Quodſi nunc totum tubum aqua plenum aſſumamus, fieri omnino nequit, vt aqua ſe ad aequilibrium componat, cuiusmodi igitur motum ſit adeptura in ſequente problemate inueſtigabimus. Tab. VI. Fig. 64.

Problema 62.

128. Si tubus circularis in ſitu verticali poſitus A S B D ſit perpetuo in A calidus, in B vero frigidus, tum vero aqua repleatur, quae vbique tubi temperamentum ſtatim recipiat; huius aquae Tab. VI. Fig. 64.

motum

motum in tubo, quia aequilibrium non datur determinare.

Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = c$, AB diameter horizontalis et amplitudo tubi vbique eadem $= ff$. Iam quia ad A calor eſt maximus ad B vero minimus, denſitas aquae ad A erit minima ad B vero maxima: ſtatuamus denſitatem mediam $= 1$, ad quam ſcilicet aeſtimationem preſſionem referimus; tum vero in A ſit denſitas $= 1 - \alpha$ in B vero $= 1 + \alpha$, ab A vero ad B progrediendo denſitas ita creſcat, vt in puncto quouis S poſito angulo $ACS = \Phi$ ſit denſitas $q = 1 - \alpha \text{coſ.} \Phi$, quippe quae formula pro puncto A dat denſitatem $1 - \alpha$ pro B autem $1 + \alpha$. Nunc porro altitudo puncti S ſuper linea horizontali AB eſt $PS = c \text{ſin} \Phi = z$ et arcus $AS = c\Phi = s$. Ab initio quo vniuerſa aqua adhuc erat in quiete elapſum ſit tempus $= t$, ac celeritas in puncto S vocetur $= u$ a termino A recedens, preſſio vero ibidem $= p$. Quodſi nunc in eo loco vbi denſitas eſt $= 1$, celeritas aquae ponatur $= v$, ob amplitudinem vbique eandem $\omega = ff$ erit $u = \frac{v}{q} = \frac{v}{1 - \alpha \text{coſ.} \Phi}$. Hinc ex principiis ante ſtabilitis definiamus ante omnia preſſionem in loco indefinito S, ac primo ob $z = c \text{ſin.} \Phi$, $q = 1 - \alpha \text{coſ} \Phi$ erit $\int q\,dz = c \int d\Phi \text{coſ.} \Phi (1 - \alpha \text{coſ.} \Phi) = c \int d\Phi (\text{coſ.} \Phi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha \text{coſ.} 2\Phi)$ ideoque $\int q\,dz = c \text{ſin.} \Phi - \frac{1}{2}\alpha c \Phi - \frac{1}{4}\alpha c \text{ſin.} 2\Phi$. Deinde ob $\omega = ff$ eſt $\int \frac{d\omega}{q\omega^3} = 0$ et $\int \frac{ds}{\omega} = \frac{s}{ff}$

$=\frac{s}{ff}=\frac{c\Phi}{ff}$; his factis ſubſtitutionibus conſequimur hanc aequationem:

$$2gp=\Delta:t-2gc(\text{ſin.}\Phi-\tfrac{1}{2}\alpha\Phi-\tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}2\Phi)-\frac{vv}{1-\alpha\,\text{coſ.}\Phi}-\frac{c\Phi dv}{dt}.$$

Hinc pro initio in puncto A prodit haec aequatio:

$$2gp=\Delta:t-\frac{vv}{1-\alpha}$$

pro puncto B vero ponendo $\Phi=\pi=180°$ haec

$$2gp=\Delta:t+\alpha gc\pi-\frac{vv}{1+\alpha}-\frac{\pi cdv}{dt}.$$

Percurramus totum circulum vt reuertamur in punctum A et ponendo $\Phi=2\pi$, pro puncto A prodit etiam haec aequatio:

$$2gp=\Delta:t+2\alpha\pi gc-\frac{vv}{1-\alpha}-\frac{2\pi cdv}{dt}.$$

Cum igitur neceſſe ſit vt haec preſſio illi pro eodem puncto A ſit aequalis, hinc colligimus hanc aequationem

$$2\alpha\pi gc-\frac{2\pi cdv}{dt}=0 \text{ ſeu } dv=\alpha g dt$$

quae integrata dat $v=\alpha gt$, vnde diſcimus, cum initio celeritas fuiſſet nulla, eam cum tempore vniformiter creſcere, ita vt ſit $v=\alpha gt$. Tum vero ob $\frac{dv}{dt}=\alpha g$ erit pro loco quocunque S elapſo tempore t preſſio

$$p=\Sigma:t-c(\text{ſin.}\Phi-\tfrac{1}{2}\alpha\Phi-\tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}2\Phi)-\frac{\alpha\alpha gtt}{2(1-\alpha\,\text{coſ.}\Phi)}-\tfrac{1}{2}\alpha c\Phi$$

ſeu $p=\Sigma:t-c\,\text{ſin.}\Phi+\tfrac{1}{4}\alpha c\,\text{ſin.}2\Phi-\frac{\alpha\alpha gtt}{2(1-\alpha\,\text{coſ.}\Phi)}$

vnde concludimus preſſiones

pro A vbi $\Phi = 0$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha\alpha g tt}{2(1-\alpha)}$

pro E vbi $\Phi = 90°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha\alpha g tt}{2} - c$

pro B vbi $\Phi = 180°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha\alpha g tt}{2(1+\alpha)}$

pro D vbi $\Phi = 270°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha\alpha g tt}{2} + c$.

Coroll. 1.

129. Cum igitur aqua primum in tubo quieverit, ſtatim ita moueri incipiet, vt in parte inferiore A D B, e locis frigidioribus in calidiora, in parte ſuperiore A E B contra ex calidioribus in frigidiora feratur, fluxusque exoriatur in plagam A E B D, qui continuo vniformiter acceleretur.

Coroll. 2.

130. Iſta motus acceleratio eo erit promtior, quo maius fuerit diſcrimen inter calorem maximum in A et minimum in B. Si in A aqua fere ebulliat in B vero propemodum congelaſcat, fractio α eſt circiter $\frac{1}{30}$, ideoque $v = \frac{1}{30} g t = \frac{1}{2} t$ ped. ob $g = 15$ ped. ſicque poſt vnum minutum ſecundum, motus iam ita rapidus exiſteret, vt minuto ſecundo ſpatium $\frac{1}{2}$ pedis percurreret, poſt minutum primum autem ſpatium 30 pedum.

Coroll. 3.

131. Quod ad preſſiones attinet, quas tubus interea ſuſtinet, eae quidem non definiuntur, quia tubum vel aquam extrinſecus premendo ad quoduis

tempus

tempus preſſio pro lubitu variari poteſt. Interim tamen ad B preſſio perpetuo erit maxima, ſumto enim $\Sigma : t = \frac{\alpha\alpha g t t}{2(1-\alpha)}$ vt preſſio in A euaneſcat, in B erit ea $= \frac{\alpha^3 g t t}{1-\alpha\alpha}$, ſicque in temporis ratione dupl cata creſcet.

Scholion I.

132. Facile autem intelligitur, ſi res experimentis exploretur accelerationem motus neutiquam tam rapidam eſſe futuram, quam calculo inuenimus cuius ratio manifeſto in eo eſt poſita, quod ſtatim atque aqua iam velocitatem notabilem acquiſiuerit eius calor non ſubito ſe ad calorem tubi accommodare valeat, eaque proinde priſtinam temperaturam ad aliquod tempus conſeruans, in B magis calida quam tubus, in A vero minus ſit futura. Cum igitur idem eueniat ac ſi fractio α minor redderetur, motus quoque accelerationem relaxari oportebit, quae tamen omnino extingui nequit; ſimul enim atque hoc eueniret, et aquae tempus ſuppeteret in quouis loco tubi calorem recipiendi, motus de nouo vti ab initio inſtauraretur. Ex quo perſpicuum eſt, ob hanc cauſam motum tantum ad certum vsque gradum acceleratum iri in quo deinceps perpetuo ſit permanſurus, quamdiu ſcilicet in ipſo tubo diſcrimen caloris ineſt. Quoniam vero haec motus moderatio ab ea ratione potiſſimum pendet, qua tubus cum aqua, haecque viciſſim cum tubo ſuum inſitum caloris gradum communicat vbi ſimul ad vtriusque maſſam reſpici oportet, ex ſola

theoria hic vix quicquam ſtatuere licebit. At ſi ope ignis circa A ſuſcitati in hoc loco tubo perpetuo inſignis caloris gradus imprimatur, tubusque ſatis ſit magnus, vt tantus calor non ad locum oppoſitum B transferri poſſit, nullum plane eſt dubium, quin aqua perpetuo motum ſatis velocem in plagam A E B D ſit conſeruatura.

Scholion 2.

133. Aſſumſi in problemate tubo in altera extremitate horizontali A maximum caloris gradum, in altera vero B minimum induci, quae diſpoſitio ad motum generandum maxime eſt accommodata. Si enim maximus calor excitaretur in loco vel ſummo E vel imo D, et e regione minimus exiſteret, tum nullus plane motus oriretur, ſed aqua ſemel in quiete poſita perpetuo in eodem ſtatu perſeveraret. Quare etiamſi initio tubus circa A maximum calorem acceperit, niſi is a cauſa externa ſuſtineatur, aqua per A tranſiens calorem ibi receptum cum tubi locis ſuperioribus S et E communicabit viciſſimque frigus, quo per B tranſiens erat imbuta in tubi regionem inferiorem E transferet, quo tandem efficietur, vt cum maximus calor in tubi locum ſummum E fuerit translatus minimusque in imum D, tum omnis motus ſit ceſſaturus, et aqua in ſtatum aequilibrii ſit peruentura, in quo acquieſcere valeat. De cetero in ſolutione problematis certam legem ſtabiliui, ſecundum quam denſitas fluidi ab A verſus B progrediendo augeatur,

tur, quod augmentum ipſis diſtantiis in recta horizontali A B ſumtis proportionale ſtatui, ita vt exceſſus denſitatis in S ſupra denſitatem in A proportionalis eſſet ſpatio A P; quae hypotheſis cum veritate ſatis conſentire videtur, ſi prope A ignis aliave materia calorem gignens concipiatur conſtituta, cum enim vis calefaciendi in loco quouis S quadrato diſtantiae A S proportionalis aeſtimetur, hoc quadratum in circulo ipſi ſinui verſo A P eſt proportionale: Interim tamen hac hypotheſi calculo potiſſimum conſulens ſum vſus, et infra rem generalius expedire conabor.

Problema 64.

134. Sit vti in praecedente problemate tubus circularis in plano verticali poſitus isque in A calidus in B vero frigidus; verum huic tubo diuerſa tribuatur amplitudo; hoc poſito ſi tubus fuerit aqua repletus, eius motum definire. Tab. VI. Fig. 64.

Solutio.

Sit vt ante radius circuli $CA = CB = c$, denſitas aquae in $A = 1 - \alpha$, in $B = 1 + \alpha$, at in E et $D = 1$, in loco vero quouis indefinito S poſito angulo $ACS = \Phi$ ſit denſitas $q = 1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi$. Tum vero in E et D ſit amplitudo $= ff$ verum in A ſtatuatur $= ff(1 - \beta)$, in $B = ff(1 + \beta)$ at in S ſit $\omega = ff(1 - \beta \operatorname{cof.} \Phi)$. Elapſo iam tempore t in E vel D, vbi amplitudo eſt ff et denſitas $= 1$, celeri-

leritas aquae ſit $= v$, vnde in loco indefinito S erit $\upsilon = \frac{v}{(1-\alpha\cos.\Phi)(1-\beta\cos.\Phi)}$ quam aequationem pr:ma motus conditio ſuppeditat. Altera vero poſita preſſio e in $f = p$ ita ſe habet:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \tfrac{1}{2}q\upsilon\upsilon + \tfrac{1}{2}\int \upsilon\upsilon\,dq - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

pro cuius euolutione ob $z = c\,\text{ſin.}\Phi$ et $q = 1 - \alpha\,\text{cof.}\Phi$ eſt vt ante

$$\int q\,dz = c\,\text{ſin.}\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha c\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha c\,\text{ſin.}\,2\Phi.$$

Deinde ob $s = c\Phi$ et $\omega = ff(1 - \beta\,\text{coſ.}\Phi)$ eſt $\int\frac{ds}{\omega} = \frac{c}{ff}$

$$\int\frac{d\Phi}{1-\beta\cos.\Phi} = \frac{c}{ff\surd(1-\beta\beta)}\,\text{Ang. ſin.}\frac{\text{ſin.}\Phi\surd(1-\beta\beta)}{1-\beta\cos.\Phi}.$$

Denique ob $dq = \alpha\,d\Phi\,\text{ſin.}\Phi$ eſt $\int\upsilon\upsilon\,dq = \alpha vv\int\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\Phi}{(1-\alpha\cos.\Phi)^2(1-\beta\cos.\Phi)^2}$

vnde fit integrando:

$$\int\upsilon\upsilon\,dq = \frac{\alpha vv}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{-(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\cos.\Phi}{(1-\alpha\cos.\Phi)(1-\beta\cos.\Phi)} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}\,l\,\frac{1-\beta\cos.\Phi}{1-\alpha\cos.\Phi}\right).$$

Ponatur nunc $\Phi = 0$, vt preſſionem in puncto A obtineamus

$$2gp = \Delta : t - \frac{vv}{2(1-\alpha)(1-\beta)^2} + \frac{\alpha vv}{2(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{-\alpha-\beta+2\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}\,l\,\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)$$

tum vero pro eodem puncto ſit $\Phi = 2\pi$ erit

$$2gp = \Delta : t + 2\pi\alpha gc - \frac{vv}{2(1-\alpha)(1-\beta)^2} + \frac{\alpha vv}{2(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{-\alpha-\beta+2\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}\,l\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)\right)$$
$$- \frac{2\pi c\,dv}{dt\surd(1-\beta\beta)}$$

ex quorum valorum aequalitate elicitur $dv = \alpha g\,dt\,\surd(1-\beta\beta)$ hincque $v = \alpha gt\surd(1-\beta\beta)$.

Coroll. I.

135. Diuerſa ergo tubi amplitudo, ſiquidem legem in ſolutione poſitam ſequitur, efficit vt celeritas

leritas aliquanto minor generetur, idque perinde ſiue maxima amplitudo ſtatuatur in B ſiue in A. Ac ſi foret $\mathfrak{C} = 1$, quo caſu amplitudo in A vel B euaneſceret, motus plane nullus orietur, vti per ſe eſt manifeſtum.

Coroll. 2.

136. Si eſſet $\mathfrak{C} = \alpha$, ſeu denſitas vbique tubi amplitudini eſſet proportionalis, foret

$$\int \text{ȣȣ}\, dq = \alpha vv \int \frac{d\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi}{(1-\alpha \,\text{coſ.}\, \Phi)^4} = \frac{-vv}{3(1-\alpha \,\text{coſ.}\, \Phi)^3} \text{ et } \text{ȣȣ} q = \frac{vv}{(1-\alpha \,\text{coſ.}\, \Phi)^3}:$$

ideoque

$$-\tfrac{1}{2} q\, \text{ȣȣ} + \tfrac{1}{2} \int \text{ȣȣ}\, dq = \frac{-2vv}{3(1-\alpha \,\text{coſ.}\, \Phi)^3}$$

quibus formulis pro preſſione inuenienda eſt vtendum.

Scholion.

137. Quoniam igitur vidimus, quantum inaequalitas in tubi amplitudine conferat ad motum aquae, inquiramus nunc etiam qualis motus ſit oriturus in eodem tubo circulari, ſi loca maximi et minimi caloris non in diametrum horizontalem, ſed alium vtcunque oblique poſitum incidant, vbi quidem amplitudinem tubi iterum vbique eandem ſtatuamus.

Problema 65.

138. Sit vt hactenus tubus circularis in plano verticali poſitus isque vbique aeque amplus; verum maximus calor reperiatur in A minimus in B, Tab. VI. Fig. 65.

vt

vt diameter A B ſit ad horizontem H I inclinatus angulo $ACH = \zeta$; atque cum hic tubus fuerit aqua plenus, eius motum definire.

Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = c$, amplitudo tubi conſtans $= ff$ vt ſit $\omega = ff$; ac pro puncto quouis S poſito angulo $ACS = \Phi$ ſit aquae denſitas $q = 1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi$, ita vt in punctis E et F ea fiat $= 1$, vbi aquae celeritas elapſo tempore t ſtatuatur $= v$, quae ergo eodem tempore in S erit $\mathfrak{v} = \frac{v}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi}$, cuius puncti S altitudo ſuper horizonte cum ſit $SP = c \operatorname{ſin.} (\Phi - \zeta) = z$ ſi preſſio in S vocetur $= p$, ob arcum $AS = c\Phi$ erit:

$$2gp = \Delta : t - 2gc \int (1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi) d\Phi \operatorname{coſ.} (\Phi - \zeta) - \frac{vv}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi} - \frac{c\Phi dv}{dt}.$$

At eſt

$$\int d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{coſ.} (\Phi - \zeta) = \tfrac{1}{2} \int d\Phi (\operatorname{coſ.} \zeta + \operatorname{coſ.} (2\Phi - \zeta)) = \tfrac{1}{2} \Phi \operatorname{coſ.} \zeta + \tfrac{1}{4} \operatorname{ſin.} (2\Phi - \zeta)$$

ideoque habebitur:

$$2gp = \Delta : t - 2gc \operatorname{ſin.} (\Phi - \zeta) + \alpha gc \Phi \operatorname{coſ.} \zeta + \tfrac{1}{2} \alpha gc \operatorname{ſin.} (2\Phi - \zeta) - \frac{vv}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi} - \frac{c\Phi dv}{dt}.$$

Hinc pro loco A preſſionem duplici modo exprimere poterimus prout ponamus vel $\Phi = 0$ vel $\Phi = 2\pi$; prior poſitio dat

$$2gp = \Delta : t + 2gc \operatorname{ſin.} \zeta - \tfrac{1}{2} \alpha gc \operatorname{ſin.} \zeta - \frac{vv}{1 - \alpha},$$

altera vero

$$2gp = \Delta : t + 2gc \operatorname{ſin.} \zeta + 2\alpha\pi gc \operatorname{coſ.} \zeta - \tfrac{1}{2} \alpha gc \operatorname{ſin} \zeta - \frac{vv}{1 - \alpha} - \frac{2\pi c dv}{dt}$$

quae

quae duae expreſſiones cum inter ſe debeant eſſe aequales eſt

$$\alpha g \text{ coſ. } \zeta = \frac{dv}{dt}, \text{ hincque } v = \alpha g t \text{ coſ. } \zeta,$$

vnde ad quoduis tempus in quouis loco celeritas innoteſcit cuius quidem directio in plagam A E B F tendit. Tum vero preſſio in loco quocunque S erit:

$$p = \Sigma : t - c \text{ ſin.} (\Phi - \zeta) + \tfrac{1}{4} \alpha c \text{ ſin.} (2\Phi - \zeta) - \frac{\alpha \alpha g t t}{2(1 - \alpha} \frac{\text{coſ.} \zeta^2}{\text{coſ.} \Phi)}.$$

Coroll. 1.

139. Hinc ergo patet ſi diameter AB per loca maximi minimique caloris tranſiens fuerit verticalis, ita vt maximus calor ſit in circuli loco vel ſummo vel imo ob coſ. $\zeta = 0$, nullum motum a diuerſitate caloris generatum iri; ſed aquam hoc caſu in aequilibrio conſiſtere poſſe, propterea quod in tubi locis aeque altis par caloris gradus reperitur.

Coroll. 2.

140. Si locus maximi caloris A a puncto horizontali H minus quadrante diſtet, ſiue ſurſum ſive deorſum, motus aquae fiet in directione A E B F; ſin autem illa diſtantia H A quadrantem ſuperet, quia tum coſ. ζ fit negatiuus, motus in contrariam plagam A F B E erit directus.

Coroll. 3.

144e. Semper ergo in locis inferioribus motus fiet a regione frigidiore in calidiorem; in ſuperiori-

 X x bus

bus vero contra a regione calidiore in frigidiorem; omnino vti iam ſupra circa aequilibrium eſt obſervatum, etiamſi ibi motum ipſum definire haud licuerit.

Scholion.

142. Cum igitur iam non ſolum ſit euictum, aquam in tubo circulari, in quo ad pares altitudinis gradus caloris ſit diuerſus, in aequilibrio conſiſtere non poſſe, ſed etiam ipſum motum inde genitum determinauerimus; probe tenendum eſt hoc tantum euenire, ſi totus tubus ſit aqua repletus; ſi enim minor aquae copia ei ſit infuſa, ea ſemper eiusmodi ſitum habere poterit, in quo perpetuo acquieſcat. In quo certe ingens paradoxon agnoſci debet, quod dum in eiusmodi tubo vacuum aliquod ſpatium admittitur, ſemper aequilibrium dari poſſit, id omni vacuo remoto ſubito tollatur, ac neceſſario motus oriri debeat; multo maius autem hoc fiet paradoxon, cum oſtendero etiam admiſſo ſpatio ab aqua vacuo, dummodo ſit minimum, aequilibrium excludi, ita vt quoties illud vacuum certa quadam quantitate fuerit minus, tum ſemper neceſſario motus generetur, quomodocunque aqua in tubo ſit diſpoſita ſin autem id vacuum iſta quantitate fuerit maius, tum ſemper aquae eiusmodi ſitus tribui queat, in quo perpetuo acquieſcat. Maxime igitur operae pretium erit, vt hoc inſigne paradoxon accuratiſſime euoluamus.

Proble-

Problema 66.

143. Sit tubus circularis in plano verticali poſitus vbique eiusdem amplitudinis, calor vero maximus in A, minimus in B verſetur, vt recta A B ſit diameter horizontalis. Quod ſi iam huius tubi tantum portio M N aquam contineat, eius motum inueſtigare. Tab. VI. Fig. 66.

Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = 1$, amplitudo tubi vbique eadem $\omega = ff$; calor autem ita comparatus, vt in loco quocunque S poſito arcu $AS = s$ ſit denſitas aquae $q = 1 - \alpha \operatorname{coſ.} s$. Iam elapſo tempore $= t$ occurret aqua tubo infuſa ſpatium M N, vocemusque arcus $AM = m$ et $AN = n$; ac primo quidem perpendendum eſt, aquae maſſam perpetuo eandem manere, cum igitur in S ſit denſitas $q = 1 - \alpha \operatorname{coſ.} s$ maſſa aquae quae tubi portionem AS eſſet impletura, erit $\int q\, ds = s - \alpha \operatorname{ſin.} s$, vnde colligimus aquae portionem M N implentis maſſam fore $= n - m - \alpha(\operatorname{ſin.} n - \operatorname{ſin.} m)$, quae cum ſit conſtans ponatur $= 2e$. In hunc finem ſtatuatur:

$$m - \alpha \operatorname{ſin.} m = u - e \text{ et } n - \alpha \operatorname{ſin.} n = u + e$$

et quia α eſt fractio minima habebimus proxime

$$m = u - e + \alpha \operatorname{ſin.}(u - e) \text{ et } n = u + e + \alpha \operatorname{ſin.}(u + e)$$

vbi obſeruo ſi totus tubus eſſet aqua repletus fore $n = m + 2\pi$ ideoque $2e = 2\pi$ ſeu $e = \pi$, ita vt tubus eatenus non ſit totus aqua repletus, quatenus

 arcus

arcus e minor eſt ſemiperipheria circuli π radio exiſtente $= 1$. Cum nunc ſit $z = \text{ſin.}\, s$ erit $\int q\,dz = \text{ſin.}\, s - \frac{1}{2}\alpha s - \frac{1}{4}\alpha\, \text{ſin.}\, 2s$, et poſita preſſione in S $= p$ habebitur

$$2gp = \Delta : t - 2g(\text{ſin.}\, s - \tfrac{1}{2}\alpha s - \tfrac{1}{4}\alpha\, \text{ſin.}\, 2s) - \frac{vv}{1-\alpha\,\text{coſ.}\, s} - \frac{s\,dv}{dt}$$

vnde preſſio pro vtroque termino M et N colligi poterit ſiue autem praeter aquam in tubo inſit vacuum ſiue aer, ſemper preſſiones in M et N aequales ſint neceſſe eſt; ex quo fiet

$$\left.\begin{aligned} &+2g(\text{ſin.}\, n - \tfrac{1}{2}\alpha n - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\, 2n) + \frac{vv}{1-\alpha\,\text{coſ.}\, n} + \frac{n\,dv}{dt} \\ &-2g(\text{ſin.}\, m - \tfrac{1}{2}\alpha m - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\, 2m) - \frac{vv}{1-\alpha\,\text{coſ.}\, m} - \frac{m\,dv}{dt} \end{aligned}\right\} = 0$$

Ex hac aequatione primum colligere licet, ſub quibus conditionibus aequilibrium locum habere queat. Si enim hoc ſtatu adſit aequilibrium, oportet ſit tam $v = 0$, quam $\frac{dv}{dt} = 0$, quod fieri nequit niſi ſit:

$$\text{ſin.}\, n - \text{ſin.}\, m - \tfrac{\alpha}{2}(n-m) - \tfrac{1}{4}\alpha(\text{ſin.}\, 2n - \text{ſin.}\, 2m) = 0$$

Quare quoties huic aequationi ſatisfieri poteſt, aequilibrium dabitur; contra vero neceſſario motus exorietur. Statim autem patet, ſi ſit $n = 2\pi + m$, hanc aequationem neutiquam ſubſiſtere, neque propterea aequilibrium locum habere poſſe. Statuamus ergo $n = 2\pi + m - \delta$, atque aequilibrium poſtulat hanc aequationem:

$$\text{ſin.}(m-\delta) - \text{ſin.}\, m - \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \delta) - \tfrac{1}{4}\alpha(\text{ſin.}(2m-\delta) - \text{ſin.}\, 2m) = 0.$$

Sumamus δ valde paruum, eritque

$$-\delta\,\text{coſ.}\, m - \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \delta) + \tfrac{1}{4}\alpha\delta\,\text{coſ.}\, 2m = 0$$

vnde

vnde deducitur proxime coſ. $m = \frac{-\alpha(2\pi - \delta)}{2\delta}$; niſi ergo ſit

$$\alpha(2\pi - \delta) < 2\delta \text{ ſeu } \delta > \frac{2\alpha\pi}{2+\alpha};$$

aequilibrium plane locum habere nequit.

Siue autem aequilibrium excludatur ſiue aqua ab alia cauſa fuerit agitata, motus ex ſuperiori aequatione definiri poterit. Introducta nempe noua variabili u, vt ſit

$m = u - e + \alpha\,\text{ſin.}(u-e)$ et $n = u + e + \alpha\,\text{ſin.}(u+e)$ erit

$$\text{ſin.}\,m = \text{ſin.}(u-e) + \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{ſin.}\,2(u-e);\ \text{coſ}\,m = \text{coſ.}(u-e) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,2(u-e)$$

$$\text{ſin.}\,n = \text{ſin.}(u+e) + \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{ſin.}\,2(u+e);\ \text{coſ.}\,n = \text{coſ.}(u+e) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,2(u+e)$$

$$\text{ſin.}\,2m = \text{ſin.}\,2(u-e) - \alpha\,\text{ſin.}(u-e) + \alpha\,\text{ſin.}\,3(u-e)$$

$$\text{ſin.}\,2n = \text{ſin.}\,2(u+e) - \alpha\,\text{ſin.}(u+e) + \alpha\,\text{ſin.}\,3(u+e).$$

Porro cum celeritas in M ſit $= \frac{v}{1-\alpha\,\text{coſ.}\,m}$ ex promotione momentanea concluditur temporis elementum $dt = \frac{dm(1-\alpha\,\text{coſ.}\,m)}{v}$ factaque ſubſtitutione fit $dt = \frac{du}{v}$. Quia deinde eſt proxime $\frac{1}{1-\alpha\,\text{coſ.}\,n} = 1 + \alpha\,\text{coſ.}\,n$, noſtra aequatio induet hanc formam

$$2g(\text{ſin.}\,n - \text{ſin.}\,m - \tfrac{1}{2}\alpha(n-m) - \tfrac{1}{4}\alpha(\text{ſin.}\,2n - \text{ſin.}\,2m)) + \alpha vv(\text{coſ.}\,n - \text{coſ.}\,m) + \frac{v\,dv}{du}(n-m) = 0$$

Iam vero ex ſuperioribus formis elicitur

$$\text{ſin.}\,n - \text{ſin.}\,m = 2\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ.}\,u + \alpha\,\text{ſin.}\,2e\,\text{coſ.}\,2u;\ n - m = 2e + 2\alpha\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ.}\,u$$

$$\text{coſ.}\,n - \text{coſ.}\,m = 2\,\text{ſin.}\,e\,\text{ſin.}\,u - \alpha\,\text{ſin.}\,2e\,\text{ſin.}\,2u;\ \text{ſin.}\,2n - \text{ſin.}\,2m = 2\,\text{ſin.}\,2e\,\text{coſ.}\,2u$$

facta ergo ſubſtitutione prodibit:

$$2vdv(e+\alpha\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ.}\,u)-2\alpha vvdu\,\text{ſin.}\,e\,\text{ſin.}\,u+2gdu(2\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ.}\,u-\alpha e+\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{ſin.}\,2e\,\text{coſ.}\,2u)=0$$

quae per $e+\alpha\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ}\,u$ multiplicata integrabilis redditur:

$$vv(e+\alpha\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ.}\,u)^2+2g\int du(2e\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ.}\,u-\alpha ee+\tfrac{1}{2}\alpha e\,\text{ſin.}\,2e\,\text{coſ.}\,2u+2\alpha\,\text{ſin.}\,e^2\,\text{coſ.}\,u^2)=C$$

ita vt hinc prodeat

$$vv=\frac{C-4ge\,\text{ſin.}\,e\,\text{ſin.}\,u+2\alpha geeu-2\alpha gu\,\text{ſin.}\,e^2-\tfrac{1}{2}\alpha ge\,\text{ſin}\,2e\,\text{ſin}\,2u-\alpha g\,\text{ſin.}\,e^2\,\text{ſin.}\,2u}{(e+\alpha\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ.}\,u)^2}$$

ſeu

$$vv=\text{Conſt.}-\frac{4g}{e}\,\text{ſin.}\,e\,\text{ſin.}\,u+\frac{8\alpha g}{ee}\,\text{ſin.}\,e\,\text{ſin.}\,u+2\alpha gu-\frac{2\alpha gu}{ee}\,\text{ſin.}\,e^2-\frac{\alpha g}{}\frac{\text{ſin.}\,2e}{2e}\,\text{ſin.}\,2u-\frac{\alpha g}{ee}\,\text{ſin.}\,e^2\,\text{ſin.}\,2u.$$

Coroll. 1.

144. Si ponamus $e=\pi$, vt tubus fiat aqua plenus, quem caſum quidem iam ſupra enodauimus, aequatio hic inuenta in hanc abit formam $vv=C+2\alpha gu$, vnde fit

$$dt=\frac{du}{\sqrt{(C+2\alpha gu)}}\quad\text{et}\quad t=\frac{1}{\alpha g}\sqrt{(C+2\alpha gu)}=\frac{v}{\alpha g}$$

ita vt ſit $v=\alpha gt$, vti ſupra inuenimus.

Coroll. 2.

145. Pro limite ad quem vsque aequilibrium locum habere poteſt inuenimus $\delta=\frac{2\alpha\pi}{2+\alpha}$, vnde fit $m=\pi$ vel $m=-\pi$, et $n=\pi-\frac{2\alpha\pi}{2+\alpha}=\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\pi$.

Hoc

Hoc caſu inferior ſemicirculus totus aqua plenus, ſuperior vero aquam continebit vsque ad *Dd* exiſtente B D $= \frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$; qui eſt extremus ſtatus aequilibrii.

Coroll. 3.

146. Hinc ſequitur, ſi portio tubi aqua deſtituta fuerit maior quam $\frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$, tum ſemper aequilibrium exhiberi poſſe, ſin autem illa portio minor ſit quam $\frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$, tum aequilibrio nullus plane locus relinquitur ſed aqua quaſi ſponte motum concipiet.

Scholion.

167. Paradoxon ergo ſupra memoratum ita reſoluitur, vt quando tubus non omnino aqua eſt plenus, in eoque ſpatium vacuum relinquitur, aequilibrium quidem ſemper locum habere poſſit, dummodo hoc ſpatium vacuum non fuerit valde paruum. Datur enim terminus quidam valde exiguus et a diſcrimine inter maximam minimamque aquae denſitatem pendens, quo ſi ſpatium illud vacuum fuerit minus, aequilibrium penitus excludatur, et aqua in tubo contenta, quemcunque ſitum tenuerit, neceſſario ad motum concitetur. Cum cognitio huius termini maximi ſit momenti, eum accuratius ex aequatione differentiali inter v et u definiamus et quia nouimus tum tubum fere eſſe plenum, ponamus pro hoc termino eſſe $e = \pi - \varepsilon$, exiſtente ε arcu minimo atque vt tam v quam $\frac{dv}{du}$ euaneſcat, oportet ſit

$$2\varepsilon \operatorname{coſ.} u - \alpha\pi + \alpha\varepsilon - \alpha\varepsilon \operatorname{coſ.} 2u = 0 \text{ ſeu}$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha\pi}{2\operatorname{coſ.} u + \alpha - \alpha\operatorname{coſ.} 2u},$$

quae

quae expreſſio minima reddi debet, vt valor pro ε minimus etiam nunc aequilibrium admittens obtineatur. Sumi igitur debet $u = 0$, vnde fit $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha\pi$ tum autem hoc aequilibrii ſtatu extremo reperitur,

$$m = -\pi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi = -(1 - \tfrac{1}{2}\alpha)\pi \text{ et } n = (1 - \tfrac{1}{2})\pi$$

vt ſit longitudo venae aqueae in tubo contentae

$$MN = n - m = 2(1 - \tfrac{1}{2}\alpha)\pi = 2\pi - \alpha\pi,$$

ideoque ſpatium vacuum $= \alpha\pi$; quod in aequilibrio ita locum B vbi denſitas eſt maxima occupabit, vt altera extremitas infra punctum B altera ſupra id cadat interuallo $\frac{1}{2}\alpha\pi$; quae determinatio accuratior eſt ea, quae in coroll. 2 circa ſpatium B D eſt data, etiamſi aequilibrium in quouis ſitu proximo aeque ſubſiſtere queat.

Problema 67.

Tab VI. Fig. 67. 148. Si tubus in ſe rediens habuerit figuram quamcunque, gradusque caloris in eo vtcunque diverſus, vt aqua qua eum penitus repletum aſſumimus, in aequilibrio conſiſtere nequeat: motum in ea genitum determinare.

Solutio.

Sit in A calor maximus ideoque denſitas minima, quae ponatur $= 1$, ibique ſit tubi amplitudo $= ff$; in loco B vero ſit calor minimus ideoque denſitas maxima $= 1 + \alpha$. Conſideretur nunc locus tubi quicunque S, et ponatur in eius directrice

ce longitudo $AS = s$, amplitudo $Ss = \omega$ et altitudo ſupra planum horizontale fixum $= z$; quod planum per ipſum punctum A ducere licet, denſitas vero ibidem ſit $= q$. Iam elapſo tempore $= t$, aqua eiusmodi motum acquiſierit, vt in A celeritas in plagam AS, ſit $= v$, ideoque in S futura ſit $u = \frac{ffv}{q\omega}$. Quodſi ergo ſtatuamus preſſionem in $S = p$, hanc ſupra elicuimus aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{f^4 vv}{q\omega\omega} - f^4 vv\int\frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

quae ob $\int q\,dz = qz - \int z\,dq$ transformetur in hanc

$$2gp = \Delta : t - 2gqz + 2g\int z\,dq - \frac{f^4 vv}{q\omega\omega} - f^4 vv\int\frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

vbi integralia per totam longitudinem tubi AS capi aſſumo, ita vt poſito $s = 0$ ea quoque euaneſcant. Pro ipſo ergo puncto A, vbi etiam fieri $z = 0$ ſumimus; erit

$$2gp = \Delta : t - vv \text{ ob } q = 1 \text{ et } \omega = ff$$

eandem autem preſſionem prodire neceſſe eſt, ſi arcum s eousque augeamus, vt confecta tota tubi longitudine punctum S in A transferatur, qualem ergo formam tum noſtra aequatio ſit indutura, inveſtigari oportet. Ac primo quidem obſeruo ſi amplitudo tubi vbique eſſet eadem $\omega = ff$, tum formulam $ff\int\frac{ds}{\omega}$ longitudinem totius tubi in ſe redeuntis eſſe expreſſuram, quatenus ergo amplitudo variabilis ω fuerit vel maior vel minor quam ff, eatenus valor iſtius integralis vel minor erit vel maior illa longitudine tota. Poſita ergo tota hac longitudine $= a$, ſtatuatur intrgrale per totum tubum expanſum

$\int\int\int\frac{ds}{\omega} = \lambda a$. Deinde integrale $\int\frac{d\omega}{q\omega^3}$ per totum tubum extenſum vel iterum euaneſcit, vel certum quendam valorem induit, prout binae variabiles q et ω inter ſe fuerint comparatae, ponamus ergo valorem integralis $\int\frac{d\omega}{q\omega^3}$ per totum tubum extenſi $= \frac{\mu}{f^4}$. Integralis autem $\int z\, dq$ valor diligentiorem inueſtigationem poſtulat; ſumatur in tubo alius locus S' vbi denſitas aquae eadem ſit $= q$ atque in loco S, ibi autem altitudo ſuper plano horizontali fixo ſit $= z'$. Quia vero ab A ad S progrediendo quantitas q augebatur, vlterius autem curſu per B vsque ad S' inſtituto, quantitas q decreſcit pro puncto S' loco dq ſcribere debemus $-dq$, ita vt binis tubi elementis in S et S' iunctim ſumtis habeatur $(z - z')\, dq$, et nunc integrale $\int(z - z')\, dq$ ab A tantum vsque B extendi oportet. Hunc in finem
Tab. VI. Fig. 68. ſumta recta C A $=$ denſitati minimae 1, et C B $=$ maximae $1+\alpha$ notentur quotcunque denſitates mediae CE, CF, CG, CH etc. atque in tubo notentur bina loca coniugata EE', FF', GG', HH' in quibus illae denſitates inſint, tum cuique exceſſui, quo altitudo punctorum E, F, G, H ſuperat altitudinem punctorum E', F', G', H' ſtatuantur applicatae aequales Ee, Ff, Gg, Hh, et curuae per puncta e, f, g, h ductae area A$efgh$BA dabit verum valorem integralis $\int z\, dq$ quatenus per totam tubi longitudinem extenditur. Statuamus hunc valorem $\int z dq = h$ et facto integro circuitu pro preſſione in A habebimus

$$2gp = \Delta : t + 2gh - vv - \mu vv - \frac{\lambda a dv}{dt}$$

qui

qui valor cum ante inuento $2gp = \Delta : t - vv$ aequalis eſſe debeat pro motu determinando naſcetur haec aequatio:

$$\lambda a dv + \mu vv dt = 2gh dt \text{ ſeu } dt = \frac{\lambda a dv}{2gh - \mu vv}$$

quae tres ſupeditat caſus conſiderandos

I. Si $\mu = 0$ erit $t = \frac{\lambda a v}{2gh}$ ideoque $v = \frac{2gh}{\lambda a} t$.

II. Si $\mu > 0$; ponatur $\mu = \frac{2gh}{cc}$, fit $dt = \frac{\lambda a c c d v}{2gh(cc - vv)}$, hincque integrando $t = \frac{\lambda a c}{4gh} l \frac{c+v}{c-v}$, ſiquidem poſito $t = 0$ eſſe debet $v = 0$ faciamus $\frac{4gh}{\lambda a c} = \gamma$, eritque $v = \frac{e^{\gamma t} - 1}{e^{\gamma t} + 1} c$.
Hoc ergo caſu celeritas v quidem creſcit ſed non vltra terminum c quem demum elapſo tempore infinito aſſequitur. Hinc caſus primus naſcitur ſi $c = \infty$.

III. Si $\mu < 0$ ponatur $\mu = \frac{-2gh}{cc}$, vt fiat $dt = \frac{\lambda a c c d v}{2gh(cc + vv)}$ hincque integrando $t = \frac{\lambda a c}{2gh}$ Ang. tang. $\frac{v}{c}$: vnde elicimus $v = c$ tang. $\frac{2gh}{\lambda a c} t$. Hoc ergo caſu elapſo tempore finito $t = \frac{\pi . \lambda a c}{4gh}$, celeritas v iam fit infinita.

Exemplum.

149. Sit tubus circularis in plano verticali poſitus aqua plenus radio exiſtente $CA = CB = c$. Sumto autem angulo $ACS = \phi$, fit in S denſitas aquae $q = 1 - \alpha \operatorname{coſ.} \phi$, et amplitudo tubi $\omega = ff (1 - \beta \operatorname{ſin.} \phi)$ altitudo vero ſuper plano horizontali $z = c \operatorname{ſin.} \phi$ exiſtente arcu $AS = c\phi = s$. Cum iam pro motu in plagam AECD, poſita in ſectione Tab. VI. Fig. 64.

 vbi

vbi foret denſitas $= 1$ et amplitudo $= ff$, celeritate $= v$, haec inuenta ſit aequatio

$$0 = 2g\int z\,dq - f^4 vv\int\frac{d\omega}{q\,\omega^3} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

his integralibus per totum circulum extenſis ſingula ſeorſim euoluamus. Ac primo quidem ob $z = c\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $dq = \alpha\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$ erit

$$\int z\,dq = \alpha c\int d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\alpha c\int d\Phi(1 - \text{coſ.}\,2\Phi) = \tfrac{1}{2}\alpha c(\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\Phi)$$

cuius valor per totum circulum ponendo $\Phi = 2\pi$ expanſum praebet $\int z\,dq = \pi\alpha c$. Deinde ob ds $c\,d\Phi$ et $\omega = ff(1 - \beta\,\text{ſin.}\,\Phi)$ fit

$$ff\int\frac{ds}{\omega} = c\int\frac{d\Phi}{1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}}\Big(\text{Ang. ſin.}\sqrt{(1-\beta\beta)} - \text{Ang. ſin.}\frac{\text{coſ.}\,\Phi\sqrt{(1-\beta\beta)}}{1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi}\Big).$$

Sit ψ angulus iſte cuius ſinus eſt $\frac{\text{coſ.}\,\Phi\sqrt{(1-\beta\beta)}}{1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi}$, et poſito $\Phi = 90^\circ$ fit $\psi = 0$, poſito autem $\Phi = \pi$ fit

$$\psi = -\text{Ang. ſin.}\sqrt{(1-\beta\beta)}$$

poſito porro $\Phi = 270^\circ$ fit $\psi = -\pi$, poſito denique $\Phi = 2\pi$ colligitur

$$\psi = -2\pi + \text{Ang. ſin.}\sqrt{(1-\beta\beta)},$$

ex quo pro toto circulo fit $ff\int\frac{ds}{\omega} = \frac{2\pi c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}}$ quod idem clarius fit ſi β vt valde paruum ſpectemus; tum enim erit

$$\int\frac{d\Phi}{1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi} = \int d\Phi(1 + \beta\,\text{ſin.}\,\Phi) = \Phi - \beta\,\text{coſ.}\,\Phi + \beta,$$

cuius valor poſito $\Phi = 2\pi$ fit $= 2\pi$. Pro tertia formula integrali ob $d\omega = -\beta\,ff\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $q = 1 - \alpha\,\text{coſ.}\,\Phi$ erit

$f^4\int$

$$f^4 \int \frac{d\,\omega}{q\,\omega^3} = -\beta \int \frac{d\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\alpha\,\text{coſ.}\,\Phi)(1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi)^3}$$

Conſideremus iterum β perinde ac α valde paruum vt denominator cenſeri poſſit $= 1 - \alpha\,\text{coſ.}\,\Phi - 3\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi$, hincque habeatur

$$f^4 \int \frac{d\,\omega}{q\,\omega^3} = -\beta \int d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi (1 + \alpha\,\text{coſ.}\,\Phi + 3\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi) \text{ ſeu}$$

$$f^4 \int \frac{d\,\omega}{q\,\omega^3} = -\beta(\text{ſin.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\alpha\Phi + \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2\Phi - \tfrac{3}{4}\beta\,\text{coſ.}\,2\Phi + \tfrac{3}{4}\beta)$$

cuius valor poſito $\Phi = 2\pi$ fit $= -\pi\alpha\beta$. Quocirca noſtra aequatio differentialis ita ſe habebit:

$$0 = 2\,\pi\alpha g c + \pi\,\alpha\beta v v - \frac{2\,\pi\,c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}} \cdot \frac{d\,v}{d\,t}$$

vbi quia ipſius β altiores dimenſiones negligimus loco $\sqrt{(1-\beta\beta)}$ ſcribere licet 1, ita vt ſit

$$d\,t = \frac{c\,d\,v}{\alpha(g c + \frac{1}{2}\beta v v)}.$$

Cum ergo facta comparatione cum forma ſupra exhibita ſit $\lambda a = c$, $2\,g\,h = \alpha\,g\,c$ et $\mu = -\frac{1}{2}\alpha\,\beta$, ſi β ſit numerus poſitiuus ex caſu tertio fit $c c = \frac{2\,g\,h}{-\mu} = \frac{2\,g\,c}{\beta}$ et $c = \sqrt{\frac{2\,g\,c}{\beta}}$ vnde colligitur:

$$v = \frac{\sqrt{2\,g\,c}}{\sqrt{\beta}} \text{ tang. } \frac{\alpha\,\gamma\,\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\,g\,c}}\,t\,,$$

ita vt poſt tempus $t = \frac{\pi\sqrt{2\,g\,c}}{2\,\alpha\,g\,\sqrt{\beta}}$ ſec. celeritas iam fiat infinita.

At ſi ϵ ſit numerus negatiuus ſeu amplitudo tubi in S generaliter $\omega = f\!f(1 + \epsilon\,\text{ſin.}\,\Phi)$ comparatio cum caſu ſecundo inſtitui debet; ex quo ob $\lambda a = c$; $2 g h = \alpha g c$; et $\mu = \frac{1}{2}\alpha\epsilon$ fit $c c = \frac{2\,g\,c}{\epsilon}$, et $c = \sqrt{\frac{2\,g\,c}{\epsilon}}$. Capiatur ergo numerus $\gamma = \frac{2\,\alpha\,g\,\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2\,g\,c}}$ et ad datum

 tempus

tempus t erit $v = \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{e^{\gamma t} - 1}{e^{\gamma t} + 1}$ quae ergo celeritas elapſo demum tempore infinito fit $= \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}}$.

Coroll. 1.

150. Ex caſu $\omega = ff(1 - \beta \sin. \Phi)$ diſcimus in genere, ſi tubi pars ſuperior A E B anguſtior ſit quam pars inferior A D B, tum motum aquae tantopere accelerari, vt iam tempore finito celeritas fiat infinita. Ex altero vero caſu $\omega = ff(1 + \beta \sin. \Phi)$ colligimus in genere, ſi tubi pars ſuperior A E B fuerit amplior inferiori A D B, tum motum multo minus accelerari, vt elapſo adeo tempore infinito celeritas non ſit certum limitem ſuperatura.

Coroll. 2.

151. Pro formula integrali $f^4 \int \frac{d\omega}{q\,\omega^3}$ ſi tantum α vt fractio valde parua ſpectetur, ipſi β valorem quemcunque vnitate ſaltem minorem relinquendo, calculo ſubducto reperitur eius valor per totum circulum extenſus $= \frac{-\pi\alpha\beta}{(1-\beta\beta)\sqrt{(1-\beta\beta)}}$ hincque motus hac aequatione exprimetur:

$$dt = \frac{2(1-\beta\beta)c\,dv}{2\alpha g c(1-\beta\beta)^{\frac{3}{2}} + \alpha\beta vv}.$$

Coroll. 3.

152. Calculo hinc vlteriori ſubducto pro amplitudine $\omega = ff(1 - \beta \sin. \Phi)$ reperitur $v = (1-\beta\beta)^{\frac{3}{4}}$

$\frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}}$

$\frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}}$ tang. $\frac{\alpha g \sqrt{\beta}}{(1-\beta\beta)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2gc}}\, t$ pro altero vero caſu amplitudinis $\omega = ff(1+\beta \text{ ſin. } \Phi)$ ſumto

$$\gamma = \frac{2\alpha g \sqrt{\beta}}{(1-\beta\beta)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2gc}} \text{ erit } v = (1-\beta\beta)^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{e^{\gamma t}-1}{e^{\gamma t}+1}.$$

Scholion.

153. Quando vti in exemplo allato vſu venit, quantitates variabiles q, z et ω, ſunt certae functiones continuae ipſius s inueſtigatio ſecundum praecepta analyſeos conſueta inſtitui poteſt. Verum ſi tubus conſtet pluribus partibus nulla continuitatis lege inter ſe connexis, tum pro ſingulis partibus valores formularum integralium, quae in motus determinationem ingrediuntur, ſeorſim inueſtigari ac deinceps colligi oportet. Directrice tubi A B in directum extenſa pro eius portione E F dentur in E altitudo $EH = h$, amplitudo tubi $EN = ffn$ et denſitate aquae $EM = m$ in F vero ſint eadem elementa $EH' = h'$; $EN' = ffn'$, et $EM' = m'$, quae ab E et F ita vniformiter mutari aſſumamus vt ſcalae ea repraeſentantes HZH', NON' et MQM' pro lineis rectis haberi poſſint. Hinc $EF = e$, et $ES = x$, vt ſit $ds = dx$, erit $SZ = z = h + \frac{(h'-h)x}{e}$; $SO = \omega = ff(n + \frac{(n'-n)x}{e})$ et $SQ = q = m + \frac{(m'-m)x}{e}$. Quamobrem ſi differentias $h' - h$, $n' - n$ et $m' - m$ vt valde paruas ſpectemus, inueniemus primo $ff\int\frac{ds}{\omega}$ Tab. VI. Fig. 69.

$= \int$

$= \int \frac{e\,dx}{e\,n + (n' - n)x}$, quod per ſpatium E F $= e$ expanſum fit

$$= \frac{e}{n' - n}\, l\, \frac{n'}{n} = e\left(\frac{1}{n} - \frac{(n' - n)}{2\,n\,n} + \frac{(n' - n)^2}{3\,n^3} - \text{etc.}\right).$$

Deinde eſt

$$\int z\,d\,q = \frac{m' - m}{e} \int d\,x\left(b + \frac{(b' - b)\,x}{e}\right)$$

quod integrale pariter per totum ſpatium E F $= e$ expanſum praebet

$$\int z\,d\,q = \tfrac{1}{2}(b' + b)(m' - m).$$

Denique formula $f^4 \int \frac{d\,\omega}{q\,\omega^3}$ abit in hanc formam

$$\frac{n' - n}{e\,n^2}\left(\frac{x}{m\,n} - \frac{3\,(n' - n)}{2\,e\,m\,n\,n}\,x\,x - \frac{(m' - m)}{2\,e\,m\,m\,n}\,x\,x \text{ etc.}\right)$$

ſicque iſtius formulae valor per ſpatium E F extenſus erit

$$\frac{n' - n}{m\,n^3} - \frac{3\,(n' - n)^2}{2\,m\,n^4} - \frac{(m' - m)\,(n' - n)}{2\,m\,m\,n^3},$$

cuius ſufficit partem ſumſiſſe primam $\frac{n' - n}{m\,n^3}$. Exempla non addo, quia praecipua phaenomena ex figura circulari ſatis iam ſunt facta manifeſta.

EXAMEN

EXAMEN PHYSICO-MECHANICVM

DE

MOTV MIXTO QVI LAMINIS ELASTICIS A PERCVSSIONE SIMVL IMPRIMITVR.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Varii vtique ſyſtemati ſimul ineſſe poſſunt motus, quorum vnusquisque, independenter a reliquis, ſua peculiari lege perficiatur, non ſecus ac ſi ſolus eſſet; Duo huius rei allegabo exempla, quae praeſentium commentationum argumentum facient: *primo* motum progreſſiuum coniunctum cum motu rotatorio circa centrum grauitatis, *ſecundo* motum itidem progreſſiuum cui accedit motus vibratorius; in vtroque exemplo ambo ſimul motus ab vna eademque cauſa ſimplici, nempe a percuſſione, produci poſſunt. Requiritur autem quanam proportione vterque effectus a communi cauſa ſit oriturus: etenim tanto minor orietur a percuſſione motus progreſſiuus atque adeo tanto magis aberrabunt leges communiter receptae de motibus a percuſſione oriundis, quanto maior vis percuſſionis pars impenditur

tur in motum rotatorium vel vibratorium excitandum. Equidem ſolutionem quaeſtionis noſtrae pro motu rotatorio coniuncto cum motu progreſſiuo iam ante plurimos annos, cum a nemine adhuc tractatum eſſet hoc argumentum, cum Academia communicaui in Diatriba hiſce commentariis ſuo tempore inſerta *de percuſſione excentrica*: quia vero animus eſt communi principio theoriam ſuperinſtruere, erit e re noſtra priſtinum argumentum breuiter reſumere.

Tab. VII. Fig. 1. §. 2. Sit igitur virga $a\,b$ recta, vtcunque inaequaliter grauis nullamque admittens inflexionem: percutiatur in puncto c verſus γ atque hoc punctum, primo poſt percuſſionem tempuſculo, peruenire putetur in γ totamque virgam in ſitum $\alpha\,\gamma\,\beta$; ſic ambo ſitus ſe interſecabunt in puncto e; iſtud vero punctum vel intra extremitates a et b vel extra eas cadere poterit; ab eo autem tempore audire coepit *centrum rotationis ſpontaneae*, etiamſi pro primo tantum a percuſſione tempuſculo admitti poſſit: vera rotatio fit circa centrum grauitatis, quod ipſum ſimul motu rectilineo vniformiter moueri pergit, ſicque motus abſolutus vniuscuiusque puncti variabilis eſt nec punctum interſectionis e abſolute quieſcit, ad momentum quam cum motus centri grauitatis ad poſitionem virgae perpendicularis eſt. Sumatur nunc punctum e pro initio abſciſſarum ſitque diſtantia $c\,e = s$: deinde duo accipiantur puncta infinite propinqua o et p; ponatur $e\,o = x$; $o\,p = d\,x$; centro

centro e ducantur arculi infinite parui $d\delta$, oq, pr, $c\gamma$ et $a\alpha$; denotat autem punctum d poſitionem centri grauitatis: denique ponduſculum elementi op ponatur $= d\xi$. Iam putetur loco ponduſculi $d\xi$ aliud ſubſtitui in puncto percuſſionis c, quod vi impellenti eandem offerat inertiam reſpectu puncti e, quod tanquam quieſcens eo momento pro puncto fixo, circa quod rotatio fiat, aſſumi poterit; notum eſt hoc ponduſculum in puncto c ſubſtituendum eſſe $= \frac{xx}{ss} d\xi$. Hoc modo erit maſſa integra in c ſubſtituenda $= \int \frac{xx\,d\xi}{ss}$. Iam vero per ſe patet, punctum e ita fore locatum vt omnis maſſa in c ſubſtituta minima fiat ſeu vt minimam inertiam vi impellenti offerat; igitur efficiendum erit, vt iſta quantitas $\int \frac{xx\,d\xi}{ss}$ vel $\frac{\int xx\,d\xi}{ss}$ (eſt enim hactenus diſtantia s conſtans) minima fiat. Hunc in finem diſtantia s quantitate infinite parua augeri ponatur, quam vocabimus α: ſic pro diſtantiis s et x ſubſtituendae erunt diſtantiae $s + \alpha$ et $x + \alpha$ atque tunc fiet tota maſſa in puncto percuſſionis c ſubſtituenda $= \frac{\int (x+\alpha)^2\,d\xi}{(s+\alpha)^2}$; atque haec priori cenſenda eſt aequalis vi legis maximorum et minimorum: aequatio iſta, reiectis terminis infinite paruis ſecundi ordinis, dat denique $s = \frac{\int xx\,d\xi}{\int x\,d\xi}$. Igitur punctum c eſt centrum oſcillationis virgae ab ex puncto e ſuſpenſae vel reciproce punctum quaeſitum e eſt centrum oſcillationis virgae ex puncto percuſſionis ſuſpenſae. Atque haec eſt eadem illa proprietas quam olim obſeruaueram.

 §. 3.

§. 3. Alio nunc vtar principio metaphyſico amplioris vſus etſi parum diuerſo. Si maſſa omnium particularum, poſtquam in punctum percuſſionis translatae fuerunt, minima ſit, conſequens eſt, vt pro eadem velocitate puncti c integra vis viua a percuſſione in virgam, antea quieſcentem, translata minima fiat; hoc equidem principium in praeſenti quaeſtione mihi clarum videtur. Exprimatur velocitas puncti c per $c\gamma$ ſitque $c\gamma = c$ atque tunc quaeritur, quisnam futurus ſit integrae virgae motus?

Ponatur iterum virgam, poſt primum a percuſſione tempuſculum, ſitum primitiuum ab commutaſſe cum ſitu $\alpha\beta$, retentis omnibus denominationibus antea adhibitis. Erit velocitas in puncto $o = \frac{x}{s} c$ atque vis viua elementi op fiet $= \frac{xx}{ss} cc d\xi$: ergo vis viua integrae virgae erit $= \int \frac{x}{s}\frac{x}{s} cc d\xi$, et cum ponitur c conſtans ſequitur iterum ex altero principio, punctum e ita eſſe poſitum vt ſit quantitas $\int \frac{xx d\xi}{ss}$ minima.

Gaudet etiam punctum e hac proprietate geometrica ſi virga fuerit vniformiter grauis vt ſolidum generatum ex rotatione lineae $\alpha\beta$ circa axem ab inter omnia alia minimum ſit. Caeterum ex determinata poſitione puncti e immediate deducitur relatio inter motum progreſſiuum communem et motum rotatorium; poſito enim centro grauitatis in d, erit motus centri grauitatis ad motum rotatorium puncti c circa centrum grauitatis, vt $d\delta$ ad $c\gamma - d\delta$ amboque tales deinde permanebunt.

§. 4.

§. 4. Quia punctum percuſſionis ad arbitrium ſumi poteſt, liquet rationem quamcunque datam inter vtrumque motum obtineri poſſe; haec autem vtique ratio non mutabitur ſiue fortius ſiue leuius virga percuſſa fuerit. Quod ſi vero in ipſo centro grauitatis percutiatur omnis euaneſcet motus rotatorius, quia tunc centrum oſcillationis infinite diſtat a puncto percuſſionis ſiue a centro grauitatis, ſic vt linea $\alpha\beta$ maneat conſtanter parallela cum linea $a\,b$. Viciſſim, dato vtroque motu in virga ſimul coëxiſtente, facile erit percuſſionem indicare qua ambo motus vna fuerint generati.

§. 5. Prouti motus rotatorius virgae circa ſuum centrum grauitatis vna cum motu eiusdem progreſſiuo vniformiter ſimul conſiſtere poſſunt, ita et motus vibratorii cum motu progreſſiuo in virga coëxiſtere poſſunt, ſi flexilis et elaſtica ponatur: patet quoque motus vibratorios ſeorſim ſumtos ſitum centri grauitatis non variare nec motum vnum ab altero perturbari; ambo autem motus ſimul ab vna eademque percuſſione produci poterunt: nouum iſtud argumentum phyſicorum aeque ac geometrarum examine haud indignum puto. Ne vero in ipſo limine a pluribus difficultatibus inutiliter vexemur, totam rem ad ſimpliciſſimas reducam hypotheſes.

Fuerit virga vel lamina tota ſua longitudine aeque craſſa, grauis, flexilis et vbique perfecte elaſtica: haec ſuper plano horizontali quieſcens percutiatur in medio centro grauitatis; ſic lamina a per-

 cuſſione

cuſſione praeter motum progreſſiuum ſimul obtinebit motus reciprocos vel vibratorios; haſce vibrationes, vt fieri ſolet, pro valde paruis habebimus; attamen cum incredibili rapiditate abſoluantur et ſe inuicem ſubſequantur, fieri poterit vt hiſce motibus vis viua inſit, quae notabilem habeat proportionem cum vi viua motui eiusdem laminae progreſſiuo debita: vnde motus progreſſiuus, quem lamina ab impulſu obtinuit, haud parum diminuetur. Leges enim motuum a percuſſione in corporibus elaſticis ſupponunt omnem ab impulſu effectum in variationem motuum progreſſiuorum impendi, quam ſuppoſitionem vel ſolus ſonus corporum percuſſorum deſtruit.

§. 6. Notetur porro, percuſſionem phyſice conſideratam, comparari poſſe cum enormi preſſione parum admodum durante; percuſſio autem tam diu durat, quamdiu corpora manent contigua, haecque contiguitas ob flexibilitatem corporum ad momentum temporis phyſicum perdurare poteſt et donec ſubſiſtit variatio in ſyſtemate oritur nimis complicata, quam vt calculos admittat. Non haeſitaui adeoque ſupponere integram percuſſionem fieri in inſtanti. Solenne eſt phyſicis flexibilitati corporum ſubſtituere elaſtrum inter ambo corpora poſitum, quod comprimi ſeſeque reſtituere poſſit; ſi tunc tale elaſtrum longitudinem habere infinite paruam fingamus, veram habebimus ideam percuſſionis in inſtanti peractae: hoc igitur ipſo inſtanti laminae

per-

percuſſae ambos ſuos motus totos impreſſos cenſebimus atque, ſi motum laminae vibratorium ſeorſim conſideremus, reducta erit lamina in ſtatum, quem habet inter vibrandum, quoties in lineam rectam reſtituitur atque in partem contrariam inflecti incipit, quod in quauis media vibratione contingit. Hic omnino requiritur notitia harum vibrationum, quarum infinitae ſunt ſpecies; argumentum iſtud ante hos triginta et quod excurrit annos ſcrupuloſe, pro eius dignitate atque complicatione, perquiſiui eiusque integram theoriam expoſui in commentariis hiſce, duobus ſchediaſmatibus, altero *de vibrationibus et ſono laminarum elaſticarum* altero *de ſonis multifariis quos laminae elaſticae diuerſimode edunt*. Illuſtris *Eulerus* noſter, cui iſtud argumentum propoſueram, ſolutionem inuenit cum mea plane conformem. Plura tum temporis iam monui expreſſis verbis de coëxiſtentia vibrationum diuerſarum ſonisque pluribus, qui inde producuntur, ſimul et vna diſtinctiſſime perceptis, quibus principiis longo poſt tempore vſus ſum ad illuſtrandam theoriam de chordis ſonoris atque vibrationibus ſyſtematum, ex quocunque numero corporum, compoſitorum; haec omnia forent in memoriam reuocanda, ſi omni rigore praeſentes disquiſitiones pertractare vellemus; at potius operam dabo vt quae dicenda habeo in compendium contrahantur.

§. 7. Quaeritur imprimis an proportio inter vtrumque motum, primo poſt percuſſionem tempuſculo, Tab. VII. Fig. 2.

puſculo, definiri poſſit? Fuerit ante percuſſionem lamina recta et vniformis in ſitu $a\ b$ (fig. 2.) eaque percutiatur in puncto medio c: putetur punctum c primo poſt percuſſionem tempuſculo infinite paruo peruenire in γ atque laminam incuruari ſimulque transferri in ſitum $\alpha\ \gamma\ \beta$. Ducatur recta $\alpha\ \beta$ vna cum lineola $\gamma\ c\ p$: fuerit centrum grauitatis laminae incuruatae in o: ſic exprimet lineola $c\ o$ velocitatem centri grauitatis et $o\ \gamma$ velocitatem motus vibratorii pro laminae puncto medio, eo temporis momento quo lamina ſe incuruare incipit; tota autem $c\ \gamma$ repraeſentabit velocitatem abſolutam puncti c. Iam vero liceat ſupponere curuam $\alpha\ \gamma\ \beta$ pertinere ad claſſem earum curuarum, quas lamina ſucceſſiue aſſumit, dum vibrationes ſuas format; at tunc quaeſtio erit quanta futura ſit amplitudo $\gamma\ p$, qua demum curua ipſa ſpecie ſua determinatur? ego quidem exiſtimo, curuam $\alpha\ \gamma\ \beta$ inter omnes ſocias talem fore, vt permutatio vi viua minima pro eadem translatione $c\ \gamma$ abſoluatur: hoc modo propoſitus effectus veluti minimis impenſis obtineri videtur; nec nos fefellit principium, quum eo §. 3. vteremur ad determinandum motum virgae rigidae a percuſſione excentrica: nemini obtrudam hypotheſes; videamus ſaltem quo nos perducant.

§. 8. Per punctum γ ducatur linea $m\ n$ ipſi $a\ b$ parallela et aequalis: ſit $\gamma\ m = l$; fuerit, pro puncto qualicunque q, abſciſſa $\gamma\ q = x$; applicata $q\ r = y$; lineola data $\gamma\ c = \beta$ et quaeſita $\gamma\ p = \alpha$; memi-

meminerimus autem quantitates y, α, β eſſe veluti infinite paruas. Quaecunque iam fuerit curua $\alpha\gamma\beta$, notum eſt atque demonſtratum ex natura vibrationum minimarum iſochronarum, ſingulas applicatas qr vnice pendere a maxima amplitudine $\gamma p = \alpha$ et a functione numerica compoſita ex abſciſſa x et ſemilongitudine l, quae functio ſi indicetur per ξ habebitur $y = \xi\alpha$; producta autem lineola qr vsque in s fit $sr = \beta - \xi\alpha$ et cum motus abſolutus elementi dx repraeſentetur per sr, exprimemus vim viuam elementi dx per $(\beta - \xi\alpha)^2 dx$ atque vim viuam partis γr per $\int(\beta - \xi\alpha)^2 dx$ ſiue per $\beta\beta x - 2\alpha\beta\int\xi dx + \alpha\alpha\int\xi\xi dx$. Iam vero manentibus valoribus β, x et ξ erit amplitudo α hac lege accipienda vt facta poſt integrationem $x = l$ fiat quantitas $\beta\beta x - 2\alpha\beta\int\xi dx + \alpha\alpha\int\xi\xi dx$ minima: poſito igitur ſola nunc amplitudine α variabili, erit differentiale huius quantitatis $= 0$ ſiue $-2\beta d\alpha\int\xi dx + 2\alpha d\alpha\int\xi\xi dx = 0$; vnde $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\int\xi dx}{\int\xi\xi dx}$. Si vero pro ξ reponatur valor ipſius $\frac{y}{\alpha}$ atque nunc iterum α pro quantitate conſtante, vt debet, aſſumitur, habebitur aequatio finalis:

$$\beta = \frac{\int yy dx}{\int y dx}.$$

§. 9. Egregiam haec aequatio indicat proprietatem; ſcilicet ſumatur mn pro axe horizontali, circa quem curua $\alpha\gamma\beta$, qualiscunque ad hoc negotium ſumenda fuerit, minimas perficiat oſcillationes erit punctum c in centro oſcillationis huius curuae;

 quia

quia porro centrum grauitatis eiusdem curuae poſitum fuit in o, repraeſentabit diſtantia centri oſcillationis a centro grauitatis, id eſt, diſtantia $c\,o$ velocitatem motus progreſſiui a percuſſione oriundi, ſiue velocitatem centri grauitatis, haecque velocitas permanebit. Deinde lineola $o\,\gamma$ exprimit velocitatem initialem puncti medii c, quae ad motum vibratorium pertinet, haec velocitas vibratoria poſtea ſenſim diminuitur inſtar corporis penduli dum inter oſcillandum arcum aſcenſus deſcribit. Sed et olim demonſtraui longitudinem penduli, quod cum vibrationibus laminae iſochronum eſt; atque ex his omnibus integer laminae motus a percuſſione definitur, modo congrua accipiatur curua $\alpha\,\gamma\,\beta$.

§. 10. Nunc itaque requiritur vt curuatura laminae conſideretur; Demonſtraui olim in duobus ſchediasmatibus §. 6. allegatis curuaturam laminae motiunculis reciprocis agitatae generaliſſime hac exprimi aequatione $y = a\,e^{\frac{x}{f}} + b\,e^{\frac{-x}{f}} + h\,\text{ſin.}\,(\frac{x}{f} + n)$ quae infinitas curuarum claſſes ſubminiſtrat, inter quas ſola ſimpliciſſima hic attentionem meretur, quia omnia experimenta indicant vibratiunculas altiorum generum excurſiones facere longe minimas; licebit ſaltem rem ita conſiderare, quaſi lamina ſolas ſuas vibrationes fundamentales ad normam figurae 2. perficiat, ſed et tunc aequatio quantitatibus ſimilibus exprimitur, vnde intelligitur quantitatem $\int y\,y\,d\,x$ omnem fere analyſin eludere; igitur reccurrendum erit ad approximationes per ſeries, quas pariter in citatis amba-

bus

bus diatribis exhibui: ſed et haec operatio taedioſa foret. Aliam igitur aperiam methodum facilem atque parum a vero abducentem tramite, quod ſola figurae inſpectione manifeſtum fit et quod ipſo calculo edoctus ſum. Scilicet ſupponere licebit curuam $\alpha\gamma\beta$ ſimplicem eſſe parabolam, quae verticem habeat in γ ſuper axe γp et cuius parameter veluti infinities maior ſit quam amplitudo γp.

§. 11. Ponatur itaque, retentis denominationibus antea adhibitis, $y = \frac{xx}{ll}\alpha$, quae eſt aequatio ad parabolam cuius parameter $= \frac{ll}{\alpha}$ adeoque veluti infinita quia α ſupponitur valde parua. Quod ſi iam pro tali parabola ponatur $\gamma p = \alpha$, reperitur $\gamma o = \frac{1}{3}\alpha$, quae denotat diſtantiam centri grauitatis o a vertice γ: inuenitur porro $\gamma c = \frac{3}{5}\alpha$, quae eſt diſtantia centri oſcillationis a vertice (§. 9.); hinc etiam $c o = \frac{4}{15}\alpha$ atque $c p = \frac{2}{5}\alpha$. Valores iſti nos docent quod ſi lamina primo poſt percuſſionem tempuſculo ſitum $a b$ permutarit cum ſitu $\alpha\gamma\beta$, haec permutatio ita facta ſit vt centrum grauitatis deſcripſerit lineolam $c o = \frac{4}{15}\alpha$: iſta vero permutatio indicat velocitatem motus progreſſiui, quae permanens erit; hoc motu lamina $a b$ cenſenda eſt perveniſſe in ſitum parallelum $f g$ per centrum grauitatis o tranſeuntem. Deinde $o\gamma = \frac{1}{3}\alpha$ exprimit velocitatem, qua punctum medium motum ſuum vibratorium ſuper axem $f g$ efficere incipit. Denique $c\gamma = \frac{3}{5}\alpha$ exprimit velocitatem initialem abſolutam puncti medii c in quo percuſſio facta fuit. Eſt itaque

que velocitas $c o$ ad velocitatem $o \gamma$ vt $\frac{4}{15} \alpha$ ad $\frac{1}{3} \alpha$ ſiue vt 4 ad 5.

§. 12. Determinanda ſupereſt vis viua laminae, quae ex vtroque motu ſeorſim naſcitur. Quod primo pertinet ad motum localem progreſſiuum, velocitas eius, ſingulis elementis communis, aeſtimanda eſt ex $co = \frac{4}{15} \alpha$ eiusque maſſa ex longitudine laminae $= 2 l$, vnde ſtatim eruitur vis viua pro motu laminae progreſſiuo $= \frac{32}{225} \alpha \alpha l$. At vero vis viua, motui vibratorio debita, deducenda eſt ex velocitate ſingularum particularum, facta velocitate puncti medii $= o \gamma = \frac{1}{3} \alpha$: iſta vero velocitas pro quouis alio puncto r mutatur in $\frac{1}{3} \alpha - y$; ergo pro motu vibratorio fit vis viua cuiuscunque elementi:

$$= (\tfrac{1}{3} \alpha - y)^2 dx = (\tfrac{1}{3} \alpha - \tfrac{x x}{l l} \alpha)^2 dx,$$

cuius integrale eſt $= \frac{1}{9} \alpha \alpha x - \frac{2 \alpha \alpha x^3}{9 l l} + \frac{\alpha \alpha x^5}{5 l^4}$: ſic, facta $x = l$, oritur vis viua pro dimidia lamina $= \frac{4}{45} \alpha \alpha l$ adeoque vis viua totius laminae motui vibratorio debita $= \frac{8}{45} \alpha \alpha l$; ſunt itaque vires viuae, motui progreſſiuo et motui vibratorio debitae vt $\frac{32}{225}$ ad $\frac{8}{45}$ ſeu vt 4 ad 5. Ergo haec ratio, quod notari meretur, eadem eſt cum ratione quam inuenimus inter velocitates puncti medii pro vtroque motu ſeorſim ſumto. Quod ſi igitur integra vis viua, quam lamina vtroque ſuo motu a percuſſione accepit, dicatur A, erit vis viua ſoli motui progreſſiuo debita tantum $\frac{4}{9}$ A ipſaque velocitas huius motus erit $\frac{2}{3}$ eius velocitatis quam leges communiter receptae

receptae indicant. Haec omnia vero propemodum eadem erunt ſi loco curuaturae parabolicae ea ſubſtituatur, quam lamina motu ſuo vibratorio naturaliter aſſumit. Reliquae interim $\frac{5}{9}$ partes vis viuae totalis in motum vibratorium formandum ipſamque ſimul laminam incuruandam impenduntur.

§. 13. Statim itaque a percuſſione, ſingula laminae elementa determinata velocitate vibrationes ſuas incipiunt; punctum autem medium laminae maximas facit excurſiones, haeque excurſiones tanto erunt maiores quanto flexibilior eſt lamina; attamen omnes quas allegauimus, proportiones eaedem manent: ſolutio huius paradoxi in hoc poſita videtur, quod creſcente laminae flexibilitate tempus vnius vibrationis ſimul creſcat, ſic vt tempore vnius vibrationis ſpatium a centro grauitatis vniformiter deſcriptum nihilo minus conſtanter eandem proportionem habere poſſit ad integram amplitudinem cuiusvis vibrationis. Ita et longitudo laminae percuſſae calculos quos fecimus minime perturbat. Quodſi integra excurſio vel amplitudo vibratoria pro puncto medio laminae dicatur $\mathfrak{C}$, erit ſpatium a centro grauitatis vniformiter deſcriptum, dum vna abſoluitur vibratio, aequale $\frac{4}{5}\pi\mathfrak{C}$, intelligendo per π quadrantem circuli, cuius radius vnitate exprimitur, Sunt itaque ſpatiia vtroque motu deſcripta ſibi conſtanter proportionalia, quaecunque ſit laminae longitudo, qualiscunque ipſi inſit ſiue flexibilitas ſiue rigiditas et quaecunque fuerit percuſſionis intenſitas

 modo

modo vibrationes pro valde paruis haberi poſſint. Si lamina vel infinite rigida ſupponatur, ita vt nullam admittere inflexionem, videri poſſit, adhucdum ſaluae manebunt concluſiones noſtrae; arctiſſimo enim vinculo cum adhibitis hypotheſibus cohaerent. Quomodocunque experimentum inſtituatur, non puto vnquam futurum vt lamina percuſſa motu ſuo progreſſiuo vim viuam oſtendat plusquam dimidiam eius quam regulae communes indicant: imo ſi curuatura laminae reuera parabolica accurate conueniret, foret eius vis viua pro ſolo motu progreſſiuo tantum $\frac{4}{9}$ vis viuae totalis.

§. 14. Apparet ergo, quam longe abſit vt in huiusmodi laminis motus progreſſiuus a percuſſione oriatur, qualis in corporibus elaſticis vulgo ſtatuitur. Nec dubito quin etiam in corporibus elaſticis communiter adhibitis, veluti in corporibus ſphaericis, pars notabilis vis viuae a percuſſione ratione motuum progreſſiuorum pereat, quae in motum tremulum partium, corpora conſtituentium, tranſiuerit: hic enim motus tremulus etiamnum poſt finitam percuſſionem corporibus inhaerebit. Cum res ita ſe habeat in laminis vtcunque breuibus, quidni etiam in globis etiamſi perfecte elaſticis: experimenta diminutionem aliquantulam virium viuarum manifeſtant; diminutio autem male, mea quidem ſententia elaſticitatis defectui adſcribitur. Vel ſolus ſonus, qui a percuſſione in globis excitatur, vibrationes prodit, quarum motus minime negligi poſſe exiſtimo: at deter-

determinatio vibrationum, poſt percuſſionem in globis aliiſue huiusmodi corporibus ſuperſtitum, erit longe difficillima. Nec in ipſis, quas pertractauimus, laminis totum negotium omni, qui deſiderari poſſit, rigore geometrico confectum fuiſſe contendo.

§. 15. Suppoſuimus ſupra curuam $\alpha\,\gamma\,\beta$ eſſe parabolam loco illius curuae quam lamina, vibrationes faciens, format; haec vtique ſuppoſitio non aliter quam proxime vera accipienda eſt, facile autem admitti poſſe apparebit, ſi quaeratur punctum e in quo linea $f\,g$, per centrum grauitatis parabolae $\alpha\,\gamma\,\beta$ tranſiens, ab ipſa hac curua interſecatur: ſcilicet inuenimus $\gamma o = \frac{1}{3}\alpha$ et quia parameter parabolae poſita fuit $= \frac{ll}{\alpha}$, fit ab vtraque parte $oe = l\sqrt{\frac{1}{3}}$ $= \frac{57}{100}\,l$. In diſquiſitionibus autem noſtris, quas olim de vibrationibus et ſonis multifariis laminarum elaſticarum fecimus, determinata fuit haec diſtantia $o\,e = \frac{56}{100}\,l$, vnde videmus quam parum curua parabolica ab altera recedat. Caeterum ambo haec puncta e praerogatiua gaudent, quod ſolo motu vniformi progreſſiuo ferantur, quandoquidem ratione motus vibratorii quieta manent.

§. 16. Liceat pauca ſuperaddere verba de quaeſtione quae hiſce pagellis anſam dedit. Cum ſit per ſe clarum laminam a percuſſione propelli ſimulque, ob partium inertiam, in partes contrarias incuruari, in mentem venit quaeſtio vter motus prope ambas extremitates laminae praeualeret primo poſt percuſſionem

cuſſionem tempuſculo. Si praeualeat motus progreſſiuus in punctis extremis laminae, haec duo puncta motu ſuo initiali abſoluto antrorſum, ſi e contrario motus ab inflexione laminae oriundus excedat alterum, haec eadem puncta retrorſum moueri incipient. Si prius, lamina primo incuruationis momento, non interſecabit ſitum, quem ante percuſſionem habuerat: Si poſterius interſectio fiet, qualem ſiſtit figura noſtra, in qua curua $\alpha\,\gamma\,\beta$ ſecat rectam $a\,c\,b$ in duobus punctis t, t: perpendens quaeſtionem, dubius, quod fateor, aliquamdiu haeſi: mox tamen ad alteram inclinabam ſententiam: etiamſi non ſtatim appareat, qui fieri poſſit vt ſola inertia motum in partes contrarias, ad vtrumque latus ſimul, in lamina plane libera producat: haec porro mecum verſans, denique in mentem incidit theoria, quam nunc expoſui et in qua ſtare non ſum veritus. Haec vero theoria omnino indicat, extremitates laminae percuſſae primo impetu retrorſum ferri et ad vtrumque latus interſectionem fieri in punctis t, t. Solutio praeſentis quaeſtionis vnice petenda erat ex ratione quam calculus doceret exiſtere inter diſtantias $\gamma\,c$ et $\gamma\,p$ et vtra altera eſſet maior. Vidimus autem paragrapho vndecimo, quod poſita $\gamma\,p = \alpha$ fiat $\gamma\,c = \frac{3}{5}\,\alpha$. Igitur neceſſe eſt vt puncta a et b ſitu proximo perveniant in α et β: erit autem $c\,o$ ad $c\,p$ vt 2 ad 3.

§. 17. Denique intereſt, vt ipſa poſitio punctorum t definiatur, in quibus ſcilicet lamina

ſtatim

ſtatim a percuſſione interſecat ſitum, quem eadem lamina habuit ante percuſſionem. Quod ſi pro curua $\alpha\gamma\beta$ iterum accipiamus parabolam (§ 11.) inuenimus $\gamma c = \frac{3}{5}\alpha$, fiet ab vtroque latere $ct = l\sqrt{\frac{3}{5}}$ atque ta vel $tb = l - l\sqrt{\frac{3}{5}}$, vel proxime $ct = 0,77l$ atque ta vel $tb = 0,23l$; at vero pro curua vibratoria poni poteſt $ct = 0,76l$ et ta vel $tb = 0,24l$. Sic ſi fuerit, verbi gratia, lamina trium pedum atque adeo $l = 18$ pollicum, fiet quam proxime ta vel $tb = 4\frac{1}{3}$ poll. et $ct = 13\frac{2}{3}$ poll. Singula puncta in ct ab vtroque latere motu ſuo abſoluto ferentur in antecedentia at vero in ta vel tb motus abſolutus initialis fiet in conſequentia ſiue retrorſum: denique ambo puncta t, t ſtatim a percuſſione erunt veluti ſtationaria. Atque ſic videmus multa ineſſe argumento noſtro, quae non omnem reſpuant determinationem, modo congrua principia adhibeantur eaque magni momenti eſſe poſſe in actione mechanica, quae a percuſſione expectatur, explicanda; quicquid ſit de principiis, quae paullo liberius adoptaui, intelligimus ſaltem in diiudicandis percuſſionibus minime negligendum eſſe motum tremulum, qui in ſyſtemate orietur.

§. 18. Ne omnis methodo noſtrae denegetur fiducia experimenta aliqua ſuperaddam, quae vtcunque obiter inſtituta argumentum noſtrum non male confirmant atque illuſtrant. Norma vſus ſum tripedali, ex ligno duro, flexili, elaſtico conſtructa, recta, vniformi: latitudo eius erat 10 linearum, craſſities

 ſesqui-

ſesquilineae; hanc tabulae horizontali politae impoſui modo in ſuperficie gracili atque percuſſionem feci in ſuperficiem latam, modo in ſuperficie lata tuncque impetum faciebam in ſuperficiem gracilem: hanc normam percuſſi ſemper accurate in centro grauitatis, quod aliquantillum a medio diſtabat, eo modo quo globi eburnei in ludo, qui *billard* vocatur percutiuntur extremitate acutiori clauae ligneae (*la queue*); impulſum feci modo fortiorem modo debiliorem.

Experimentum 1. Laminam vel normam gracili ſua ſuperficie tabulae impoſui atque a tergo vtrique extremitati globulum leuiuſculum appoſui tumque normam eo quo dixi modo percuſſi ſaepius antrorſum; ſemper autem contigit, vt vterque globulus retrorſum, ipſa vero lamina antrorſum, impetum facerent pro intenſitate percuſſionis. conf. §. 16.

Experimentum 2. Globulum vtrumque remoui ab extremitate normae verſus medium, primo ad diſtantiam vnius, deinde duorum, trium, quatuor pollicum; attamen globuli normae contigui ponebantur; ſemper a percuſſione ambo globuli retrorſum ferebantur. Repercuſſio autem manifeſte fiebat tanto debilior, quanto magis globuli ab extremitate fuerunt remoti.

Experimentum 3. Similis fuit euentus, cum globuli, non ad laminam contigui, ſed tantillo inter-

teruallo ab illa ponerentur: hoc interuallum prope extremitates laminae feci aliquando quatuor linearum et adhuc vterque globulus repellebatur; In locis autem ab extremitatibus remotioribus, minori interuallo ponendi erant globuli conf. fig. 2.

Experimentum 4. Cum globulus vterque vltra diſtantiam $4\frac{1}{3}$ poll. ab extremitate normae eſſet poſitus, etiamſi eſſent laminae tantum non contigui, nullam porro repercuſſionem patiebantur conf. §. 17. at vero cum globuli plane contingerent normam nec multum vltra $4\frac{1}{3}$ poll. ab extremitatibus laminae diſtarent, euenit aliquando vt repellerentur; id vero an eueniret nec ne? dubium erat: repulſionem hanc minimis vibratiunculis, quae aliquando in partibus laminae contingunt, diuerſis a vibrationibus primi ordinis maxime conſpicuis tribuo. conf. §. 10.

Experimentum 5. Eandem normam ſuperficie ſua latiori tabulae impoſui atque latus gracile percuſſi; tunc autem virgae rigiditas ſupra modum aucta erat; nec enim absque magno conatu illam tantillum inflectere poteram in plano latitudinis, cum antea facile in plano craſſitiei inflecteretur. Nihilominus percuſſio facta eſt in globulis, cum prope extremitates virgae eidemque contigui eſſent poſiti. Imo parem habui ſucceſſum in norma ſex tantum pollices longa, vnum pollicem lata atque duas lineas cum dimidia craſſa; ex ligno duriſſimo facta, cum eius ſuperficiem latiorem percuterem. Exinde

 intelli-

intelligitur nec auctam laminae rigiditatem nec diminutam longitudinem theoriam euertere atque omnia corpora elaſtica, in quibus a percuſſione motus excitatur tremulus, huc pertinere. conf. §. §. 13 et 14.

De ipſis velocitatibus, quas laminae elaſticae aliaue corpora elaſtica a percuſſione impetrant, nondum feci periculum.

GENVINA

GENVINA
PRINCIPIA DOCTRINAE
DE STATV AEQVILIBRII ET MOTV CORPORVM TAM PERFECTE FLEXIBILIVM QVAM ELASTICORVM.

Auctore

L. EVLERO.

Quae adhuc de figura corporum flexibilium et elaſticorum a Geometris in medium ſunt allata, non latius quam ad fila ſimplicia ſunt extendenda, in quorum figuram, quam a viribus quibuscunque ſollicitata accipiunt eſt inquiſitum, ſiue ea fila ſint perfecte flexibilia, ſiue rigore quodam ſeu elaſticitate inflexioni reſiſtant. Quae enim paſſim de curuatura lintei et velorum tradita reperiuntur, eatenus tantum admitti poſſunt, quatenus has figuras ad curuaturam fili ſimplicis referre licet. Quin etiam omnia, quae in hoc genere ſunt explorata, ad curuas tantum in eodem plano formatas ſunt reſtringenda: quare longiſſime adhuc ſumus remoti a Theoria completa, cuius ope non ſolum ſuperficierum, ſed etiam corporum flexibilium figura definiri queat; atque haec Theoria etiamnunc tantopere abſcondita videtur, vt ne prima quidem eius principia adhuc ſint euoluta, neque etiam hoc loco

 meum

meum inſtitutum permittit, vt talem laborem ſuſcipiam; ſed potius tantum fila ſimplicia ſiue perfecte flexibilia ſiue elaſtica, vti quidem adhuc a Geometris ſunt tractata accuratius ſum contemplaturus. Quum enim pleraeque ſolutiones, quae paſſim ſuper hoc argumento reperiuntur, vel ex principiis tantum particularibus vel ſaltem non ſatis claris et perſpicuis ſint deductae, operam dabo vt vera et generalia principia, quibus determinatio figurae huiusmodi corporum innititur ita dilucide exponam, vt non ſolum ſtatus aequilibrii, ſed etiam motus huiusmodi corporum inde inueſtigari queat.

Problema generale.

Si filum ſiue perfecte flexile ſiue elaſticum et in ſingulis punctis a viribus quibuscunque ſollicitatum ad ſtatum aequilibrii fuerit perductum; pro ſingulis eius elementis ſtatum ſiue tenſionis, ſiue inflexionis inueſtigare.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 3. I. Referat hic curua A M B huiusmodi filum a viribus quibuscunque ſollicitatum, quod in aequilibrio reperiatur atque fixum ſit in terminis A et B, atque manifeſtum eſt in ſingulis huius fili punctis M dari certum tenſionis ſiue inflexionis ſtatum, quem inde intelligere licet, quod ſi hoc filum alicubi in M reſecetur, vtraque portio A M et B M extemplo longe aliam figuram ſit acceptura, vnde neceſſa-

neceſſario ſequitur in hoc puncto M, quamdiu ambae partes adhuc inter ſe ſunt coniunctae, dari quandam vim, quae illi ſeparationi aduerſetur, filumque in hoc ipſo ſtatu aequilibrii quem ſupponimus conſeruet.

II. Quo iſtam vim puncto M quaſi inhaerentem exploremus fingamus inferiorem partem A M reuera abſcindi et quaeramus eas vires, quas in puncto M applicari oportet, vt pars ſuperior B M in eodem plane ſtatu perſeueret; haec enim ipſa vis ante receſſionem in puncto M extitiſſe eſt intelligenda, atque ſi hanc vim pro ſingulis fili punctis determinauerimus, nullum eſt dubium quin verum ſtatum in quo ſingula elementa noſtri fili verſantur, perfecte cognoſcamus.

III. Ponamus hanc ipſam vim quam quaerimus, iam eſſe inuentam et puncto M reuera applicatam, ita vt reſecta portione A M, altera portio B M etiamnunc in priſtino ſtatu perſiſtat, atque primum obſeruo eandem hanc vim ad filum B M in ſtatuo ſuo retinendum requiri etiamſi in puncto quocunque C, filum ope claui vel vnci figeretur, ſiquidem haec operatio nihil in eius figura mutet, hocque etiam intelligendum eſt, ſi filum ſimul in pluribus punctis hoc modo figeretur; quare hoc etjam nunc locum habebit, ſi filum adeo in puncto proximo *m* figatur, nihilo enim minus in puncto M eadem adhuc vi opus erit, ad conſeruationem ſtatus

ſtatus ac ſi tota portio B M eſſet libera atque in ſolo puncto B fixa.

IV. At ſi filum B M in puncto *m*, vt modo diximus ope vncinulae figatur, ita vt nunc ſolum elementum M *m* liberum relinquatur, ei alias vires adplicare non licet, niſi quae id vel ex *m* auellere vel circa *m* inflectere conarentur, vnde iam manifeſtum eſt, ſi filum propoſitum fuerit perfecte flexile, in puncto M nullam vim inflectentem admitti poſſe, quoniam alioquin e veſtigio hoc elementum M *m* circa *m* inflecteretur adeoque non in ſuo ſtatu conſeruaretur. Hoc ergo caſu perfectae flexibilitatis, vis illa quam quaerimus in puncto M adplicanda neceſſario ſecundum ipſam directionem M *m*, ſollicitare debet, ſicque eius directio erit ipſa *m* M T.

V. At ſi filum noſtrum fuerit elaſticitate praeditum, tum ſola vis ſecundum tangentem M T non ſufficiet elemento M *m* in ſitu ſuo retinendo, ſiquidem in puncto *m* fuerit incuruatum, et quia incuruatio vim quandam inflectentem poſtulet, vtrum autem hic incuruatio detur ex tangente proxima *m t* iudicari debet, idque ex angulo elementari T *m t*, quippe cui incuruatio cenſetur proportionalis, quare, ſi elaſticitas filo inſit, vis ea quam quaerimus non ſolum ſecundum tangentem M T erit directa, ſed etiam vis quaedam obliqua adeſſe debet, cuius momentum incuruationem in puncto *m* ſuſtinere valeat.

VI.

VI. His perpenſis intelligimus puncto M praeter vim tangentialem ſecundum MT, aliam inſuper applicatam concipi debere; quae ſit VP normalis ſcilicet ad tangentem MT. Hoc enim menti ita repraeſentare licet, quaſi elemento mM primo virga rigida mT eſſet annexa, tum vero illi in puncto V inſuper vis normalis VP applicata, ita vt vis illa quam quaerimus manifeſto reuocetur ad duas vires, quarum altera agat ſecundum tangentem MT, altera vero ad hanc ſit normalis in certo quodam puncto V.

VII. Vocemus igitur vim illam priorem, quae ſecundum directionem tangentis agit $= T$, alteram vero huic normalem $VP = V$, at pro eius applicatione interuallum $MV = v$, vbi notari oportet, ſi filum omni elaſticitate careat, ſeu perfecte ſit flexile, tum vim normalem V euaneſcere debere, neque propterea interuallum v in calculum ingredi, at ſi filum fuerit elaſticum, tum curuatura in puncto m, quae ex angulo elementari Tmt aeſtimatur, certum virium momentum poſtulabit, ex indole elateris definiendum, cui aequale eſſe debet momentum vis normalis VP, quod eſt Vv, quoniam elementum Mm eſt euaneſcens, ſicque ex natura fili propoſiti, momentum Vv determinatur.

VIII. Conſtitutis his duabus viribus T et V cum interuallo v pro puncto M, transferamus ea ſecundum principia differentialium ad punctum proximum m, vocato elemento $Mm = ds$, atque ducta

tangente mt, vis ſecundum hanc tangentem mt erit $= T + dT$ et vis normalis $vp = V + dV$, tum vero interuallum $mv = v + dv$. Hae ergo vires natura ſua ita ſunt comparatae, vt facta reciſione in puncto m portionem reliquam Bm in eodem ſtatu retineant, perinde ac duae priores vires T et V puncto M applicatae eundem effectum producunt, quem ante reciſionem portio A M in punctum M exeruerat.

IX. Quum igitur vires T et V reſpectu puncti M aequiualeant omnibus viribus, quibus portio A M in punctum M agit, ſimilique modo vires proximae $T + dT$ et $V + dV$, cunctis viribus portionis Am aequiualeant; neceſſe eſt vt hae poſteriores aequiualeant prioribus vna cum viribus elementaribus ipſi elemento Mm applicatis, quoniam hoc aggregatum complectitur vires portioni fili A M et inſuper vires ipſi elemento Mm applicatas, quibus ſimul ſumtis, illae vires ſuis differentialibus auctae aequiualere debent. Quaecunque autem vires elementum Mm afficiant, eas per reſolutionem ſemper ad duas reuocare licet, quarum altera agat ſecundum directionem Mm, altera vero huic ſit normalis, ſecundum mr et quia hae vires, caeteris paribus ipſi elemento $Mm = ds$ ſunt proportionales, ponamus vim tangentialem ſecundum $Mm = pds$ et vim normalem ſecundum $mr = qds$, perinde enim eſt in quonam huius elementi puncto, ſiue m ſiue M haec poſterior vis applicetur; quibus poſitis vires illae T et V vna cum his elementaribus

pds

$p\,ds$ et $q\,ds$, ſimul ſumtae aequiualere debent viribus ſequentibus $T + dT$ et $V + dV$; vnde inſignes relationes orientur, quas ſollicite inueſtigari oportet.

X. In hunc finem ante omnia angulus elementaris Tmt in calculum introduci debet, qui ſi vocetur $= d\Phi$, et radius oſculi curuae in puncto $m = r$, conſtat eſſe $d\Phi = \frac{ds}{r}$, ita vt hic angulus ex curuatura innoteſcat. Nunc conſideremus primo vim tangentialem ſecundum mt quae eſt $= T + dT$, et reſoluta ſecundum directiones mT et MR, dat pro directione $MT = (T + dT)\,\text{coſ.}\,d\Phi = T + dT$ et ſecundum directionem $mR = (T + dT)\,\text{ſin.}\,d\Phi$ $= Td\Phi + dTd\Phi$. Altera autem vis $vp = V + dV$ ad directionem mT applicata, ſeu puncto applicationis in u translato, manente eadem vi $up = V + dV$, dabit $mu = mv = v + dv$, et haec vis ſecundum directionem uT et ad eam normalem us reſoluta, dat vim ſecundum $uT = (V + dV)\,\text{ſin.}\,d\Phi$ $= (V + dV)\,d\Phi$, et vim ſec: $us = V + dV$, ſicque ambae illae vires $T + dT$ et $V + dV$, nunc reductae ſunt ad vires:

I°. vim ſec. $MT = T + dT$ et II. ſec. $mR = Td\Phi + dTd\Phi$

III. ſec. $uT = (V + dV)d\Phi$ et IV. ſec. $us = V + dV$.

XI. Hae igitur quatuor vires aequiualere debent, his quatuor viribus iunctim ſumtis:

I°. ſec. $MT = T$ II°. ſec. $VP = V$,

III°. vi elementari ſec. $mM = p\,ds$ et IV°. ſec. $mr = q\,ds$

 quare

quare hinc primo tangentiales ſecundum m T agentes, ſeorſim inter ſe debent aequari, vnde naſcitur haec aequatio:

$$T+dT+Vd\Phi+dV.\,d\Phi=T+pds,$$

ex qua concluditur

$$dT+Vd\Phi=pds.$$

Secundo vires normales quatenus in eandem partem tendunt, ſeorſim debent eſſe aequales, vnde fit

$$-(T+dT)d\Phi+dV=V+qds \text{ hincque}$$
$$dV-Td\Phi=qds.$$

Tertio vero inſuper requiritur, vt etiam momenta virium normalium, inter ſe conueniant, ſumtis igitur momentis reſpectu puncti m, prodit haec aequatio:

$$-(T+dT)d\Phi.\,o+(V+dV)(v+dv)=V(v+ds)+qds.\,o$$

vnde concluditur

$$vdV+Vdv=Vds,\quad \text{ſiue } d.\,Vv=Vds$$

atque his tribus aequationibus omnia continentur, quae ad problematis noſtri ſolutionem pertinent.

XII. Hoc iam problemate reſoluto, facile omnes caſus quomodocunque vires ſollicitantes fuerint comparatae, dummodo in idem planum cadant expedite euolui poterunt, id quod pro duobus caſibus principalibus quorum prior continet fila perfecte flexibilia, alter vero aequabiliter elaſtica, diſtincte explicemus.

Caſus

Caſus Primus pro filis perfecte flexibilibus.

Iam obſeruauimus hoc caſu vires normales V euaneſcere debere, quo pacto tertia aequatio inuenta ſponte diſparet, duae priores vero nobis ſuppeditant has aequationes:

I. $dT = p\,ds$ et II. $-T\,d\Phi = q\,ds$

quibus omnes curuae, quas fila perfecte flexibilia induere poſſunt a quibuscunque viribus in eodem plano fuerint ſollicitata, facili calculo inueſtigari poſſunt; id quod deinceps aliquot exemplis illuſtrabimus. Ceterum hic obſeruaſſe iuuabit, ſi tenſio eliminetur, ob $T = \int p\,ds$ et $T = -\frac{q\,ds}{d\Phi}$ obtineri hanc aequationem $d\Phi = -\frac{q\,ds}{\int p\,ds}$, quae tantum quantitates cognitas ſeu datas complectitur, quia vires p et q quouis caſu praeſcribuntur.

Caſus Secundus pro filis vniformiter elaſticis.

XIII. Aſſumimus hic filum in ſingulis punctis pari elaſticitatis gradu eſſe praeditum et in ſtatu naturali ſitum rectum tenere, ſiue in lineam rectam eſſe extenſum, vbique igitur ipſa elaſticitas, proportionalis erit curuaturae directe ſiue radio oſculi reciproce, ita vt momentum ad angulum $d\Phi$ requiſitum, proportionale ſit formulae $\frac{d\Phi}{ds}$, quare ſi hoc momentum per $A.\frac{d\Phi}{ds}$ exprimamus, ita vt A

 denotet

denotet certam quantitatem conſtantem, ante omnia debebit eſſe $V v = A . \frac{d \Phi}{d s}$ cum qua aequatione inſuper tres illas inuentas coniungi oportet, quae ſunt I°. $d T + V d \Phi = p d s$; II°. $d V - T d \Phi = q d s$; III°. $d . V v = V d s$

ex qua vltima aequatione, ſtatim concluditur

$$A d . \frac{d \Phi}{d s} = V d s,$$

vnde ſi elementum $d s$ conſtans ſumatur, elicitur $V = \frac{A d d \Phi}{d s^2}$, hincque porro $v = \frac{d s d \Phi}{d d \Phi}$, qui valores in aequatione I. ſubſtituti praebent

$$d T = p d s - \frac{A d \Phi d d \Phi}{d s^2},$$

ideoque integrando

$$T = \int p d s - \frac{A d \Phi^2}{2 d s^2},$$

aequatio vero II. dat

$$T = \frac{A d^3 \Phi}{d \Phi d s^2} - \frac{q d s}{d \Phi},$$

qui duo valores inuicem aequati aequationem ſuppeditant pro curua quaeſita, quae erit

$$\frac{2 A d^3 \Phi + A d \Phi^3}{d s^2} = 2 d \Phi \int p d s + 2 q d s$$

vbi notaſſe iuuabit angulum elementarem $d \Phi$, implicare differentialia ſecundi gradus vnde terminus $d^3 \Phi$ ad differentialia quarti gradus aſſurget.

XIV. His duobus praecipuis caſibus expeditis, non difficile erit ſolutionem noſtram etiam ad alios caſus accommodare, vbi filum vel ob diuerſam craſſitiem, vel diuerſam materiem non vbique eſt ae-

que

que elaſticum, vel etiam vbi in ſtatu ſuo naturali non ſitum rectum tenet, ſed ſecundum curuam quamcunque datam ſit formatum, quocirca adhuc duos caſus ſequentes adiungamus.

Caſus Tertius pro filis inaequaliter elaſticis.

XV. Talis inaequalitas ſcilicet locum habere poteſt, ſi vel ipſum filum non vbique ſit aeque craſſum etiamſi ex eadem conſtet materia, vel ſi adeo ex diuerſis materiis fuerit compoſitum, hoc igitur caſu elaſticitas in ſingulis punctis, non ſimpliciter formulae $\frac{d\Phi}{ds}$ erit proportionalis, ſed praeterea a functione quadam pendebit, ad punctum quoduis M pertinente, vnde manifeſtum eſt hanc functionem per ipſam portionem fili A M $= s$, determinari debere, ſit igitur S iſta functio elaſticitatem abſolutam definiens, atque loco conſtantis illius A, caſu praecedente hic ſcribi oportebit S, ſicque tota ſolutio ſequenti modo ſe habebit: Ante omnia debet eſſe $\mathrm{V}v = \frac{\mathrm{S}\,d\Phi}{ds}$, cui inſuper vt ante adiungi conuenit has tres:

I. $d\mathrm{T}+\mathrm{V}d\Phi=pds$; II. $d\mathrm{V}-\mathrm{T}d\Phi=qds$; III. $d.\,\mathrm{V}v=\mathrm{V}ds$

ex vltima aequatione ſtatim concluditur

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{S}\,dd\Phi + d\mathrm{S}\,d\Phi}{ds^2},$$

poſito elemento ds conſtante, hincque viciſſim

$$v = \frac{\mathrm{S}\,d\Phi\,ds}{\mathrm{S}\,dd\Phi + d\mathrm{S}.\,d\Phi},$$

qui

qui valores in aequatione I^a. ſubſtituti dant

$$dT = p\,d\,s - \frac{(s\,d\Phi\,d\,d\Phi + d\,s\,d\,\Phi^2)}{d\,s^2},$$

quam formulam autem nunc integrare non licet, etiamſi integrale $\int p\,d\,s$ concederetur. Ex II. autem colligimus

$$T = \frac{s\,d^3\Phi + 2\,d\,s\,d\,d\,\Phi + d\,d\,s\,d\Phi}{d\,s^2 .\, d\,\Phi} - \frac{q\,d\,s}{d\,\Phi},$$

nunc igitur huius valoris differentiale priori aequari deberet, vt aequatio inter elementa curuae obtineatur, quem laborem autem hic in genere ſuſcipere ſuperfluum foret.

Caſus Quartus pro filis elaſticis, quae in ſtatu naturali curuaturam habent datam.

Tab. VII. Fig. 4. XVI. Hactenus aſſumſimus fila elaſtica, quorum curuaturam inueſtigauimus, ſtatu ſuo naturali in directum eſſe extenſa, nunc autem eiusmodi fila conſideremus, quae iam in ſtatu naturali certam quandam curuam exhibeant. Sit igitur figura 2, curua A M B ea figura, quam filum in ſtatu naturali tenet, quae quum ſit cognita, vocetur radius oſculi in puncto $M = r$ exiſtente arcu $A M = s$, ita vt r ſpectari poſſit tamquam functio ipſius s, cuius quippe natura, figurae naturalis indoles determinatur.

XVII. Quodſi nunc hoc filum a viribus quibuscunque ad figuram (Fig. 1.) A M B fuerit perductum,

ductum, atque in puncto m curuatura ad angulum elementarem $Tmt = d\Phi$ fuerit redacta, tum eatenus tantum virium momento opus erit ad hanc curuaturam producendam, quatenus formula $\frac{d\Phi}{ds}$ diſcrepat ab $\frac{1}{r}$, quam ob rem ſolutiones praecedentes ad hunc caſum accomodabuntur, ſi modo in formula momentum elaſticitatis exprimente loco $\frac{d\Phi}{ds}$, ſcribatur $\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}$, ſumamus autem hic elaſticitatem abſolutam per totum filum eſſe aequabilem ita vt habeamus, hanc formulam: $Vv = A(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r})$: cum qua tres reliquas aequationes coniungi oportet.

XVIII. Quoniam igitur $Vv = A(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r})$ ex tertia aequatione ſtatim colligimus, ſumto elemento ds conſtante:

$$V = A(\frac{dd\Phi}{ds^2} + \frac{dr}{r^2 ds}) \text{ et } v = \frac{rds(rd\Phi - ds)}{r^2 dd\Phi - ds.dr}.$$

Inuento autem valore V, I^{ma} aequatio praebet: $dT = pds - Vd\Phi$, ſecunda vero $T = \frac{dV - qds}{d\Phi}$, ex quorum valorum comparatione, determinatio curuae eſt petenda.

XIX. Quodſi filum in ſtatu naturali ſecundum arcum circularem fuerit incuruatum, vt ſit r quantitas conſtans, ponatur $r = a$ atque ex praecedentibus formulis nanciſcemur:

$$V = A\frac{dd\Phi}{ds^2};\ v = \frac{ad\Phi ds - ds^2}{add\Phi}$$

praeterea vero habebimus

$$dT = pds - \frac{Ad\Phi dd\Phi}{ds^2}, \text{ ſiue } T = \int pds - \frac{A.d\Phi^2}{2ds^2}$$

 at

at vero eſt ex II[a].

$$T = \frac{dv - q\,ds}{d\Phi} = \frac{A\,d^3\Phi - q\,ds^3}{ds^2 . d\Phi},$$

vnde patet aequationem finalem non inuoluere quantitatem *a* eamque demum in integrationibus in calculum introduci debere, quatenus ea ſcilicet in momento V v occurrit, quippe quod momentum in extremitatibus fili eſt ſpectandum.

Applicatio ad caſus particulares.

XX. Vires ſollicitantes, quaecunque demum fuerint, hactenus ita ſumus contemplati, vt ſingulis fili elementis $Mm = ds$, duas aſſignauerimus vires, alteram ſecundum directionem tangentis $mMT = p\,ds$, alteram vero ſecundum directionem normalem $mr = q\,ds$, quaecunque enim aliae vires elementares in hoc elementum agant, eas ſemper ad has duas directiones reuocare licet, quandoquidem hic tantum curuas in eodem plano formates conſideramus, ideoque vires extra hoc planum tendentas excludimus.

XIX. Nunc demum curuas in quarum inueſtigatione verſamur ad certas coordinatas reuocemus quae ſint $AX = x$ et $XM = y$, earumque differentialia $Xx = Mn = dx$ et $mn = dy$, ita vt ſit $ds = \surd(dx^2 + dy^2)$. Nunc vero etiam perſpicuum eſt, ſi vocemus angulum $XMT = \Phi$, tum proditurum eſſe augulum elementarem $Tmt = d\Phi$ omnino vti ſupra aſſumſimus, hinc ergo erit ſin. $\Phi = \frac{dx}{ds}$ et coſ. $\Phi = \frac{dy}{ds}$, ſiue viciſſim $dx = ds$. ſin. Φ et $dy = ds$ coſ. Φ.

XXII.

XXII. Quodſi iam omnes vires, quae in elementum $M m$ agunt reductae ſint ſecundum directiones fixas coordinatarum, quarum vna ſollicitans in directione X A ſit $= P\, d\, s$, altera vero in directione $M X = Q\, d\, s$ ex his duabus viribus, naſcetur vis tangentialis, ſecundum directionem M T

$$= (P.\,\text{ſin.}\,\Phi + Q\,\text{coſ.}\,\Phi)\, ds = p\, ds,$$

ita vt ſit $p = P\,\text{ſin.}\,\Phi + Q\,\text{coſ.}\,\Phi$, vis autem normalis inde nata ſecundum $m\, r$

$$= (Q\,\text{ſin.}\,\Phi - P\,\text{coſ.}\,\Phi)\, ds = q\, ds$$

ita vt ſit $q = Q\,\text{ſin.}\,\Phi - P\,\text{coſ.}\,\Phi$, his igitur notatis exempla quaedam illuſtriora, noſtra methodo euolvamus.

Problema I.

Si filum fuerit perfecte flexile, et per totam longitudinem aequaliter craſſum, inuenire curuam, quam hoc filum, ex duobus punctis ſuſpenſum et a ſola grauitate ſollicitatum, formabit, ſiue inuenire curuam catenariam.

Solutio.

XXIII. Statuatur hic axis AX verticalis ſurſum directus, vt applicata $X M = y$, fiat horizontalis, hic igitur ſola vis P in computum venit, exiſtente $Q = o$, quae quum ſit vis grauitatis et filum vbique ſit aequabile, ſi eius portionis cuius longitudo $= b$, pondus vocetur B, tum portionis ſeu arcus Tab. VII. Fig. 5.

 A M

A M $= s$ pondus erit $\frac{sB}{b}$, ideoque pondus elementi M m erit $\frac{B\,ds}{b}$, cui aequari debet vis illa P ds, ſit autem breuitatis gratia $\frac{B}{b} = \beta$, vt fiat P $= \beta$, atque ob $q = 0$ habebimus $p = \beta$ ſin. Φ, $q = -\beta$ coſ. Φ ideoque $p\,ds = \beta\,dx$ et $q\,ds = -\beta\,dy$. Quoniam hoc problema ad primum caſum pertinet, habebimus ſequentes formulas:

I. $dT = \beta dx$ et II. $+ T d\Phi = \beta dy$.

Ex priore fit $T = \beta x + C$, ideoque hinc pro curua colligimus $\beta x d\Phi + C d\Phi = \beta dy$ ad hanc aequationem reſoluendam ponamus ſtatim $dy = u dx$, fietque $ds = dx\sqrt{(1 + uu)}$, hinc ſin. $\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+uu)}}$ et coſ. $\Phi = \frac{u}{\sqrt{(1+uu)}}$: vnde elicitur $d\Phi = \frac{-du}{1+uu}$, quo valore ſubſtituto aequatio noſtra erit $\frac{-du(\beta x + C)}{1+uu} = \beta u\,dx$; ideoque $\frac{\beta\,dx}{\beta x + C} = \frac{-du}{u(1+uu)} = \frac{-du}{u} + \frac{u\,du}{1+uu}$, vnde integrando conſequimur Log. $(\beta x + C) = L\frac{\sqrt{(1+uu)}}{u} + L.D$, ſeu $\beta x + C = D\frac{\sqrt{(1+uu)}}{u}$, vnde $u = \frac{D}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}} = \frac{dy}{dx}$, hincque $dy = \frac{D\,dx}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}$, quae eſt aequatio differerentialis inter coordinatas x et y pro catenaria, cuius conſtructio pendet vti conſtat a logarithmis, ſiquidem hinc fit $\frac{\beta y}{D} = L.\frac{\beta x + C + \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}{\varepsilon}$ praeterea vero notaſſe iuuabit, hinc fore

$$ds = \frac{(\beta x + C)\,dx}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}$$

ita vt ſit $D\,ds = (\beta x + C)\,dy$, inde vero integrando colligimus $\beta s = \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)} + E$ vbi βs denotat ipſum pondus arcus A M $= s$.

XXIV.

XXIV. Inuenta hac aequatione generali conſideremus etiam ipſam illam vim T, quae tenſionem elementi Mm exhibet, quae vis ex praecedentibus erit $\beta x + C$, ita vt in eo loco vbi $x = 0$, haec tenſio fiat $= C$, et quo altius filum aſcendit eo fortior euadit eius tenſio Quo nunc conſtantes propius definiamus, ſumamus primo initium abſciſſarum in ipſo puncto A, vbi ipſa curua axem ſecat, ita vt fiat $x = 0$, $y = 0$ quin etiam $s = 0$. Hinc conſequimur

$$\frac{\beta y}{D} = L.\frac{\beta x + C + \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}{C + \sqrt{(CC - DD)}} \text{ et}$$

$$\beta s = \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)} - \sqrt{(CC - DD)}$$

Si praeterea verticem A ibi conſtituamus, vbi tangens curuae fit horizontalis, vt ſumto $x = 0$ ſit $\frac{dy}{dx} = \infty$ ideoque $D = C$, ſeu $dy = \frac{C\,dx}{\sqrt{(2C\beta x + \beta\beta xx)}}$, quae ſi ponamus $C = \beta a$, abit in $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, vnde fit $y = a\,L\frac{x + a + \sqrt{(2ax + xx)}}{a}$, et arcus $AM = s = \sqrt{(2ax + xx)}$ ita vt ſit $dy = \frac{a\,dx}{s}$, ſiue $dy : dx :: a : s$, tum vero erit tenſio in puncto imo $A = \beta a$, tenſio vero in puncto $M = \beta(x + a)$.

XXV. Hinc ſi funis aequabilis in duobus punctis aeque altis M et N, fuerit fixus et pondere ſuo curuam MAN induerit, pro eius figura autem dentur primo ſagitta ſeu profunditas $AX = x$, deinde vero etiam dimidia longitudo totius funis $AM = s$, cuius pondus ſit βs, hinc omnia, quae huc pertinent poterunt determinari. Primo autem Tab. VII. Fig. 6.

 reperi-

reperitur $a = \frac{ss - xx}{2x}$, vnde ſtatim innoteſcit diſtantia horizontalis

$$XM = XN = y = \frac{ss - xx}{2x} L \frac{s + x}{s - x}.$$

Tertio anguli quo funis in punctis M et N ad horizontem inclinatur tangens ſeu Tang. A M X = Tang. A N X = $\frac{2sx}{ss - xx}$ hincque Tang. $\frac{1}{2}\Phi = \frac{x}{s}$. Denique vero tenſio in imo puncto A erit $\beta\frac{(ss - xx)}{2x}$; tenſio vero in punctis ſupremis M et N prodit $\beta\frac{(ss + xx)}{2x}$ vnde patet, quo minor fuerit profunditas $AX = x$ pro eadem funis longitudine, eo maiorem requiri tenſionem in punctis M et N ita vt funis prorſus in directum extendi nequeat, niſi a vi infinita, vbi notaſſe iuuabit ſi altitudo x fuerit valde exigua reſpectu arcus s, tum ob

$$L \frac{x + s}{x - s} = \frac{2x}{s} + \frac{2x^3}{3s^3} + \frac{2x^5}{5s^5} \text{ etc. fore}$$

$$MX = y = s - \frac{2xx}{3s} - \frac{2x^4}{3.5.s^3}.$$

Problema Secundum.

Si filum perfecte flexile et aequaliter craſſum, vento exponatur, definire curuam, quae ipſi a vi venti inducetur, mentem abſtrahendo a grauitate ipſius fili, ſiue inueſtigare curuam velariam.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 7. XXVI. Statuatur axis A X horizontalis, vt directio venti V M ipſi fiat parallela, ſitque A M curua quaeſita, in cuius elementum M m ventus ferit

ferit ſub angulo $VMm = 90° - \Phi$. Ponatur k altitudo celeritati venti debita atque conſtat eius vim in datam baſin ds aequalem fore ponderi columnae aereae, cuius baſis ſit $= ds$, altitudo vero $= k \cos\Phi^2$, quicquid autem ſit quoniam hic de vi abſoluta non ſumus ſolliciti, ſufficit noſſe hanc vim eſſe proportionalem formulae $ds.\cos\Phi^2$, quoniam igitur haec vis normalis eſt in ipſam curuam, inde nulla naſcitur tangentialis eritque $pds = 0$, atque ipſa iam dabit vim illam elementarem normalem, quia autem directionem habet contrariam ponamus $qds = -\beta ds.\cos\Phi^2$.

XXVII. Quare quum hoc problema etiam ad caſum primum referatur habemus

I°. $dT = 0$; ideoque $T = C$, II°. vero $Cd\Phi = \beta ds.\cos\Phi^2$

vnde colligitur haec aequatio $\frac{Cd\Phi}{\cos\Phi^2} = \beta ds$, quae integrata praebet $C\,\text{Tang.}\,\Phi = \beta s + D$, at vero eſt $\text{Tang.}\,\Phi = \frac{dx}{dy}$, ita vt pro velaria habeatur iſta aequatio $\frac{Cdx}{dy} = \beta s + D$. Vnde iam intelligitur hanc curuam non diſcrepare a praecedente funicularia, niſi quod hic axis AX ſit horizontalis, quum in caſu praecedente eſſet verticalis. Vt autem aequationem inter coordinatas eruamus, primam aequationem $\frac{Cd\Phi}{\cos\Phi^2} = \beta ds$ multiplicemus per $\sin\Phi$, et quia $ds\sin\Phi = dx$ integratio dabit $\frac{C}{\cos\Phi} = \beta x + D$, vnde quum ſit $\cos\Phi = \frac{dy}{ds}$, habebimus hanc aequationem $Cds = dy(\beta x + D)$, hincque $dy = \frac{Cdx}{\sqrt{((\beta x + D)^2 - CC)}}$

tum

tum vero erit $\beta s = \surd((\beta x + D)^2 - CC) + E$, prorſus vt in ſolutione praecedente, quocirca ſi axis AX quaſi per medium veli A tranſeat, vbi tangens curuae eſt verticalis, ſumi debebit $C = D$, ponatur autem porro $C = D = \beta a$, fietque pro hac curua

$$dy = \frac{a\,dx}{\surd(2ax + xx)};\; y = a\,L\frac{x + a + \surd(2ax + xx)}{a};$$

ipſe arcus $AM = s = \surd(2ax + xx)$ et tenſio in puncto $M = \beta a$, quae in omnibus punctis eſt eadem. Ceterum quae ſupra de catenaria obſeruauimus hic etiam locum habebunt.

Problema III.

Si filum aequabile, vbique fuerit aequaliter elaſticum atque adeo grauitatis expers, idque duabus viribus quibuscunque eius terminis A et B vtcunque applicatis incuruetur, naturam huius curuae AMB inueſtigare, ſiue naturam curuae elaſticae definire.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 3. XXVIII. Quia praeter vires ipſis terminis A et B applicatas, nullas vires quae ſeorſim in ſingula elementa agunt admittimus, vires illae elementares $p\,ds$ et $q\,ds$ euaneſcunt, ideoque ex caſu ſecundo, quo hoc problema eſt referendum, ſequentem ſolutionem elicimus, ante omnia $Vv = \frac{A\,d\Phi}{ds}$ tum vero praeterea

I°. $dT + Vd\Phi = 0$; II°. $dV - Td\Phi = 0$; III°. $d.\,Vv = V\,ds$.

Ex

Ex tertia ſtatim colligimus ſumto elemento ds conſtante, $V = \frac{A\,dd\Phi}{ds^2}$, qui valor in I^{ma} et II^{da} ſubſtitutus praebet:

$$dT + \frac{A\,d\Phi\,dd\Phi}{ds^2} = 0;\ T = \frac{A\,d^3\Phi}{d\Phi.\,ds^2}$$

prioris integrale manifeſto eſt

$T = B - \frac{A\,d\Phi^2}{2\,ds^2}$, ſicque eliminando T aſſequimur $\frac{2A\,d^3\Phi}{d\Phi} + A\,d\Phi^2 = 2B\,ds^2$, quae per $\frac{4\,d\Phi\,dd\Phi}{A}$ multiplicata praebet: $8\,dd\Phi\,d^3\Phi + 4\,d\Phi^3.\,dd\Phi = \frac{8B}{A}.\,ds^2.\,d\Phi\,dd\Phi$ cuius integrale eſt $4\,dd\Phi^2 + d\Phi^4 = \frac{4B}{A}.\,ds^2.\,d\Phi^2 + C\,ds^4$ vnde elicitur

$$dd\Phi = \sqrt{}\left(\frac{C}{4}ds^4 + \frac{B}{A}ds^2\,d\Phi^2 - \frac{1}{4}d\Phi^4\right).$$

Statuatur nunc $d\Phi = u\,ds$, vt obtineamus hanc aequationem:

$$du = ds\sqrt{}\left(\frac{C}{4} + \frac{B}{A}.\,uu - \frac{1}{4}u^4\right) \text{ ſiue } ds = \frac{du}{\sqrt{}(C + \frac{4B}{A}uu - u^4)}.$$

Verum hoc modo calculus fit nimis moleſtus, vnde ab initio eum multo commodius inſtituamus.

XXIX. Quoniam $p = 0$ et $q = 0$, ambae aequationes I et II quae ſunt $dT + V\,d\Phi = 0$; $dV - T\,d\Phi = 0$, tres tantum continent variabiles T, V et $d\Phi$ ex quibus eliminando $d\Phi$ elicimus $T\,dT + V\,dV = 0$, vnde fit $TT + VV = CC$ et $T = \sqrt{}(CC - VV)$, qui in ſecunda ſubſtitutus praebet $dV = d\Phi\sqrt{}(CC - VV)$, ſiue $d\Phi = \frac{dV}{\sqrt{}(CC - VV)}$, vnde denuo integrando, Ang. cui. ſin. $\frac{V}{C} = \Phi + D$

hincque $V = C$ ſin. $(\Phi + D)$ et $T = C$ coſ. $(\Phi + D)$. Quod hic ad angulum Φ attinet cuius differentiale tantum $d\Phi$ in noſtras formulas principales ingreditur eius determinatio pendet a certa quadam directione fixa, quae quum penitus arbitrio noſtro relinquatur ea ita capiatur vt fiat $D = 0$, ſicque iam adepti ſumus has duas formulas ſatis ſimplices $V = C$ ſin. Φ et $T = C$ coſ. Φ, his autem litteris binae illae vires exprimuntur, quibus ſtatus cuiusque elementi Mm definitur, quae ergo vbique ita ſunt comparatae vt ſit $TT + VV = CC$ ſiue vis illis aequiualens conſtans.

XXX. His inuentis iam ſupra vidimus ex tertia aequatione fieri $V = \frac{A\, dd\Phi}{ds^2} = C$ ſin. Φ, ſumto ds conſtante, quae per $2\, d\Phi$ multiplicata et integrata praebet: $\frac{A\, d\Phi^2}{ds^2} = B - 2C.\text{coſ}.\Phi$, hincque $\frac{d\Phi}{ds} = \sqrt{\left(\frac{B - 2C\,\text{coſ}.\Phi}{A}\right)}$, ſiue $ds = \frac{d\Phi \sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C.\,\text{coſ}.\,\Phi)}}$, quae aequatio duas tantum variabiles continet Φ et s, vbi s denotat arcum curuae AM a puncto quodam fixo computatum; angulus Φ vero exprimit amplitudinem huius arcus. Deinde poſſumus etiam radium oſculi curuae definire, qui ſi ponatur $= r$, ob $d\Phi = \frac{ds}{r}$, aequatio inventa oſtendit fore $r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C\,\text{coſ}.\,\Phi)}}$, vnde patet ſumto $\Phi = 0$, fieri radium oſculi $r = \sqrt{\frac{A}{B - 2C}}$.

XXXI. Hinc etiam facile poſſumus progredi ad coordinatas orthogonales, ſi enim axem AX ita ducamus vt fiat angulus $AMX = \Phi$, tum quia $dx = ds$ ſin. Φ, et $dy = ds$ coſ. Φ ſequentem habebimus aequationem:

$$dx = \frac{d\Phi\, \text{ſin}.\,\Phi.\, \sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C.\,\text{coſ}.\,\Phi)}},$$

quae

quae aequatio integrata praebet

$$x = \frac{\surd A(B - 2C\,coſ.\,\Phi)}{C} + \text{Conſt.}$$

quare ſi punctum A ibi aſſumimus vbi axis in curvam erit normalis, tum vtique arcus A M amplitudo erit aequalis Φ, at quia nunc amplitudine Φ euaneſcente abſciſſa x ſit $= o$, conſtante poſtrema debito determinata habebitur:

$$x = \frac{\surd(A(B - 2C\,coſ.\,\Phi)}{C} - \frac{\surd A(B - 2C)}{C},$$

vnde colligimus

$$coſ.\,\Phi = 1 - x\frac{\surd A(B - 2C)}{A} - \frac{C}{2A}.\,xx,$$

quo haec aequatio concinnior reddatur ſtatuamus

$$coſ.\,\Phi = 1 - \frac{x}{a} - \frac{nxx}{aa}$$

fietque

$$B = \frac{(4n+1)A}{aa} \quad \text{et} \quad C = \frac{2nA}{aa},$$

ſicque inuento angulo Φ per abſciſſam x, ambae vires ſtatim prodeunt

$$V = \frac{2nA}{aa}.\,ſin.\,\Phi \quad \text{et} \quad T = \frac{2nA}{aa}.\,coſ.\,\Phi.$$

XXXII. Deinde quia ſupra habebamus:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\surd(B - 2C.coſ.\,\Phi)}{\surd A} \quad \text{erit} \quad \frac{d\Phi}{ds} = \frac{\surd(4n + 1 - 4n\,coſ.\,\Phi)}{a},$$

hincque

$$Vv = \frac{A\surd(4n + 1 - 4n\,coſ.\,\Phi)}{a}$$

ideoque

$$v = \frac{a\surd(4n + 1 - 4n\,coſ.\,\Phi)}{2n\,ſin.\,\Phi},$$

 vnde

vnde vires quibus ſingula elementa afficiuntur nunc perfecte innoteſcunt. Denique quoniam

$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad \text{ſin.}\,\Phi = \frac{dx}{ds} \quad \text{erit} \quad dy = dx \cot \Phi,$$

vbi ſi loco coſ. Φ valor ſubſtituatur orietur

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aa - ax - nxx}{\sqrt{(2a^3x + (2n-1)aaxx - 2nax^3 - n^2x^4)}}$$

ſicque inter coordinatas habebitur haec aequatio differentialis

$$dy = \frac{(aa - ax - nxx)\,dx}{\sqrt{(2a^3x + (2n-1)aaxx - 2nax^3 - n^2x^4)}}.$$

XXXIII. Quo autem clarius intelligatur, quam variae curuarum ſpecies hic locum inuenire poſſint, conſideretur illa aequatio inter amplitudinem Φ et radium oſculi r inuenta

$$r = \frac{a}{\sqrt{(4n+1-4n\,\text{coſ.}\,\Phi)}},$$

vel quod eodem redit valor ſupra pro abſciſſa inventus

$$x = \frac{a\sqrt{(4n+1-4n\,\text{coſ.}\Phi)}}{2n} - \frac{a}{2n}, \quad \text{ita vt ſit} \quad x = \frac{aa}{2nr} - \frac{a}{2n},$$

quam eximiam proprietatem omnibus elaſticis communem probe notari conuenit. Totum negotium ad formulam hanc irrationalem reducitur

$$\sqrt{(4n+1-4n\,\text{coſ.}\,\Phi)} = \sqrt{(1+8n\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2)},$$

vbi imprimis ſpectandum eſt, an coefficiens $8n$, ſit poſitiuus an negatiuus, vel maior vel minor vnitate. Primum enim perſpicuum eſt, ſi $8n$ fuerit numerus poſitiuus puta $=m$, tum formulam $\sqrt{(1+m\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2)}$ ſemper eſſe realem ideoque angulum Φ per omnes valores

valores creſcere poſſe; ſin autem fiat $8n = 0$, elaſticam fore circulum ob $r = a$. Si autem $8n$ fuerit numerus negatiuus, duos caſus conſiderari oportet alterum quo vnitate fit minus, alterum quo maius, priori caſu quo $8n = -m$ et $m < 1$ formula $\sqrt{(1 - m \sin \frac{1}{2}\Phi^2)}$, etiam nunc per omnes valores ipſius Φ variari poteſt, id quod vsque ad valorem $m = 1$ valet, quo caſu erit $r = a \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\Phi$. Verum ſi denique fuerit $m > 1$, haec formula realis eſſe nequit, niſi $\operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\Phi^2$ fuerit $< \frac{1}{m}$, vnde amplitudo non vltra certum gradum augeri poterit, atque hinc ſequentur omnes iſtae ſpecies elaſticarum, quas euoluimus in Tractatu de Problemate Iſoperimetrico.

XXXIV. Plura exempla circa aequilibrium huiusmodi filorum flexibilium et elaſticorum, hic ſubiungere ſuperfluum foret, quoniam hoc argumentum iam paſſim abunde tractatum reperitur. Hic enim id tantum nobis erat propoſitum, vt methodum facilem ſimulque aequabilem, quae ad omnia genera huiusmodi corporum extendatur, traderemus, hocque reſpectu nullum eſt dubium, quin haec methodus aliis quibus Geometrae ſunt vſi, longe ſit anteferenda, id quod imprimis ex altera parte huius diſſertationis patebit, vbi oſtendemus hanc methodum pari ſucceſſu adeo ad motus huiusmodi corporum determinandos adhiberi poſſe.

Problema Generale Alterum.

Si filum ſiue perfecte flexile ſiue elaſticum atque in ſingulis punctis a viribus quibuscunque ſolli-

citatum vtcunque moueatur, principia exponere ex quibus hunc motum definire liceat, vbi quidem aſſumimus totum motum ſemper in eodem plano abſolui, in quo ipſa fili figura verſatur.

Solutio.

XXXV. Hic primo motum fili in genere conſiderari conuenit, ante quam neceſſe ſit vires elementares quibus in ſingulis punctis ſollicitatur, in computum introducere, id quod cum inſigni calculi commodo fieri licet, ne ſtatim ab initio multitudo quantitatum nimis augeatur. Conſtituta certa temporis epocha qua motum inchoaſſe aſſumimus, teneat filum elapſo tempore $= t$ (quod in minutis ſecundis exprimi ſumimus) ſitum in figura repraeſentatum A M B, quem ad certum axem A D aliumue ipſi parallelum referimus, quoniam etiam fili punctum A, motu quocunque ferri poteſt, ita vt etiam punctum fili A, non amplius pro initio abſciſſarum haberi debet. Vocetur fili portio quaecunque $AM = s$ (vt ante, hoc tantum diſcrimine, quod nunc A non amplius ſit punctum fixum) et ducta tangente MT, vocetur etiamnunc vt ante angulus $XMT = \Phi$ atque nunc manifeſtum eſt hunc angulum Φ non amplius tamquam functionem arcus s ſpectari poſſe, quoniam eidem arcui $AM = s$, diuerſis temporibus, diuerſi anguli Φ conueniunt, ſed potius angulus Φ pro functione duarum variabilium s et t haberi debebit, quo ipſo haec inueſtigatio ad eam quaſi nouam Analyſeos partem in qua de functionibus duarum

Tab. VII. Fig. 3.

rum

rum variabilium tractatur erit referenda, atque hinc nunc facile intelligitur, quid per formulas $(\frac{d\,\Phi}{d\,s})$ et $(\frac{d\,\Phi}{d\,t})$ indicetur.

XXXVI. Interim tamen ex angulo Φ elementa coordinatarum dx et dy perinde vt ante exprimentur, ita vt ſit $dx = ds$ ſin. Φ et $dy = ds$ coſ. Φ, vnde abſciſſa x a certo puncto fixo computata erit $\int ds$ ſin. Φ et applicata $y = \int ds$ coſ. Φ, in quibus integralibus, ſola variabilitas arcus s ſpectatur. Hoc autem non obſtante, ipſae hae coordinatae x et y erunt functiones ambarum variabilium s et t, de quibus nouimus eſſe $(\frac{d\,x}{d\,s}) =$ ſin. Φ et $(\frac{d\,y}{d\,s}) =$ coſ. Φ. Nunc autem inueſtigemus motum elementi $Mm = ds$, cuius maſſam ponamus $= \Sigma\, d\,s$, ita vt Σ ſit certa functio ſolius variabilis s, quam ſecundum binas directiones fixas coordinatarum reſoluamus, atque conſequemur eius celeritatem in directione $AX = (\frac{d\,x}{d\,t})$ et in directione $XM = (\frac{d\,y}{d\,t})$, quae denuo differentiatae pro ſolo t variabili dabunt accelerationes in directione $AX = (\frac{d\,d\,x}{d\,t^2})$ et in directione $XM = (\frac{d\,d\,y}{d\,t^2})$, quae ductae in maſſam elementi mouendi $\Sigma\, d\,s$ et diuiſae per $2\,g$ (denotante g altitudinem lapſus grauis, tempore vnius minuti ſecundi) dabunt vires requiſitas, quibus hoc elementum ſollicitari deberet, vt motum ſuppoſitum proſequeretur. Quocirca vt motus fili ita ſit comparatus, quemadmodum poſitiones noſtrae declarant, neceſſe eſt, vt ſingula eius elemen-

elementa M $m = d s$ praeſenti tempore a binis viribus ſollicitentur, quae ſunt
ſec. directionem A X $= \frac{\Sigma d s}{2 g} \left(\frac{d d x}{d t^2}\right)$ et ſec. X M $= \frac{\Sigma d s}{2 g} \left(\frac{d d y}{d t^2}\right)$.

XXXVII. Vires iſtae vocari ſolent, vires ad motum producendum immediate requiſitae, quas probe diſtingui oportet ab iis viribus, quibus ſingula elementa actu ſollicitantur; at quia filum tantum ab his poſterioribus reuera ſollicitatur, neceſſe eſt vt hae eundem effectum producant, quem illis viribus adſcripſimus, ſiue quod eodem redit neceſſe eſt, vt omnes vires requiſitae ſimul ſumtae aequivaleant viribus actualibus ſimul ſumtis. Ex quo ſequitur ſi vires illae requiſitae contrario modo applicarentur, eas cum actualibus in aequilibrio conſiſtere debere, ſiue tum ipſum filum, eo ſaltem momento in aequilibrio fore conſtitutum, hoc igitur modo, quaeſtionem de motu fili ad inueſtigationem aequilibrii feliciter perduximus.

XXXVIII. Vt igitur in hoc aequilibrium, ex quo ipſe motus fili innoteſcit, inquiramus; filo noſtro praeter vires illas $p d s$ et $q d s$, quibus immediate ſollicitatur, inſuper adiungamus *primo* vim in directione X A $= \frac{\Sigma d s}{2 g} \left(\frac{d d x}{d t^2}\right)$; *deinde* in directione M X $= \frac{\Sigma d s}{2 g} . \left(\frac{d d y}{d t^2}\right)$, quandoquidem nunc certum eſt, filum tum futurum eſſe in aequilibrio; hunc in finem has vires poſteriores etiam ad directionem tangentis M T et normalis $m r$ reducamus, atque hinc prodit vis

ſec. M T $= \frac{\Sigma d s}{2 g} \left(\frac{d d x}{d t^2}\right)$ ſin. $\Phi + \frac{\Sigma d s}{2 g} \left(\frac{d d y}{d t^2}\right)$ coſ. Φ

at

at vero in directione $m\,r$

$$\frac{\Sigma\, d\, s}{2\, g}\left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right) \text{ſin.}\, \Phi - \frac{\Sigma\, d\, s}{2\, g}\left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right) \text{coſ.}\, \Phi$$

quo facto filum nunc ita conſiderari debebit, quaſi eius elementum $M\,m$ ſollicitaretur à duabus viribus, ſequentibus:

$$\text{I}^{\circ}.\ \text{ſec.}\ M\,T = p\,d\,s + \frac{\Sigma\, d\, s}{2\, g}\left(\left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right) \text{ſin.}\, \Phi + \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right) \text{coſ.}\, \Phi\right)$$

$$\text{II.}\ \text{ſec.}\ m\ r = q\,d\,s + \frac{\Sigma\, d\, s}{2\, g}\left(\left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right) \text{ſin.}\, \Phi - \left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right) \text{coſ.}\, \Phi\right)$$

quibus inuentis nunc tantum opus eſt, vt iſtae vires loco $p\,d\,s$ et $q\,d\,s$ in formulis noſtris ſupra inuentis ſubſtituantur, atque tum illae aequationes noſtri problematis ſolutionem ſuppeditabunt.

XXXIX. Quodſi vires illae $p\,d\,s$ et $q\,d\,s$ non immediate dentur, ſed vt ſupra oſtendimus ex viribus elementaribus ſecundum certas directiones agentibus deduci debeant, calculus ſequenti modo ſe habebit: ponamus igitur fili elementum $M\,m$ actu ſollicitari in directione $X\,A$ vi $P\,d\,s$ et in directione $M\,X$ vi $= Q\,d\,s$, atque nunc vires, quae mente ſaltem filo applicari debebunt, erunt

$$\text{I}^{\circ}.\ \text{vis. ſec.}\ M\,T = d\,s\left(P + \frac{\Sigma}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)\right) \text{ſin.}\, \Phi + d\,s\left(Q + \frac{\Sigma}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)\right) \text{coſ.}\, \Phi$$

$$\text{II.}\ \text{vis. ſec.}\ m\,r = d\,s\left(Q + \frac{\Sigma}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)\right) \text{ſin.}\, \Phi - d\,s\left(P + \frac{\Sigma}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)\right) \text{coſ.}\, \Phi$$

quas vt ante loco formularum $p\,d\,s$ et $q\,d\,s$ ſubſtitui oportet.

XL. Faciamus igitur hanc ſubſtitutionem, atque pro motu fili definiendo, habebimus ſequentes quatuor aequationes:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dT}{ds}\right) + V\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \left(P + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\right)\text{ſin.}\,\Phi + \left(Q + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)\text{coſ.}\,\Phi$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{dV}{ds}\right) - T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \left(Q + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)\text{ſin.}\,\Phi - \left(P + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\right)\text{coſ.}\,\Phi$$

$$\text{III.}\ Vv = S\left(\frac{d\Phi}{dt}\right);\quad \text{IV.}\ \left(\frac{d.\,Vv}{ds}\right) = V.$$

Quoniam enim ſupra omnes iſtae quantitates V, T et Φ functiones erant ſolius variabilis s, hic autem vt functiones duarum variabilium s et t ſpectari debent, ſignandi modum per clauſulas, more conſueto introduci oportuit, tum vero notandum eſt, hic litteram S exprimere elaſticitatem abſolutam fili in puncto M, ideoque functionem eſſe ipſius S tantum. Quo autem clarius appareat, quomodo hae quatuor aequationes, ſolutionem problematis noſtri ſuppeditare queant, primo quidem perſpicuum eſt determinationem incipi debere, a viribus T et V cum diſtantia v, ex quibus etiam durante motu ad quoduis tempus, tenſio et ſtatus cuiusque elementi cognoſcitur, his autem tribus quantitatibus inuentis et ſubſtitutis exorietur vna aequatio has quidem quinque quantitates inuoluens, t, s, x, y et Φ quae autem ob has duas relationes cognitas:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right) = \text{ſin.}\,\Phi \quad \text{et} \quad \left(\frac{dy}{ds}\right) = \text{coſ.}\,\Phi,$$

ad tres tantum reducuntur, quae ſi fuerint s et t cum angulo Φ, haec aequatio natura ſua declarat valorem anguli Φ, per binas variabiles s et t exprimendum, vnde pro quouis fili puncto M ad quodvis tempus t, angulus conueniens Φ determinatur, vnde deinceps ipſae coordinatae conſtabunt, atque

adeo figura totius fili ad quoduis tempus, hincque etiam ipſe motus eius patefiet.

XLI. Ex tertia et quarta aequatione eliminando diſtantiam v ſtatim colligimus

$$V = S\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) + \frac{dS}{ds}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

ita vt hoc valore ſubſtituto, iam tantum duas aequationes ſimus habituri ex quibus ſi vis T elidatur ſtatim obtinetur illa aequatio finalis principalis, cuius rationem modo explicauimus.

XLII. Quoniam praeter oſcillationes infinite paruas vix quicquam adhuc circa huiusmodi motus eſt inueſtigatum, neque etiam nunc Methodus patet tales formulas non parum intricatas tractandi, hinc ſaltem eas deducamus formulas ex quibus Geometrae motum cordarum vibrantium determinauerunt. Primo igitur filum perfecte flexile ſtatuatur, vnde ſtatim fit $V = 0$, deinde etiam vires elementares P et Q euaneſcant, poſtmodum quia tantum vibrationes infinite paruae ſunt conſiderandae, ſtatuamus applicatam y veluti infinite paruam prae s et x, vnde etiam erit $\frac{dy}{ds} = 0$, et $\frac{dx}{ds} = 1$, tum vero erit Φ quaſi rectus. Quibus notatis noſtrae duae aequationes erunt:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dT}{ds}\right) = \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\text{coſ.}\,\Phi$$

$$\text{II.}\quad +T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\text{coſ.}\,\Phi - \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi.$$

Ratione prioris obſeruandum eſt, quia abſciſſa x ab ipſo arcu s non diſcrepare cenſetur, fore $(\frac{dx}{dt}) = 0$, atque $(\frac{ddx}{dt^2}) = 0$, deinde quia coſ. $\Phi = 0$, manifeſtum eſt fore $\frac{dT}{ds} = 0$, hincque vim T conſtantem ſiquidem etiam durante motu, tenſio fili eadem conſeruari ſupponitur. Pro altera aequatione, quia coſ. $\Phi = (\frac{dy}{ds})$, hincque differentiando $-(\frac{d\Phi}{ds})$ ſin. $\Phi = (\frac{ddy}{ds^2})$ ſiue ob ſin. $\Phi = 1$, $(\frac{d\Phi}{ds}) = -(\frac{ddy}{ds^2})$; haec aequatio ob coſ. $\Phi = 0$, praebet ſtatim $T(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$, quae quia T eſt quantitas conſtans et Σ craſſitiem fili in puncto M exprimit, aequatio noſtra talem induet formam $A(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$, vbi A denotat tenſionem fili, atque haec eſt eadem aequatio, qua Auctores ſunt vſi in motu cordarum determinando.

XLIII. Deinde quae de inflexione laminarum elaſticarum ſunt tradita, etiam hinc peti poſſunt, quia enim vt ante vibrationes infinite paruae conſiderantur, erit iterum ſin. $\Phi = 1$, coſ. $\Phi = 0$, $(\frac{dx}{dt}) = 0$ et $(\frac{d\Phi}{ds}) = -(\frac{ddy}{ds^2})$; praeterea etiam vires elementares P et Q hinc excluduntur, vnde primo vim V ita habebimus expreſſam vt ſit:

$$V = -\frac{dS}{ds}(\frac{ddy}{ds^2}) - S(\frac{d^3y}{ds^3});$$

duae reliquae vero aequationes induent has formas

$$(\frac{dT}{ds}) - V(\frac{ddy}{ds^2}) = 0; \quad (\frac{dV}{ds}) + T(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$$

quae

quae ſi lamina elaſtica fuerit aequabilis, ideoque $S = A$, dabunt ſtatim $V = - A\left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right)$, hincque $\left(\frac{d T}{d s}\right) = - A\left(\frac{d d y}{d s^2}\right)\left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right)$, quae per ds multiplicata et integrata dat $T = B - \frac{A}{2}\left(\frac{d d y}{d s^2}\right)^2$; vnde eliminando T ad aequationem peruenitur differentialem quarti gradus, quemadmodum etiam inuenerunt ii, qui hoc argumentum fuſius tractauerunt.

DE
ICTV GLANDIVM
CONTRA TABVLAM EXPLOSARVM.

Auctore

L. EVLERO.

Caſus primus, quo tabula eſt immobilis.

I.

Aſſumimus hic primo tabulam eſſe immobilem, quo Analyſis ex principiis motus petenda euadat facilior. Quod nunc ad glandem attinet, duae res potiſſimum conſiderandae veniunt, prima eſt eius celeritas, qua in tabulam impingit, quam metimur ſpatio, quod hac celeritate vno minuto ſecundo percurreretur, ſit igitur haec celeritas $= c$, ac denotet g altitudinem ex qua graue libere cadit tempore vnius minuti ſecundi, ita vt ſi celeritas glandis tanta fuerit, quanta ex altitudine g acquiritur, tum ſit $c = 2g$, ſin autem illa celeritas tanta ſit, quanta ex altitudine nng acquiritur, tum ſit $c = 2ng$, vnde ſequitur poſito $c = 2ng$ fore $n = \frac{c}{2g}$ ideoque altitudinem ex qua haec celeritas c generatur fore $nng = \frac{cc}{4g}$. Deinde vero in computum venit maſſa huius glandis, quam littera M deſignemus, vbi ſecundum principia Mechanica M men-

menſuratur pondere eiusdem glandis. Quod autem ad figuram glandis attinet, eius ratio hic vix habetur, dummodo eandem figuram retineat.

II. Statim atque glans tabulam ferire incipit, hoc erit initium ictus, a quo tempora computabimus. Ponamus ergo ab hoc initio, iam elapſum eſſe t minut: ſecund:, quaeriturque quousque nunc glans in tabulam penetrauerit, ponamus ergo glandem ad profunditatem $= x$ penetraſſe et quum hoc ſit ſpatium a glande tempore t percurſum, erit celeritas glandis hoc momento $\frac{dx}{dt}$ eiusque acceleratio $= \frac{M\,ddx}{2\,g\,dt^2}$, ſumto elemento dt conſtante, cui vis reſiſtens negatiue ſumta debet eſſe aequalis. Animum autem hic abſtrahimus a grauitate glandis, qua eius motus incuruatur, quippe qui effectus in hoc phaenomeno nullius eſt momenti.

III. Quum nunc glans ad profunditatem $= x$, in tabulam penetrauerit, quam quidem hic minorem ipſa craſſitie tabulae aſſumimus, poſita enim craſſitie tabulae $= a$, ſimul ac fit $x = a$, glans per tabulam penitus tranſiiſſe conſendus eſt, nunc igitur dum in profunditate $= x$ verſatur, certam atque inſignem offendet reſiſtentiam, quae eius motui ſe opponit, et quam litera R denotemus, cuius valorem cum vix vllo caſu accurate definire liceat, hic tantum obſeruemus eam, cum a magnitudine glandis, tum vero etiam a duritie ipſius tabulae, atque ab ipſa profunditate penetrationis x pendere, quare quum

duo

duo priora momenta eadem maneant pro eadem glande et tabula, vis reſiſtentiae ſpectari poterit tamquam functio ipſius x, quae euaneſcat tam poſito $x = 0$, quam $x = a$, quandoquidem tam ante impulſum, quam poſt eruptionem, nullam patitur reſiſteatiam.

IV. Conſtituta igitur hac reſiſtentia R, habebimus ſtatim iſtam aequationem, $\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{R}{M}$, quae per dx multiplicata et integrata praebet $\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = C - \int\frac{R\,dx}{M}$ vbi integrale $\int\frac{R\,dx}{M}$ ita capi ſumamus, vt ipſo initio vbi $x = 0$ euaneſcat. Hinc conſtantem C ita definiri oportet, vt poſito $x = 0$, celeritas glandis quae eſt $\frac{dx}{dt}$ fiat $= c$, vnde colligitur $C = \frac{cc}{4g}$ ita vt habeamus $\frac{dx^2}{dt^2} = cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M}$; hincque ipſa celeritas glandis $\frac{dx}{dt} = \sqrt{(cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M})}$, vnde porro pro tempore cognoſcendo deducitur iſta aequatio

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{(cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M})}}.$$

V. Parum autem ſolliciti de tempore, ex aequatione pro celeritate inuenta, facile iudicare poterimus, vtrum glans penitus per tabulam perrumpat, an vero in ipſa tabula ſit haeſurum omni ſcilicet motu amiſſo. Hic praecipue ad ipſam reſiſtentiam R indeque formatum integrale $\int R\,dx$ eſt reſpiciendum, cuius valor creſcente x continuo augetur, ponamus igitur poſita $x = a$, fieri $\int\frac{R\,dx}{M} = f$, atque nunc perſpicuum eſt, glandem per tabulam

per-

perrumpere non poſſe quamdiu cc minus eſt quam $4gf$, atque hinc ſequentes caſus diſtingui oportet.

1°. Si fuerit celeritas glandis $c < 2\sqrt{gf}$, glans non penitus per tabulam perrumpet, ſed alicubi haerebit, vbi ſcilicet fit $\int \frac{R\,dx}{M} = \frac{cc}{4g}$, vnde profunditas penetrationis intelligi poterit.

2do. Sin autem fuerit celeritas glandis $c > 2\sqrt{gf}$ tum glans non ſolum penitus per tabulam transuibrabit, ſed etiam adhuc celeritatem quandam conſeruabit, quae erit $= \sqrt{(cc - 4gf)}$.

Caſus Secundus quo tabula ſuper plano horizontali libere eſt mobilis.

VI. Manentibus iis quae circa glandem eiusque celeritatem ante ſunt conſtituta, nunc etiam maſſa tabulae in computum eſt ducenda, quae ſit $= N$, atque ne tabula motum obliquum recipiat, glandis ictum ponamus fieri in ipſo tabulae centro inertiae, motumque glandis eſſe horizontalem. Sit porro adhuc craſſities tabulae in loco ictus $= a$.

VII. Elapſo tempore $= t$ ſecund. a primo ictus initio, vbi ipſa tabula erat in quiete, glans vero celeritate $= c$ ferebatur, ponamus tabulam iam eſſe promotam per ſpatium $= y$, glandem autem iam in tabulam penetraſſe ad profunditatem $= x$, vbi reſiſtentiam offendat $= R$, vti ante poſuimus; quum igitur tabula tempore t promota ſit per ſpatium y, erit eius celeritas $= \frac{dy}{dt}$ et acceleratio more ſuperio-

ri ſumta $= \frac{N\,ddy}{2g\,dt^2}$, glans autem interea confecit ſpatium $x + y$, vnde eius celeritas erit $\frac{dx + dy}{dt}$ et acceleratio $= \frac{M(ddx + ddy)}{2g\,dt^2}$, notandum autem eſt, ipſo initio fuiſſe $x = 0$ et $y = 0$, at vero celeritas primo tabulae $\frac{dy}{dt} = 0$ et glandis $\frac{dx + dy}{dt} = c$, ita vt tum fuerit $\frac{dx}{dt} = c$.

VIII. Quod nunc primum ad motum tabulae attinet, euidens eſt eum accelerari a vi R, haec enim dum motui glandis ſe opponit, aequa vi in tabulam reagit, eiusque motum accelerat, vnde haec prima aequatio reſultat:

I. $\frac{N\,ddy}{2g\,dt^2} = R$, ſiue $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{2gR}{N}$

deinde vero motus glandis ab eadem vi R retardatur, vnde oritur haec ſecunda aequatio:

II. $\frac{M(ddx + ddy)}{2g\,dt^2} = -R$ ſiue $\frac{ddx + ddy}{dt^2} = -\frac{2gR}{M.}$

ex quibus duabus aequationibus vtrumque motum deriuari oportet, ſcilicet ſpatia x et y, vbi imprimis notaſſe iuuabit, quantitatem R, tantum eſſe functionem ipſius x, ita vt ex priori aequatione ſola nihil concludi queat.

XI. Hinc igitur primo ddy eliminemus vnde orietur iſta aequatio:

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{2g(M+N)}{MN}.\,R$$

quae per dx diuiſa et integrata dat

$$\frac{dx^2}{dt^2} = C - \frac{4g(M+N)}{MN}\int R\,dx$$

vbi

vbi ſi $\int R\,dx$ euaneſcat facto $x = 0$, aequatio noſtra ita determinatur, vt ſit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc - \frac{4g(M+N)}{MN}\int R\,dx.$$

Quodſi ergo vt ante pro tota craſſitie tabulae $= a$ ſtatuatur $\int\frac{R\,dx}{M} = f$, perſpicuum eſt vt glans per tabulam penitus perrumpat, neceſſe eſſe, vt ſit $cc > 4fg\frac{(M+N)}{N}$, vnde intelligitur maiori glandis celeritate opus eſſe ſi tabula fuerit mobilis, quam ſi eſſet immobilis, niſi moles tabulae fuerit maxima reſpectu glandis, at quo leuior tabula eſt, manente quidem eadem craſſitie et duritie, eo maior glangis celeritas requiritur, vt perrumpat. Cognita autem maſſa tabulae N, iudicium vtrum glans perrumpat nec ne, perinde inſtituitur, atque in hypotheſi tabulae immotae.

X. Hic autem maxime curioſa eſt inueſtigatio motus quem tabula hinc recipit, ad quem inuenienidum, addamus ambas aequationes prius inuentas vt ipſa quantitas R eliminetur ſic enim prodit haec aequatio:

$$\frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} + \frac{(M+N)\,ddy}{2g\,dt^2} = 0$$

quae ſemel integrata ſponte dat

$$\frac{M\,dx}{dt} + \frac{(M+N)\,dy}{dt} = Mc$$

quare quum $\frac{dy}{dt}$ celeritatem tabulae exprimat, habebimus

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Mc}{M+N} - \frac{M\,dx}{(M+N)\,dt}$$

ex qua aequatione intelligitur iis caſibus, quibus glans non penitus tranſit per tabulam, ſed in certa penetratione arcetur, ibique fit $\frac{dx}{dt}=0$, tabulam motum eſſe accepturam cuius celeritas ſit $=\frac{Mc}{M+N}$. At ſi aucta celeritate c glans penitus perrumpat, tum tabula minorem accipiet motum, vti mox patebit, in quo non exiguum paradoxon cernitur.

XI. Quamdiu ergo glans non penitus perrumpit, tabulaeque infixa manet, quod fit vbi $\frac{dx}{dt}=0$; motus determinatio nulla laborat difficultate, tum enim celeritas tabulae vt modo vidimus erit $\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}.c$, euoluamus igitur eos caſus quibus glans penitus perrumpit, quod euenit quando

$$cc > 4fg\frac{(M+N)}{N}=4fg\left(1+\frac{M}{N}\right);$$

ponamus igitur breuitatis gratia

$$4gf\left(1+\frac{M}{N}\right)=kk$$

ita vt k eum celeritatis gradum exhibeat, quo tantum non per tabulam penetrare valet, ac ſi fuerit $c=k$ ob $\frac{dx}{dt}=0$ erit tabulae celeritas poſt ictum $\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}.k$ glans vero ipſi extremitati tabulae inhaerebit. Nunc autem ponamus $c>k$ et quidem $c=nk$ vt ſit $n>1$, atque poſt ictum habebimus:

$$\frac{dx}{dt}=k\surd(nn-1)$$

vnde fit celeritas tabulae poſt ictum

$$\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}(nk-k\surd(nn-1))=\frac{M}{M+N}k(n-\surd(nn-1)).$$

Quare

Quare ſi n pauliſper tantum vnitatem excedat, vt ſit $n = 1 + \alpha$ erit celeritas tabulae poſt ictum

$$= \frac{Mk}{M+N}(1 - \sqrt{2\alpha}),$$

ſpectata ſcilicet α vt infinite parua, vnde patet celeritatem tabulae minorem eſſe, quam ſi eſſet $n = 1$.

XII. Sit iam n numerus quicunque maior vnitate et quum ſit poſt ictum

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{(nn-1)} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}k(n - \sqrt{(nn-1)}),$$

quae eſt celeritas tabulae poſt ictum, erit glandis celeritas poſt ictum

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{Mnk}{M+N} + \frac{N}{M+N}k\sqrt{(nn-1)},$$

hinc ergo euoluamus aliquot caſus praecipuos:

celeritas glandis ante ictum	celeritas tabulae poſt ictum	celeritas glandis poſt ictum
I. $c = k$	$\frac{M}{M+N}.k$	$\frac{M}{M+N}k$
II. $c = 2k$	$\frac{M}{M+N}k(2 - \sqrt{3})$	$\frac{k(2M + N\sqrt{3})}{M+N}$
III. $c = 3k$	$\frac{M}{M+N}k(3 - \sqrt{8})$	$\frac{k(3M + N\sqrt{8})}{M+N}$
IV. $c = 4k$	$\frac{M}{M+N}k(4 - \sqrt{15})$	$\frac{k(4M + N\sqrt{15})}{M+N}$
V. $c = 5k$	$\frac{Mk}{M+N}(5 - \sqrt{24})$	$\frac{k(5M + N\sqrt{24})}{M+N}$
VI. $c = 6k$	$\frac{Mk}{M+N}(6 - \sqrt{35})$	$\frac{k(6M + N\sqrt{35})}{M+N}$

XIII. Quodſi ergo n fuerit numerus mediocriter magnus, vt ſit proxime $\sqrt{(nn-1)} = n - \frac{1}{2n}$, tum ergo ſi celeritas glandis ante ictum fuerit $c = nk$ prodibit poſt ictum celeritas tabulae $\frac{Mk}{2n(M+N)}$ cele-

ritas vero glandis $= n k - \frac{N k}{2 n (M + N)}$, vnde manifeſtum eſt, quo maior fuerit numerus n ſeu quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, celeritatem tabulae poſt ictum eo fore minorem, glandis autem celeritatem eo minus defecturam eſſe a celeritate ante ictum, ſiue iacturam celeritatis quam glans patitur eo fore minorem.

Obſeruationes in ſolutiones praecedentes.

XIV. Problemata haec referenda ſunt ad doctrinam de colliſione corporum, quae non ſolum in Matheſi, ſed etiam in Philoſophia tractari eſt ſolita. Totum diſcrimen in hoc tantum conſiſtit, quod hic corpus impingens, in alterum penetret, atque adeo ſibi tranſitum aperiat, dum in vulgari doctrina eiusmodi tantum corpora conſiderantur, quae in conflictu ſibi vel nullam impreſſionem, vel ſaltem quam minimam inducunt.

XV. Noſtram igitur ſolutionem ad notiones vulgares reuocaturi, nominemus ſiue durante conflictu, ſiue eo iam finito celeritatem glandis $= v$, et celeritatem tabulae $= u$, et quum ſit $v = \frac{dx + dy}{dt}$ et $u = \frac{dy}{dt}$ ambae aequationes pro ſecundo problemate inuentae, quae ſcilicet facta integratione prodierunt, ita ſe habebunt,

$$(v-u)^2 = cc - 4g \frac{(M+N)}{MN} \int R\, dx \quad \text{et} \quad Mv + Nu = Mc,$$

quarum

quarum poſterior inuoluit eam notionem, quae vulgo quantitas motus vocari ſolet, et indicat quantitatem motus, ſiue productum ex maſſa vtriusque corporis in ſuam celeritatem perpetuo eandem conſeruari, quia enim ante conflictum tabula quieuit, tota quantitas motus erat Mc, durante autem conflictu vel finito, quantitas motus eſt $Mv + Nu$. Iſta quantitatis motus conſeruatio inuoluit aequabilem progreſſum communis centri grauitatis.

XVI. Vt vero etiam priorem aequationem ad notiones receptas perducamus, eam per MN multiplicemus vt habeamus:

$$MN(v-u)^2 = MNv^2 - 2MNvu + MNuu = MNcc - 4g(M+N)\int R\,dx$$

ad hanc addamus quadratum poſterioris aequationis, quod eſt:

$$MMv^2 + 2MNvu + NNuu = MMcc$$

prodibitque aggregatum

$$M(M+N)v^2 + N(M+N)uu = (M+N)cc - 4g(M+N)\int R\,dx$$

quae per $M+N$ diuiſa praebet hanc aequationem:

$$Mv^2 + Nuu = Mcc - 4g\int R\,dx,$$

quae manifeſto continet eas notiones, quae vulgo virium viuarum nomine efferri ſolent. Eſt enim Mcc tota vis viua ante conflictum, at Mvv vis viua glandis durante vel finito conflictu, atque Nuu vis viua tabulae.

XVII.

XVII. Hinc ergo perſpicuum eſt neque durante conflictu neque finito, vim viuam totam eandem manere ſed potius diminui et quidem quantitate $4g\int R\,dx$, id quod vulgari principio conſeruationis virium viuarum aduerſari videtur, verum probe notandum eſt conſeruationem virium viuarum, tum tantum locum habere, quando de viribus nihil perit. Quum autem noſtro caſu, tabula perforetur, atque ad foramen efficiendum non exigua virium quantitas impendi debeat, mirum non eſt, quod ſumma virium viuarum hic decrementum patiatur, quin etiam ex ipſa noſtra analyſi manifeſtum eſt, formulam integralem $\int R\,dx$, ſummam virium in foramen impenſarum exprimere.

XVIII. Hic non inutile erit oſtendere quomodo immediate ex noſtris aequationibus differentialibus ſecundi gradus, ad vires viuas calculum perducere potuiſſemus. Aequationum enim §. 8 inventarum, prior ducatur in dy, altera vera in $dx+dy$ eaeque inuicem additae dabunt iſtam aequationem.

$$\frac{N\,dy.\,ddy}{2g\,dt^2}+\frac{M(dx+dy)(ddx+ddy)}{2g\,dt^2}=-R\,dx$$

quae integrata producit:

$$\frac{N\,dy^2}{4g\,dt^2}+\frac{M(dx+dy)^2}{4g\,dt^2}=\frac{Mcc}{4g}-\int R\,dx$$

ſicque introductis litteris v et u, ſtatim aſſecuti ſumus hanc aequationem:

$$Nuu+Mvv=Mcc-4g\int R\,dx.$$

XIX. Ex principiis igitur vulgaribus, quae paſſim in doctrina de colliſione corporum expoſita repe-

reperiuntur ſolutionem problematis noſtri deducere potuiſſemus, dum modo perpendiſſemus in penetrationem glandis intra tabulam certas vires impendi, easque iunctim ſumtas formula $4g\int R\,dx$ comprehendi poſſe Tum enim quia tota vis viua ante conflictum erat $= Mcc$, durante autem conflictu, cum penetratio iam facta eſt ad profunditatem $= x$, ſumma virium viuarum ſit $Mvv + Nuu$, neceſſe eſt, vt fiat:

$$Mvv + Nuu = Mcc - 4g\int R\,dx,$$

alterum vero principium quantitatis motus ſiue aequabilis progreſſus communis centri grauitatis ſtatim ſuppeditat hanc aequationem $Mv + Nu = Mc$ quae cum illa coniuncta completam problematis noſtri ſolutionem continet.

XX. Hac occaſione non abs re erit paucis exponere, quid de notiſſimis illis notionibus, circa quantitatem motus et vires viuas, quibus Philoſophi totam motus theoriam ſuperſtruere ſunt conati, ſit iudicandum et quatenus eae cum veris et vniverſalibus Mechanicae principiis conciliari poſſint. Ac primo quidem de veris Mechanicae principiis tenendum eſt, ea ex vnico principio proficiſci, quo ratio inter accelerationes et vires ſollicitantes continetur et ita latiſſime patet, vt etiam ad fluida corpora extendatur. At vero hoc principium ita eſt comparatum, vt ſemper ad formulas differentiales

ſecundi gradus deducat, de quibus deinceps videndum eſt, num integrationem admittant?

XXI. Dantur autem infiniti caſus, quibus huiusmodi integratio locum habet, hocque modo ad formulas differentiales primi gradus peruenitur, quas per celeritates explicare licet, quemadmodum noſtro caſu $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ celeritates praebuerunt, atque hae ipſae formulae iam integratae, eas notiones inuoluunt, quae vulgo ſub quantitatis motus, vel vis viuae nomine innotuerunt, de quo quidem iam dudum obſeruatum eſt, nomen vis viuae incongrue adhiberi, quum productum ex maſſa cuiuspiam corporis per quadratum celeritatis, neutiquam ad notionem cuiuspiam vis reduci queat.

XXII. Talia igitur principia, quae vulgo leges motus continere cenſentur, non aliter ſpectari poſſunt niſi tamquam concluſiones ex vnico illo Mechanicae principio deductae, quae quum ſemper ſub certis tantum conditionibus, quatenus ſcilicet formulas integrales ſecundi gradus integrare licuit, locum habeant, tantum pro principiis particularibus ſunt habendae, quae etiam principia ſecundaria vel deriuata appellare liceat, dum verum Mechanicae principium eſt vnicum et maxime vniuerſale.

Examen

Examen accuratius ſuperiorum ſolutionum.

XXIII. Quoniam vis illa R, quam in ſolutionem noſtram introduximus, nullo modo reſtringitur aut limitatur, ſolutio noſtra maxime generalis et ad omnes plane caſus extendi poſſet videri, quomodocunque enim perforationis effectus promotioni glandis aduerſetur, ſemper certam vim concipere licet, quae iſti reſiſtentiae foret aequalis, et quam adeo ſub littera illa R contentam intelligere liceret. Quatenus autem illa quantitas R, vt functio variabilis x, qua profunditas penetrationis deſignatur, a nobis conſideratur, quocunque demum modo, tam ab ipſa glandinis magnitudine et figura, quam ab ipſius tabulae duritie et craſſitudine pendeat, ſiquidem hae res vt quantitates conſtantes ſunt ſpectandae: eatenus noſtra ſolutio ſaepius a veritate recedere poteſt, quum vtique eiusmodi dentur caſus vbi vis reſiſtentiae non tantum vnicam illam variabilem x, ſed aliam praeterea veluti celeritatem implicare poſſit, id quod clarius explicari neceſſe eſt.

XXIV. Ad hoc oſtendendum concipiamus tabulam tamquam proprietate fluidi praeditam eſſe, atque tum nullum foret dubium, quin omnis reſiſtentia a ſola celeritate penderet eiusque quadrato proportionalis eſſet, huiusmodi igitur caſu quantitas illa R non foret functio ipſius x, ſed potius celeri-

tatis, qua glans in tabulam penetrat et quam formula $\frac{dx}{dt}$ expreſſimus. Facile autem intelligitur, ſi reſiſtentia illa R etiam formulam $\frac{dx}{dt}$ inuoluat rationem integrationis, qua ſumus vſi, neutiquam locum habere poſſe, propterea quod formula R dx tamquam integrabilis eſt ſpectata.

XXV. Quodſi ergo tabula naturae fluidi particeps eſſet, ita vt reſiſtentia partim ex functione ipſius x, vti aſſumſimus, partim vero etiam ex quadrato celeritatis conſtaret; ſolutio noſtra nullo modo ſubſiſtere poſſet, vnde maxime neceſſarium eſt, in eos caſus inquirere quibus talis indoles ſeſe reſiſtentiae tabulae admiſcere poſſet. Verum ſatis iam eſt cognitum omnem fluidi reſiſtentiam inde potiſſimum oriri, quod partes fluidi de loco ſuo depelli iisque motus imprimi debeat, id quod ſine virium diſpendio fieri nequit, ſupra autem littera R tantum eiusmodi vim reluctantem denotauit, quae motum glandis quidem retardaret ipſa autem in ſe nullam motus generationem requireret. Duos igitur hos reſiſtentiae caſus ſollicite a ſe inuicem diſtingui oportet.

XXVI. Id reſiſtentiae genus, quod motui corporis directe ſe opponit et quaſi elaſtrum corpus repellit, vocemus reſiſtentiam abſolutam, quorſum pertinet illa ipſa reſiſtentia, quam ſupra ſumus contemplati. Alterum vero reſiſtentiae genus, quod

veluti

veluti in fluidis euenit, a generatione noui motus oritur, toto coelo a priori genere diſcrepat, etiamſi corporis motum quoque retardet, quo diſcrimine notato, quoniam tabulae nullum foramen induci poteſt, niſi eius particulae internae non ſolum a ſe inuicem diuellantur, ſed etiam de loco ſuo removeantur, ſatis perſpicuum eſt reſiſtentiam vtriusque generis hic reuera locum habere debere.

XXVII. Pro noſtro ergo caſu, veram reſiſtentiam duabus partibus exprimi oportebit, prior ſcilicet pars continebit reſiſtentiam abſolutam et functioni cuipiam ipſius x proportionalem, quam littera R vt ſupra deſignabimus, altera vero pars a motus generatione oriunda et quadrato celeritatis proportionalis, hac formula $A.\frac{dx^2}{dt^2}$ exprimatur, vbi $\frac{dx}{dt}$ ſignificat celeritatem, qua glans in tabula vlterius penetrat, A vero eſt quantitas quaepiam a denſitate materiae et magnitudine foraminis pendens. Hoc modo tota reſiſtentia tali formula repraeſentari debet

$$R + A.\frac{dx^2}{dt^2}$$

XXVIII. Quod autem poſterior pars, quadrato celeritatis ſit proportionalis, ita plano ratiocinio colligi poterit. Concipiamus maſſam quampiam $= M$ quieſcentem, quae a vi quadam P in motum ſollicitetur, elapſo tempore $= t$, maſſa iam ſit promota per ſpatium $= s$, et quum ex

principio motus ſit $\frac{M\,d\,d\,s}{2\,g\,d\,t^2} = P$ habebimus integrando $\frac{M\,d\,s^2}{4\,g\,d\,t^2} = P\,s$, vbi $\frac{ds}{dt}$ celeritatem maſſae M impreſſam denotat. Hinc ergo diſcimus, vt datae maſſae quieſcenti M dum per ſpatium s propellitur, data celeritas $\frac{ds}{dt}$ imprimatur, ad hoc requiri vim ſollicitatem, $P = M.\frac{d\,s^2}{4\,g\,s\,d\,t^2}$, quam formulam applicemus ad noſtrum caſum, quo glans intra tabulam vlterius penetrat per ſpatiolum $= d\,x$, ita vt nobis ſit $s = d\,x$, interea autem neceſſe eſt, vt certa portio materiae, quae hoc ſpatiolum dx occupabat, de loco ſuo remoueatur cuius ergo maſſa proportionalis erit partim ipſi ſpatiolo $d\,x$, partim amplitudini glandis nec non denſitati materiae qua tabula conſtat, ex quo maſſa remouenda ita exprimi poterit, vt ſit $= C.\,d\,x$, quam loco M ſcribi conuenit; denique huic maſſae celeritas imprimi debet, celeritati glandis aequalis, vt ſcilicet ſucceſſioni glandis cedat, ſicque haec celeritas erit noſtro caſu $= \frac{d\,x}{d\,t}$, loco $\frac{d\,s}{d\,t}$ ſubſtituenda. Quocirca vt maſſae $C\,d\,x$ dum per ſpatium $s = dx$ promouetur, celeritas $= \frac{d\,x}{d\,t}$ imprimatur, ad hoc requiritur vis ſollicitans $= \frac{C}{4\,g}\,\frac{d\,x^2}{d\,t^2}$, quam ergo recte per formulam $A.\frac{d\,x^2}{d\,t^2}$ exprimimus, quam formam adeo ipſum principium motus vniuerſale ſuppeditare eſt cenſendum.

Tab. VII. Fig. 8. XXIX. Hic quidem aſſumimus glandem non ſolum directe per tabulam penetrare, ſed etiam perpen-

pendiculariter in eius particulas illidere, verum ſi oblique illidat? Sit enim recta A B directio motus et D C E anterior corporis moti ſuperficies, quae percurſo ſpatiolo $C c = d x$, perueniat in ſitum $d c e$, ſitque angulus obliquitatis $D C B = \alpha$, iam ducatur $C \gamma$ ad ambas rectas obliquas normalis, atque manifeſtum eſt, vt corpus motum proſequi poſſit, non opus eſſe, vt particulae obuiae per ſpatiolum $C c$ promoueantur ſed tantum per ſpatium $C \gamma$, quod ſe habet ad illud vt ſin. α ad 1, ex quo etiam ſufficit iis celeritatem imprimi $= \frac{d x}{d t}$. ſin. α, ſicque pro hoc caſu obliquitatis, reſiſtentia putanda erit $= \frac{C}{4 g} . \frac{d x^2}{d t^2}$. ſin. α^2, ſcilicet praeterea quadrato ſinus obliquitatis proportionalis, quia autem ſin. α^2 eſt quantitas conſtans, commode ſimul in littera illa C comprehendi poteſt, ita vt non opus ſit huic caſui, peculiarem locum in noſtra analyſi tribuere.

Emendatio ſolutionis ſupra datae.

XXX. Vt igitur ſolutionem ſupra datam a vitio modo memorato liberemus, tantum opus eſt, in ambabus aequationibus ibi inuentis loco R ſcribere $R + \frac{A . d x^2}{d t^2}$, quo pacto aequationes illae erunt:

$$\frac{N d d y}{2 g d t^2} = R + \frac{A . d x^2}{d t^2} ; \quad \frac{M (d d x + d d y)}{2 g d t^2} = - R - \frac{A . d x^2}{d t^2} ,$$

quae inuicem additae ſummam praebebunt, vt ante

$$\frac{M d d x + (M + N) d d y}{2 g d t^2} = 0 ,$$

cuius

cuius integrale ergo etiam erit, vt ante

$$\frac{M\,dx}{dt} + (M+N)\frac{dy}{dt} = Mc.$$

Ad alteram autem aequationem integralem inueniendam, ex priore valorem

$$\frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{R}{N} + \frac{A}{N}\,\frac{dx^2}{dt^2},$$

ſubſtituamus in poſteriore vt prodeat

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{(M+N)}{MN}R - \frac{(M+N)}{MN}A\frac{dx^2}{dt^2} \text{ ſiue}$$

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -4g\frac{(M+N)}{MN}.R - 4gA\frac{(M+N)}{MN}.\frac{dx^2}{dt^2},$$

ponamus nunc breuitatis gratia

$$\frac{4g(M+N)A}{MN} = 2\alpha,$$

vt habeamus hanc aequationem

$$\frac{2\,ddx + 2\alpha\,dx^2}{dt^2} = -4g.\frac{(M+N)}{MN}.R,$$

quam videamus quomodo ad integrabilitatem perducere liceat.

XXXI. Ante omnia igitur obſeruamus, formulam $ddx + \alpha dx^2$ integrabilem reddi, ſi multiplicetur per $e^{\alpha x}$, erit enim $e^{\alpha x}(ddx+\alpha dx^2) = d.e^{\alpha x}dx$, multiplicemus igitur per $e^{\alpha x}$ et noſtra aequatio fiet

$$\frac{2\,d.e^{\alpha x}dx}{dt^2} = -4g\frac{(M+N)}{MN}e^{\alpha x}R,$$

quae vt prorſus integrabilis reddatur multiplicetur per $e^{\alpha x}dx$ eritque integrale

$$\frac{e^{2\alpha x}dx^2}{dt^2} = C - 4g\frac{(M+N)}{MN}.\int e^{2\alpha x}R\,dx,$$

vbi

vbi ſi formula integralis ita capiatur, vt euaneſcat facto $x = 0$, valor conſtantis C debet eſſe $= cc$, ſicque obtinebimus hanc aequationem integratam

$$\frac{d\,x^2}{d\,t^2} = e^{-2\alpha x}\left(c\,c - 4\,g\,\frac{(M+N)}{M\,N}\int e^{2\alpha x}.\,R\,d\,x\right),$$

quae aequatio iam cum ante inuenta

$$\frac{M\,d\,x + (M+N)\,d\,y}{d\,t} = M\,c$$

coniuncta, veram ſolutionem noſtri ſecundi problematis ſuppeditat.

XXXII. Circa hanc ſolutionem obſeruamus, ſi exponens $2\,\alpha\,x$ euaneſceret, ita vt eſſet $e^{2\alpha x} = 1$, tum hanc ſolutionem cum praecedente perfecte conuenire, eatenus igitur tantum ab ea diſcrepabit, quatenus $2\,\alpha\,x$ non euaneſcit, quia autem tum formula $e^{2\alpha x}$ eo magis vnitatem ſuperat, quo maior fuerit exponens $2\,\alpha\,x$, intelligimus formulam $e^{2\alpha x}\,R\,d\,x$ maiorem eſſe, quam caſu ante tractato et quidem eo magis, quo maius fuerit ſpatium penetrationis x, ex quo intelligitur, quo craſſior fuerit tabula, praeterquam quod ſola formula $\int R\,d\,x$ fit maior poſito ſcilicet $x = a$, ob factorem $e^{2\alpha x}$ multo magis inſuper augeri, quare quum ſupra pro caſibus quibus glans per totam tabulam perrumpit, poſuerimus

$$4\,g\,\frac{(M+N)}{M\,N}\int R\,d\,x = k\,k,$$

ſi nunc etiam ponamus

$$4\,g\,\frac{(M+N)}{M\,N}\int e^{2\alpha x}.\,R\,d\,x = k\,k$$

 iſta

iſta quantitas k maior erit quam caſu praecedente, ideoque nunc maior glandis celeritas requiritur, vt ea per totam tabulae craſſitiem penetret, et quo craſſior fuerit tabula, vt glans penetret, eius celeritas tanto maior debet eſſe, quam ſecundum ſuperiorem ſolutionem.

XXXIII. Cum autem glans per tabulam penitus perruperit, pro eius celeritate in egreſſu habebimus $\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha a}(cc - kk)$, quae ergo celeritas ob duplicem cauſam minor erit quam caſu praecedente, pro eadem ſcilicet celeritate c ante colliſionem; primo enim quia k maior eſt quam ante, quantitas $cc - kk$ iam eſt multo magis minor quam ante, deinde quia ea inſuper multiplicatur in $e^{-2\alpha a}$ vel quod perinde eſt, diuiditur per $e^{+2\alpha a}$, quae formula maior eſt vnitate, celeritas $\frac{dx}{dt}$ multo magis diminuitur. Quod denique ad ipſum tabulae motum attinet, quia eius celeritas poſt perforationem inuenta eſt $\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}(c - \frac{dx}{dt})$, et quia vt modo vidimus $\frac{dx}{dt}$ multo minus eſt quam caſu praecedente, nunc ipſi tabulae multo maior motus imprimetur, quam caſu praecedente, atque ob hanc rationem celeritas glandis poſt ictum, quae eſt $\frac{dx + dy}{dt}$ hinc aliquantillum augebitur, interim tamen quia ex formula noſtra fit:

$$\frac{dx + dy}{dt} = \frac{M}{M+N} \cdot c + \frac{N}{M+N} \cdot \frac{dx}{dt}$$

et

et quoniam $\frac{dx}{dt}$ minus eſt quam caſu praecedente, ipſa quoque glandis celeritas minor euadet,

XXXIV. Reducamus nunc etiam has formulas ad notiones communes et pro caſibus quibus glans ſiue penetrat, ſiue ſecus, ponatur celeritas glandis poſt ictum $= v$, celeritas vero tabulae $= u$ et quia eſt

$$\frac{dy}{dt} = u \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = v - u,$$

noſtrae binae aequationes inuentae fient

$$Mv + Nu = Mc \quad \text{et} \quad (v-u)^2 = e^{-2\alpha x}cc - 4g\frac{(M+N)}{MN}e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}.Rdx$$

quarum prior vti iam monuimus perinde ſignificat conſeruationem quantitatis motus, ſiue aequabilem progreſſum communis centri grauitatis. Pro viribus viuis autem eliciendis alteram aequationem per MN multiplicatam euoluamus

$$MNvv - 2MNvu + MNuu = MNcce^{-2\alpha x} - 4g(M+N)e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}.Rdx$$

ad eamque addamus quadratum prioris vt prodeat

$$M(M+N)vv + N(M+N)uu = Mcc(Me^{-2\alpha x} + N) - 4g(M+N)e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}.Rdx$$

quae aequatio per $M+N$ diuiſa praebet

$$Mvv + Nuu = \frac{Mcc}{M+N}(Me^{-2\alpha x} + N) - 4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}.Rdx$$

ex qua intelligitur nunc ſummam virium viuarum poſt ictum non amplius tam ſimpliciter ſe habere

ad vim viuam ante conflictum, quae erat Mcc quam in caſu praecedente nunc enim erit

$$Mvv + Nuu = Mcc - \frac{MMcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) - 4g\,e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}\,R\,dx$$

vnde patet vim viuam in conflictu deperditam aeſtimandam eſſe

$$= \frac{MMcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) + 4g\,e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}\,R\,dx$$

quonam autem ratiocinio haec iactura concludi poſſit, nullo modo perſpicitur.

PHYSICA.

RARIORVM AVIVM EXPOSITIO.

Auctore

SAMVEL GOTTLIEB GMELIN.

Viſum mihi eſt, ex aduerſariis, hiſtoriam corporum Naturalium in itinere obſeruatorum continentibus, ad commentariorum vſum ſenſim ſenſimque colligere, quae vel noua eſſe, vel illuſtratione digna puto. Ornithologica nunc offero.

I.

ACCIPITER *macrourus.*

Tab. VIII. et IX.

Ruth. Лунь: (Lun:)

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius auis ab extremo roſtro ad finem caudae - - - -	1.	7.	8.
Longitudo mandibulae ſuperioris a baſi cerae ad extremum - - - -	0.	0.	$7\frac{1}{4}$.
Diameter longitudinalis cerae ——	0.	0.	$4\frac{1}{2}$.
—— —— latitudinalis - - - - -	0.	0.	3. 0
Diameter maxillae ſuperioris ab angulo laterali ad extremum ——	0.	1.	0. 0
Diſtantia oculorum a baſi cerae ——	0.	0.	6. 0
Diſtantia inter oculos —— ——	0.	1.	$1\frac{3}{4}$.

Diſtantia

	Ped.	Poll.	Lin.
Diſtantia oculorum ab angulo laterali maxillae ſuperioris —— ——	o.	o.	$3\frac{3}{4}$.
Diameter oculorum longitudinalis –	o.	o.	$2\frac{1}{4}$.
Diameter ciliorum ad palpebras –	o.	o.	$1\frac{1}{4}$.
—— vibriſſarum ex longiſſimis ——	o.	o.	4. o
Longitudo capitis ad nucham ——	o.	1.	10. o
Longitudo colli —— —— ——	o.	2.	6. o
Longitudo pectoris ad vropygium –	o.	6.	6. o
—— ab vropygio ad extremam caudam	o.	8.	8. o
Alae expanſae diſtant —— ——	1.	11.	8. o
Longitudo a baſi roſtri ad flexuram cubiti – – – – – –	o.	4.	7. o
Diameter latitudinalis abdominis –	o.	1.	7. o
Longitudo femorum denudatorum –	o.	1.	$9\frac{3}{4}$.
Longitudo digiti antici medii ——	o.	1.	$0\frac{1}{2}$
Longitudo vnguis illius —— ——	o.	o.	6. o
Longitudo digiti antici intimi ——	o.	o.	9. o
—— vnguis illius —— —— ——	o.	o.	8. o
—— digiti antici extimi —— ——	o.	o.	$7\frac{1}{2}$.
—— vnguis illius —— —— ——	o.	o.	8. o
—— digiti poſtici cum vngue ——	o.	1.	o. o

DESCRIPTIO.

Magnitudo Lanarii. Roſtrum nigrum, baſi viride, mox ab exortu aduncum. *Cera* lutea. *Nares* ouales, ſemitectae *vibriſſis* nigris, conſertis, rigidis, erectis, e fouea temporali excurrentibus. *Palpebrae* cum *iride* croceae. *Pupilla* nigerrima. *Pars* corporis *ſupina* omnis cinerea, plumis quibusdam dorſalibus non

nonnunquam in colorem obſolete rubrum vergentibus. *Pars prona* tota niuea, rudimento cinerei in collo ſuperſtite. *Remigum prima* minor gryſea, maior, *ſecunda* ad *quartam* fuſceſcentes, maiores, latere anteriore gryſeae; reliquae omnes cinereae, apice albicantes. *Tectrices* cinereae, infra niueae. *Cauda* rotunda, *rectricibus* duodecim longiſſimis, albicantibus, *faſciis* transuerſis, nunc dilutius, nunc profundius fuſcis, duabus intermediis immaculatis. *Veſtitrices* niueae, faſciis iterum transuerſis dilute fuſcis. *Pedes* flaui. *Vngues* nigerrimi, ſpiraliter incurui, acutiſſimi, ita autem *Mas* ſe habere ſolet.

Magna eſt *feminae* ab eo differentia, vt iurares diſtinctam ſpeciem conſtituere. Huic *pars* corporis *ſupina* fuſca, marginibus pennarum caſtaneis, maxime ad *caput*, *ſubtus* autem caſtaneo colore tota flauet. *Remiges* omnes immaculatae, ſature fuſcae, et ſummo tantum apice obſolete candicantes. *Tectrices* itidem fuſcae, extremo apice ferrugineae. Inſigniter quoque *rectrices* diſcrepant, e quibus *tres* vtrinque *extimae* caſtaneae, *prima* verſus apicem nigro maculata, *ſecunda*, *tertia* et *quarta* per totum ſui decurſum faſciis latis et nigris interruptis; *quatuor intermediis* fuſcis, et fuſco ſaturiore transuerſim maculatis, omnibus autem apice ferrugineis. Eodem quoque *femoralia* colore et *cauda* inferius ornantur. Sed eſſentialibus notis omnibus, *roſtro*, *cera*, *pedibus*, *habitu*, *volata* conuenit.

A *Woronez* abhinc ad omnem *Tanain* occurrit. Icones et *marem* et *feminam* bene exprimunt.

II.

Tab. X.

ACCIPITER *ferox.*

	Ped.	Poll	Lin.
Magnitudo ab imo roſtro ad finem caudae - - - - - - - - -	2.	1.	8.
Longitudo roſtri - - - - - - -	0.	1.	$7\frac{1}{2}$.
Diſtantia roſtri ab oculis - - - -	0.	1.	$1\frac{1}{2}$.
Diſtantia narium ab iisdem - - -	0.	1.	0 0
Diſtantia inter oculos - - - - - -	0.	1.	11.0
Diſtantia a baſi roſtri ad flexuram cubiti - - - - - - - - -	0.	8.	2. 0
Longitudo colli - - - - - - -	0.	2	6. 0
Longitudo dorſi - - - - - - -	0.	7.	1. 0
Longitudo caudae - - - - - - -	0.	10.	1. 0
Diſtantia alarum expanſarum - - -	3.	5.	8. 0
Longitudo tibiarum - - - - - -	0.	3.	1. 0
Longitudo digiti antici medii cum vngue - - - - - - - - - -	0.	2.	5. 0
—— —— —— intimi - - - -	0.	1.	8. 0
—— —— —— extimi - - - -	0.	1.	$3\frac{1}{2}$.
—— —— —— poſtici - - -	0.	1.	$4\frac{1}{2}$.

DESCRIPTIO.

Eatenus ferocem hanc ſpeciem dico, quod rapaciſſima ſit, in alias aues tyranni adinſtar ſaeuiat, nec et quemadmodum aquila, cadauera, reſpuat.

Pertinet,

Pertinet, vt ex dimenſione elucefcit, ad accipitres maiores, et craſſitie Falcone fuluo, LIN. non multo inferior eſt.

Roſtrum habet admodum aduncum, e plumbeo colore nigrum, *cera* viridi baſi inſtructum, perforata vtroque latera *naribus*, quatuor lineis longis, duas circiter latis, fere parallelogramma referentibus. Tota auis ſuperne fuſca, vel e fuſco ferruginea, albicantis tamen coloris capiti et poſtico non nihil addito. *Regio ſupra oculos* nigris, longis, incumbentibus pilis, tanquam, continuatione vibriſſarum obſita. *Palpebrae* cum *pupilla* caeruleae. *Irides* flauae. *Caput collumque* inferius, pauco albido admixto, ferruginea. *pectus* poſterius et abdomen niuea, maculis caſtaneis variegata. *Remiges* viginti ſex, ſupra nigrae, et latere poſteriore fuſco albo que dimidiatae infra candidae, et extremitatem verſus gryſeae. *Tectrices* colore corporis paululum tantum albidiores pone niueae, et anterius maculis ferrugineis notatae *Cauda rectricibus* duodecim aequalibus, fuſcis, latere poſteriore albis, vtroque faſciis quatuor, ſaturatius fuſcis. Infra cum *vropygio* albent. *Pedes* craſſi, valde tabellati, digitis coloris eiusdem, *vnguibus* incuruis, acutis munitis.

Aſtrachaniae hyeme 1769. auis haec obſeruata fuit, frequens ibi circa vrbem.

Icon formam quidem bene exprimit, ſed in eo peccat, quod ſiſtat auem magnitudine iuſto minore.

III.

Tab. XI. a.

ACCIPITER *Korſchun.*

DESCRIPTIO.

Adeo ſimilis eſt miluo, eſſentialibus notis omnibus, volatu, oeconomia, migratione, vt forte non niſi varietate diſtincta auis ſit. *Magnitudine* eſt 21. cum dimidio pollicum; corporis *circumferentia* miluo ſimilis. *Roſtrum* e plumbeo colore nigrum, mox ab exortu aduncum, pollicis vnius, et linearum quinque. *Cera* viridis, diametro longitudinali linearum quinque, latitudinali perfecte eadem. *Nares* inaequaliter ouales, *vibriſſis* ſemitectae. *Spatium* inter oculos et roſtrum nudiuſculum. *Caput*, id ſingularitatem huius auis conſtituit, anterius que *collum ſuperius* cum *gula* eleganter caſtanea, ſed *ocularis regio* alba, et latera capitis dilute fuſca. Hicque color totius reliqui corporis partes occupat, marginibus pennarum plurimis rufis, *plumis* quibusdam ad *collum ſuperius* et poſterius, non minus, quam ad pectus fuſco et caſtaneo dimidiatis. *Oculi* a naribus nouem lineas remouentur: Diameter eorum longitudinalis quatuor, latitudinalis tribus lineis reſpondet; inter ſe autem pollicem vnum et lineas quinque diſtant. A *baſi roſtri* ad flexuram cubiti ſpatium eſt quinque pollicum cum dimidio REMIGES 24 nigrae 1 maiore 2 – 4 maximis, reliquis gradatim minoribus, omnibus apice vinaceis. *Tectrices* concolores. *Rectrices* duodecim, colore remigum: earum *veſtri-*

tices

tices colore corporis. *Pedes* luteſcentes, tabellati. *Femora* pennis corpore concoloribus tecta. *Tibiae* nudae, pollicum duorum, cum lineis decem. *Digitus anticus medius* cum *vngue* pollices duos longus; *extimus* pollicem vnum et lineas ſex, *intimus* et *poſticus* longitudinis eiusdem. *Vngues* nigricant.

Auis haec in deſertis ad Tanain, caſtello quod a Diuo Paulo nomen habet, abhinc, fere ad *Tſcbercask* vrbem, Koſacorum Tanaicorum metropolin, ſaepius mihi occurrit. Amat ſolitudinem, excubitorem frequenter agit, cacuminibus tumulorum tataricorum, qui Kurgani dicuntur, inſidendo, auiculasque praeteruolantes muresque attendendo, quibus veſci ſolet.

IV.

AQVILA *mogilnik*. Tab. XI. B.

Nomine auem inſignis, quo Rutheni adpellare eam ſolent, et pari ratione antecedentem nominaui. Magnitudine et craſſitie *F. fuluo* LIN. paulo minor eſt. Omnium vero partium dimenſionem inuenio ſequentem.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo ab extremo roſtro ad extremam caudam - - - - - - -	2.	3.	1.
— a baſi roſtri ad flexuram cubiti	0.	7.	9.
— roſtri ad frontem cera ſimul menſurata	0.	2.	3.
— ad tempora - - - - - - -	0.	2.	9.
— a baſi roſtri frontali ad oculos -	0.	1.	0.

 Diame-

	Ped.	Poll.	Lin.
Diameter cerae longitudinalis - -	0.	0.	6.
—— —— —— latitudinalis - - -	0.	0.	10.
Longitudo apicis mandibul. ſuperioris ſuper inferiorem prominentis - -	0.	0.	3.
Diſtantia inter oculos - - - - -	0.	2.	1.
Longitudo capitis - - - - - - -	0.	4.	9.
—— —— colli - - - - - -	0.	3.	8.
Diſtantia alarum expanſarum - - -	4.	6.	
Longitudo vniuerſa pedum - - -	0.	10.	4.
—— digiti antici medii cum vngue	0.	3.	0.
—— —— —— extimi - - -	0.	1.	9.
—— —— —— intimi - - -	0.	2.	3.
—— —— —— poſtici - - -	0.	1.	6.
—— —— caudae - - - -	1.	0.	9.

DESCRIPTIO.

Roſtrum baſi rectum, tum vero valde aduncum, *cera* lutea inſtructum, luteo colore vtrisque lateribus inſtructum, cetera nigrum. *Mandibula* inferior ſpatulata. *Lingua* integra, medio profunde canaliculata. *Nares* transuerſae, ouales. *Spatium* roſtrum inter et oculos medium diuerſae magnitudinis vibriſſis nigris mollibusque obſitum. *Caput*, *collum*, *dorſum et alae* fuſca ſ. obſcure ferruginea, pennis albis raro et uage intermixtis. *Remiges* 24 nigrae; e primoribus 12 et 3 latere poſteriore et inferius gryſeo maculatae, 4—7. vtroque, apicibus extremitate nigris: reliquae eundem in modum vndulatae, ſed extremitate rufa donatae. Remiges compli-

complicatae caudam extremam non attingunt. *Te-ctrices* remigum minorum ad inſtar coloratae. Prona pars corporis dorſo penitus concolor, hac tantum cum differentia, quod albedo omnis exulet. Pennae pedes vsque ad exortum digitorum, quemadmodum in Bubone denſe tegunt, dorſique pariter colorem prae ſe ferunt, rufum autem largius ſubinde iis admixtum video. Digiti admodum tabellati, lutei. *Vngues* nigri. *Palpebrae* pallide caeruleae ſunt, *Iris* lurida. *Pupilla* nigra, ſplendens. *Cauda* aequalis, rectricibus 12 nigris, gryſeo obſolete faſciatis, apice rufis. *Tectrices* remotiores fuſcae, extremo rufae, propiores fuſco rufoque dimidiatae.

Victus, *mores*, *oeconomia* praecedentis.

V.

NOCTVA *minor*. Tab. XII.

BRISS. *av.* *p.* 150. *ord.* 3. *g.* 12. *ſ.* 5.

Gmel. Syst. p. 163. T. 9. Strix accipitrina.

Deſcriptioni BRISSONIANAE per omnia ſimilis eſt, ſed magnitudine tantum maior, quippe quae ad pedalem accedit, et craſſitie vlulina inſignior. Deinde *roſtrum* habet totum nigrum; *Remiges* e fuſco et flauicante varias, multumque flaueſcentis ventri admiſcetur. Mentum album.

VI.

VI.

Tab. XIII. **PERDIX** *rufa.*

GESN. *Will t.* 29. BRISSON. *av. ord.* 2. *gen. ſext. ſp.* 10. TETRAO *rufus* LIN.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo auis ab extremo roſtro ad finem caudae - - - - - - -	1.	2.	7.
—— ab extremo roſtro ad brachium	0.	6.	11.
—— roſtri lateraliter menſurata - -	0.	0.	10.
—— —— longitudinaliter - -	0.	0.	9.
Diſtantia roſtri ab oculis - - - -	0.	0.	4.
Diſtantia inter oculos ſupra caput menſurata - - - - - - -	0.	0.	$8\frac{1}{2}$.
Diameter oculorum longitudinalis - -	0.	0.	$4\frac{3}{4}$.
—— —— —— latitudinalis - -	0.	0.	$2\frac{3}{4}$.
Longitudo faſciae nigrae pone oculos oblique deſcendentis - - - -	0.	2.	6.0
Latitudo illius - - - - - -	0.	0.	$4\frac{3}{4}$.
Longitudo ſpatii a macula orbiculari nigra infra roſtrum ad concurſum faſciarum ad collum inferius - - -	0.	3.	$1\frac{1}{2}$.
Circumferentia colli circiter - - -	0.	3.	0.0
Longitudo colli - - - - - -	0.	3.	2.0
Longitudo a baſi colli ad brachium	0.	1.	6.0
—— —— —— —— ad femora - -	0.	3.	10.0
Longitudo dorſi mox poſt brachiorum principium menſurata - - - -	0.	2.	8.
Latitudo dorſi ad finem brachiorum menſurata - - - - - - -	0.	2.	4.0

Longi-

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo caudae - - - - -	0.	3.	6.
Diſtantia alarum expanſarum - - -	0.	11.	6 0
—— —— pedum - - - -	0.	3.	0.0
Craſſities crurum - - - - -	0.	2.	4.0
——— femorum ad tibias - - -	0.	0.	9.0
Longitudo femorum - - - - -	0.	3.	$2\frac{1}{2}$.
—— —— tibiarum - - - -	0.	1.	10.0
Craſſities tibiarum - - - -	0.	0.	6.0
Longitudo digiti antici medii - -	0.	1.	3.0
—— —— vnguis illius - - -	0.	0.	$5\frac{1}{2}$
—— —— digiti antici intimi - -	0.	1.	0.0
—— —— vnguis illius - - - -	0.	0.	5.0
—— —— digiti antici extimi - -	0.	0.	9.0
—— —— vnguis illius - - -	0.	0.	$4\frac{1}{2}$.
—— —— digiti poſtici - - -	0.	0.	$4\frac{1}{2}$.
—— —— vnguis illius - - -	0.	0.	4.0

DESCTIPTIO.

Roſtrum ſanguineum, conico-incuruum, *baſi* vtrinque *membrana* firma, cartilaginea, itidem purpurea, in formam oualem coacta, *nares* tegente, auctum. *Caput ſuperius* oblongum, cinereum, *fronte* faſcia nigra, transuerſa, ſubhemicyclica, *temporibus* ex albo colore obſolete caſtaneis. *Criſta* denſa, tempore coitus, vel iraſcente gallo, erecta. Oculorum *irides* et *palpebrae* coccineae. *Pupilla* caerulea. *Pone oculos* faſcia vtrinque, gryſeo parcius intermixto, nigra, lata, oblique ad collum inferius deorſum deſcendens, principio ſeparata ſenſim ſenſimque ſibi vi-

 cinior

cinior, donec ad finem colli inferioris in vnam confluat. *Gula* et *principium* colli inferioris colore temporum; ſed *maculae tres* nigrae ſubtus baſi roſtri adponuntur, *vna* reliquis inſigniore, ſuborbiculari, et *duabus* lateralibus oblongis, ſubhaſtatis. *Collum ſuperius* elongatum, laete cinereum. *Dorſum* coloris eiusdem, ſubrubicundum. *Remiges* ad viginti quatuor, concolores, latere anteriore ſuperius caſtaneae, adeo breues, vt caudae exortum vix attingant. *Tectrices* remigibus colore reſpondentes. *Pectus* et *abdomen* cinerea. *Inferior pars* corporis ad caudam extremam vsque caſtanea. *Femoralia* quoque flaueſcunt, ſed *regio ſubalaris* pulcherrime caſtanea, *faſciisque* transuerſis atris, latioribus et anguſtioribus eleganter interrupta. *Dorſum*, quod in principio lateſcit, caudam verſus anguſtatur, et gibbam formam contrahit. *Caudae* autem ſingularis gallorum omnium ratio eſt, hac tantum cum differentia, quod *rectricibus* componatur duodecim, angulum acutum inter ſe formantibus, cinereis, intermediis quatuor immaculatis reliquis apice rufis. *Pedes* coccinei, craſſi, admodum tabellati. *Calcar* craſſum, breue, obtuſiſſimum in mare, medietati tibiae poſterius adpoſitum. *Digiti* quatuor, tres anteriores, poſtico vnico, *vnguibus* incuruatis, ex incarnato colore nigris.

Habitat in *Perſia*: ab Excellentiſſimo Gubernatore et Equite BEKETOW Aſtrachaniae enutrita auis, cuius eam munificentiae debeo.

VII.

VII.

PHASIANVS *Colchicus*, LIN.

PHASIANVS *Auctorum*. Ruth. Faſan vel dikaia kuriza. (фазанъ или дикая курица.)

Ad complendam deſcriptionem BRISSONIANAM ſequentia ſpectant.

MAS. *Supercilia* pallide violacea, plumulis minimis nigris adſperſa. *Membrana* cartilaginea, nares tegens, roſtri adinſtar, coloris cornei. *Pupilla* atra. *Gula* ſature viridis, et prae virore nigreſcens. *Collum inferius* e viridi aureum. *Colli ſuperioris* pars *anterior* e viridi et violaceo ſplendens, *poſterior* et *dorſum* in noſtris rufo igneum, *pennis* apice cordatim nigro emarginatis. *Dorſum* inferius plumis, lituris nigris et albis variis, apiceque rufo aureis. *Femoralia* caſtaneo tantillum intermixto, fuſca. *Remiges* viginti quatuor, primoribus fuſcis, fuſco albidoque transuerſim faſciatis, *ſecundariis* cinereis. *Tectrices* ferrugineae, exterius in violaceum vergentibus. *Vropygium* immixto viridi, dilute caſtaneum. *Tectrices* rectricum colore vropygii.

FEMINA. Ex fuſco gryſeo, rufeſcente et nigricante varia, mare multo difformior, vt in Gallinis ſemper. *Supercilia* in noſtris nudiuſcula, e viridi et cinereo albentia. *Cauda* rectricibus, punctis creberrimis, nigris adſperſis, nigro et cinereo-nigro transuerſim ſtriatis.

 Degit

Degit in arundinetis prope mare *Caſpium* copioſiſſima, humi nidificans, nidumque gallinae adinſtar exſtruens. Ponit oua ad duodecim.

VIII.

Tab. XIV.

ARDEA *Kwakwa.*

Nycticorax n.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius auis ab extremo roſtro ad extremam caudam - - -	1.	9.	2.
—— —— roſtri - - - - - -	0.	2.	4½.
Diſtantia a baſi mandibulae ſuperioris ad oculos - - - - - -	0.	0.	5.
—— —— —— inter oculos - - -	0.	1.	4.
—— a baſi roſtri ad flexuram cubiti	0.	10.	9.0
—— a baſi mandibulae inferioris ad nucham - - - - - -	0.	2.	4.0
Longitudo colli - - - - -	0.	7.	6.0
Diſtantia alarum expanſarum - -	2.	8.	0.0
Alae complicatae caudam exacte attingunt			
Circumferentia corporis circiter aequalis	0.	9.	0.0
Longitudo criſtae maioris - - -	0.	4	3½.
—— —— —— minoris - - -	0.	2.	11.0
—— pedum cruribus denudatorum vsque ad pedes - - - - -	0.	3.	6.0
—— digiti antici medii - - - -	0.	2.	3.0
—— —— —— extimi - - -	0.	1.	8.0
—— —— —— intimi - - -	0.	0.	11.0

DE-

DESCRIPTIO.

Roſtrum rectum, nigrum, acutiſſimum *mandibula ſuperiore* paululum longiore, ſulco longitudinali vtrinque notata. *Nares* ad baſin roſtri, lanceolato-lineares, peruiae. *Anterior pars frontis* alba. *Taenia* vtrinque candida a fronte trans tempora ſuper oculos excurrens, pone eos anguſtata. *Iris* coccinea, *pupilla* nigra. *Omne reliquum caput ſuperius* e viridi colore atrum, *pennis* longiuſculis, dependentibus, ſubcriſtatis, e quarum medio erigitur *criſta* ſolitaria, filamentoſa, alba, vltra dorſi initium continuata. *Latera occipitis*, *caput inferius*, *vtrumque collum*; *ſternum*, *ſubalaris regio*, *abdomen*, *femoralia* cum *criſſo* alba. *Dorſum* e viridi colore nigrum. *Remiges* earumque *tectrices* immaculate cinereae. Illae complicatae caudam extremam exacte attingunt. *Cauda rectricibus* duodecim ſubaequalibus, cinereo-albicantibus. *Pars femorum plumis denudata* flaua. *Tibiae* flauae. *Digitus anticus medius* cum extimo membrana lutea, ad primum fere articulum vsque protenſa, connexus. *Vngues* pallide nigri, incuruati, omnium maxime poſtico.

Ad *Tanais* littora degit, migratoria auis, trans mare nigrum primo vere adueniens, eoque autumno redeuns, nobis primo ad caſtellum, quod a diuo Paulo nomen ſortitum eſt, obſeruata, et poſtea ingentibus cohortibus ad omnia huius fluuii littora ad *Tſcherkask* vsque vrbem viſa. A voce quam edit, ruthenice Kwakwa (КВАКВА) dicitur, eodemque no-

 mine

mine Ornithologico eam inſigniui. Victitat congenerum more piſcibus, more ſequentium, quas nunc propono.

IX.

Tab. XV.

ARDEA *caſtenea.*

DESCRIPTIO.

Longitudo a ſummo roſtro ad imam caudam pedi vni, pollicibus decem, et lineis ſex reſpondet. *Roſtrum* fere tres pollices longum eſt, baſi ſua liuidum, extremitate nigrum, acutiſſimum; vtrinque ſulcatum. *Nares* lineares anguſtiſſimae; *mandibula inferior* ſubtus *membrana* viridi cincta, a ſpatio, quod oculos et roſtrum interiacet, continuata. *Caput* exiguum. *Vertex* et *occiput* pennis longis laxisque e candicante nigricantibus, criſtam vsque ad medium collum protenſis abeuntibus. *Gula* alba, ſaccata. *Spatium* inter oculos et roſtrum medium, viride, linearum quatuor. *Supercilia* viridia. *Iris* crocea. *Pupilla* nigra. Longitudine caput pollices 2 et lineas 4 aequat; ab illius autem baſi ad finem criſtae pollicum 4 et linear. 3 ſpatium intermedium eſt. *Oculi* vnum pollicem et quatuor lineas diſtant. A baſi autem roſtri ad flexuram cubiti 8 poll. et 9 lin. numero. *Latera* capitis flaueſcunt. *Collum* gracilisſimum, caſtaneo-flauum longitudine pollicum 8, et linearum 10. *Inferius* e flauo et candicante colore varium eſt. *Dorſum* caſtaneo-rufum, *pennis* conſtans ſetifor-

ſetiformibus, longiſſimis. *Pectus*, *abdomen*, *vropygium*, *et ſemoralia* niuea, flauedine rarius interſperſa. *Remiges* 24. niueae, vltra caudam extenſae, ex his interius, ſed inconſtanter quaedam latere poſteriori maculis nigris conſpurcatae ſunt. *Tectrices* e niueo colore obſolete flauae. Remiges expanſae vnum pedem et pollices vndecim ab inuicem diſtant. *Rectrices* 12 itidem vtrinque niueae quaedam apicibus nigro maculatae. Earum *veſtitrices* coloris eiusdem. *Pedes* crocei. *Femora* quousque nuda ſunt, linearum nouem; *Tibiae* pollicum duorum, *digitus anticus medius* pollicum duorum et linearum ſex, *intimus* cum eodem pollicis vnius et linearum nouem; *extimus* pollicis vnius et linearum ſeptem; *poſticus* vero pollicis vnius et quatuor linearum. Hi vngues nigri ſunt, valde incurui, longiſſimus autem poſtici, inter omnes iterum quam maxime arcuatus. Cohaerent digiti antici, vt in Ardeis moris eſt; membrana inter ſe, vix autem notabilis eſt inter digitum intimum et medium.

Venit et haec ſpecies e mari nigro ad Tanain, nec autem vltra progreditur ac ter centum circiter ſtadia ab oſtio celebris huius fluuii in terram, ibi autem, congenerum ritu in arborum cacuminibus nidificare ſolet.

Comparata auis cum deſcriptionibus Auctorum, inprimis cum ſpeciebus, quas BRISSONI ſynopſis Auium methodica exhibet, adfinitates quidem oſtendit cum cancroſagis n. 33. 34. 35. 36 et 37. ſed in

in nullam exacte quadrat, quare eam non deſcriptam puto.

X.

Tab. XVI.

ARDEA *Ferruginea.*

DESCRIPTIO.

Ruthenis Coſacis ob vocem, quam edit bouinae ſimilem быкъ dicitur. — Auis, quam exhibeo, longitudine adaequat, pedem vnum, pollices nouem, cum lineis quinque, craſſitie vero vix reſpondet dimidio pedi cum lineis quinque. *Roſtrum* rectum, acutum. *Mandibula ſuperior* ſupra fuſca, apice vix decliuis, infra ex incarnato colore viridis, medio inter hanc coloris diuerſitatem ſulco notata, a naribus producto. *Mandibula* inferior incarnato viridis, et apice tantum vtrinque lateribus fuſca. *Nares* lineares, longitudine linearum ſeptem, anguſtae, et aequalis vbique latitudinis. Spatium roſtrum inter et oculos intermedium nudum, viride diametro longitudinali linearum ſeptem cum dimidia, latitudinali, vbi maximus eſt, linearum quinque. *Supercilia* nuda, medio liuida, ambitu viridia. *Iris* crocea. *Pupilla* nigra. Oculos autem haec auis ſat magnos habet, quod ſi enim in viua contemplaris, diameter eorum longitudinalis lineas ſeptem, latitudinalis vero quinque adaequat; oculi e contra ipſi a ſemet inuicem vnum cum dimidio pollicem diſtant. Summa frontis baſis tres fere pollices a fine occipitis

pitis diſtat. Capitis autem latitudo ſumma infra tempora menſurata pollicibus duobus, lineisque tribus aequalis eſt. Hoc *caput* oblongum eſt, nigrum, *pennarum* apicibus extremitate ferrugineis. *Pennas* in vertice extantes obſeruo non nullas, ſed ita capiti adprimuntur, vt criſtae nomen vix mereri videantur. *Collum* gracile, elongatum, pedis fere dimidii, colore capitis, ita vt pennae inferiores cineraſcant, qui quoque color nec in capitis pennis inferioribus excluditur. *Mentum* ex albo flauet, candicans que etiam color medio in collo inferiore adparet, ceterum priori ſimili, magis tantum ruſo. *Dorſum* quoque nigricat, et extremitate pennae ferrugineae ſunt. *Remiges* 26. fuſco-nigrae, omnibus apice candidis, et vltimis latere anteriore obſolete ruſo maculatis. *Tectrices* coloris eiusdem, remotis apice ferrugineis, vicinis albo et ruſo variis. *Pectus*, *abdomen* et *vropygium* e ferrugineo, candicante, fuſco, cinereo que colore varia. *Femoralia* e ruſo et cinereo candida. *Pedes* virides. *Femora* nuda longitudine linearum quinque. *Tibiae* pollicum 2. linearum 6. *Digitus anticus medius* cum ſuo vngue longitudinis eiusdem. *Intimus* pollicis vnius, linearum vndecim, *extimus* pollicis vnius, linearum nouem cum dimidia, poſticus pollicis vnius, atque linearum ſex. *Vngues* pro more incurui, pallidi, poſtici illo craſſiore quam maxime, et medio inferius dentato. Baſis roſtri a temporibus menſurata, a flexura cubiti 8 pollices cum linea vna diſtat. Alae complicatae caudam vix excedunt. Expanſae duos pedes et duos pollices

 paulo

paulo que vltra a ſemet inuicem diſtant. *Rectrices* duodecim, aequales, cinereae. *Veſtitrices* fuſco-cinereae.

Pondere Ruthenico pendet libram vnam cum quadrante.

Cum priori degit, migratur, et eodem piſcibus inſectisque veſcitur more.

XI.

Tab. XVII.

ARDEA *niuea.*

Ruthenice бѣлой шабуръ.

Longitudine eſt duorum pedum et linearum 2 menſurando auem ab extremo roſtro ad ſummam caudam. *Roſtrum* rectum, acutum, longitudine pollicum trium linearumque ſex, ſulco e naribus producto notatum, laeuiſſimum, nigerrimum. Spatium inter oculos et roſtrum nudum e flauicante caeruleum, diametro transuerſali menſuratum pollicis vnius. *Caput*, *collum*, *dorſum*, *pectus*, *abdomen*, *vropygium*, *femoralia*, *remiges*, quarum numero viginti ſex ſunt, *rectrices* duodecim, vtrarumque tectrices niueae. *Criſta* nulla, ſed collum vtrinque prope inſertionem ſuam *plumis* extantibus amictum eſt, criſtae ſpeciem mentientibus, dorſumque terminatur *pennis* longiſſimis, vtrinque crinitis, ſimilibus pauonis criſtati plumis. Earum color ex albido in flaueſcentem aliquantum vergit. *Femora* quousque nuda, pollices duos longa ſunt. *Tibiae* pollices tres habent;

habent; vtraque colore nigro obſeruantur conſpicua, et interrupta ſunt inciſuris, lineis, circulis, figuris que rhomboidalibus, omnibus mire ſe decuſſantibus. *Digitus anticus medius* pollices duos, lineas que tres longus. *Vnguis* linearum 8. latere dentatus. *Digitus anticus intimus* pollicis vnius, linearum 9. *Vnguis* illius linearum ſex, extimus pollicis 1 et linearum 10. vnguis linearum 5 poſticus cum ſuo vngue pollicem vnum et lineas decem. *Femora* et *pedes* nigra. *Digiti* crocei. Vngues iterum nigri. Hi arcuati, at poſticus inter omnes quam maxime. Alae complicatae vltra caudam extenduntur.

Femina mari magnitudine cedit, pennas que, quas ad collum et dorſum deſcripſi, multo minores habet. Ceterum plane eadem. In ventriculo, quum valde magnum vidi, piſciculos multos deprehendi. *Hepar* ingens eſt, et in duos lobos fiſſum, quorum dexter ſiniſtrum longitudine ſuperat. Cor magnum, cunei forma. Inteſtina longo canali inſtituuntur, infra ampliato.

In altis arboribus nidificat, ex mari nigro vere *Tanain* petens, ſed hunc fluuium vix per quatuor centum leucas proſequens, autumno, quo venit, redit.

XII.

Tab. XIII.

NVMENIVS *igneus.*

Ruthenis Kaſacis Krawaika: (Кравайка:)

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo ab extremo roſtro ad extremam caudam - - - -	1.	11.	0.
—— roſtri a baſi frontis menſurata -	0.	5.	1.
—— roſtri a baſi temporum menſurata	0.	5.	0.
—— narium - - - - -	0.	0.	3.
Longitudo narium - - - - - -	0.	0.	$1\frac{1}{4}$.
Longitudo a baſi narium ad canthum oculorum anteriorem - - -	0.	0.	10.0
—— a baſi roſtri frontali ad eundem tranſuerſim menſurata - -	0.	0.	8. 0
Diſtantia inter nares - - - -	0.	0.	$2\frac{1}{5}$.
Diameter oculorum longitudinalis -	0.	0.	4.
—— oculorum latitudinalis - -	0.	0.	$2\frac{1}{2}$.
Diſtantia inter oculos - - -	0.	1.	0. 0
Longitudo a baſi roſtri temporali ad flexuram cubiti - - - -	0.	6.	10.0
—— capitis - - - - - -	0.	4.	$7\frac{1}{2}$.
Latitudo ſumma - - - - - -	0.	1.	$3\frac{1}{2}$.
Longitudo colli - - - - -	0.	6.	6. 0
Circumferentia colli infra caput menſurata - - - - - - -	0.	3.	6. 0
—— ipſius ad ingreſſum - - -	0.	4.	3. 0
Longitudo a principio putoris ad extremam caudam - - - - - -	0.	11.	1.0
—— caudae - - - - - - -	0.	5.	10.0

Maxima

	Ped.	Poll.	Lin.
Maxima latitudo abdominis - - -	0.	3.	0. 0
Longitudo femorum cruribus denudatorum - - - - - - - -	0.	2.	0. 0
——— tibiarum - - - - - - -	0.	3.	7. 0
Longitudo digiti antici medii cum vngue - - -	0.	3.	2. 0
——— digiti antici extimi cum vngue	0.	2.	5
——— ——— intimi - - - - -	0.	2.	$2\frac{1}{2}$.
——— poſtici cum vngue - - - -	0.	1.	0. 0.

DESCRIPTIO.

Roſtrum laeue, teretiuſculum, valde arcuatum, obtuſum; *mandibula ſuperiori* tantillum longiore, lateribus vtrinque ſulcata, coloris viridis, mortua aue in oliuaceum inclinantis. *Nares* ad baſin roſtri frontalem oblongae, medio latiuſculae. *Lingua* principio bifida, dentata, longo, acuto, et anguſto fine terminata. *Caput* oblongum, nigrum, apicibus pennarum albo fimbriatis. OCVLI *palpebris* fuſcis absque ciliis, *iride* oliuacea, *pupilla* nigra. *Circulus* albus ab oculorum angulo ſuperiore inferius perpendiculariter deſcendens, tranſuerſim per frontem decurrens, poſtea adſcendens, ad angulum ſuperiorem oculi alterius terminatus. Similis, ſed anguſtior *circulus* ſub oculis decurrens, perpendiculariter deſcendens roſtri mandibulae inferiori implantatus. *Caput inferius* eodem, ac ſuperius, colore donatum. *Collum* gracile, elongatum, colore capitis, hac cum differentia, quod pinnae poſterius absque extremo candore omnino

 nigrae

nigrae obſeruentur. *Collum inferius* ſuperiori in omnibus reſpondet. *Reliquum corpus* e cyaneo, nigricante, viridi et vinaceo ſplendentibus coloribus varium, vnde auis, per aëra volitans, ſolis illuſtrata radiis aurea videtur eſſe. *Pectus et Abdomen* e nigricante rufa. Hic que poſterior color praeualet. *Remiges* vinginti quatuor, gradatim minores, e viridi et aureo pulcherrime ſplendentes. *Complicatae* vltimam caudam attingunt. *Expanſae* vltra duos pedes a ſemet inuicem diſtant. *Inferius* eundem colorem adfectant, ob nigredinem tamen immixtam paulo ſaturatiores adparent. *Tectrices primi ordinis*, corpori ſcilicet viciniſſimae, e rubicundo et cyaneo, *ſecundi* e nigro, rubro, viridi, *tertii*, remigibus quippe propiores, e viridi ſplendentes. *Cauda* aequalis e viridi et violaceo varia, terminata *rectricibus* duodecim e rubro, viridi, et aureo ſplendentibus, ſubtus coloris eiusdem. *Vropygium* et *femoralia* colore abdominis. *Pedes* longiſſimi, laete virides. Digitus medius cum extimo membrana viridi coniunctus. *Vngues* nigri, incurui.

Degit ad littora *Tanais*, ad *Choperum* fluuium quoque frequens, piſcibus et inſectis victitat, gregatim volat, in altis nidificat.

XIII.

Tab. XIX.

NVMENIVS *viridis*.

DESCRIPTIO.

Magnitudine et craſſitie Numenio arquato ſimilis eſt. Ipſius nempe longitudo ab extremo roſtro

vsque

vsque ad finem caudae pedem vnum aequat, cum ſeptem et dimidio pollicibus. *Roſtrum* pollicum trium cum dimidio, laeue, coloris ex fuſco plumbei; *Mandibula inferior* ſubtus et latere incarnata. Idem roſtrum vehementer arcuatum, *Mandibula ſuperiore* ſulco pariter medio excauata, intra quem membrana iacet a temporibus producta, *Nares* ex parte cooperiens, atque abhinc flexibilis in ſulco deliteſcens, vsque dum ſenſim et ſenſim anguſtata circum finem roſtri euaneſcat. *Nares* anguſto principio ortae lateſcunt, et eandem latitudinem vsque ad finem ſeruant. Eorum autem diameter longitudinalis lineis octo reſpondet, latiſſimae vix duas lineas adaequant. *Lingua* illi ſimilis eſt, quam in numenio igneo deſcripſi. *Caput* oblongum, longitudine pollicum duorum, latitudine, vbi ea maxima, pollicis vnius cum dimidio, color illius ad nigricantem accedit, pennae tamen margine ſuperiore obſolete candicant. *Macula* ſupra oculos alba, occiput reſpiciens. *Maculae* duae vel tres in vertice albae, vagae. *Oculi* parui, lineas nouem a naribus diſtantes, *ſuperciliis* nudiuſculis, *Iride* pallido, *pupilla* nigra. *Spatium* roſtrum inter et oculos intermedium nigrum, rugoſum, nudum. *Collum* elongatum, pollicum quatuor cum dimidio, gracile, e gryſeo colore nigrum. *Mentum* nigricans punctulis albicantibus notatum. *Collum inferius* colore ſuperioris, at anterius interruptum faſciis transuerſis tribus, albis, diſtantibus, accedente quarta obſoleta. A baſi roſtri ad flexuram cubiti ſpatium intermedium eſt, pollicis cum quatuor lineis adaequans. *Dorſum*

viri

viridi-aureo colore ſplendens, ſimillimus illi, quem Galli *changeant* vocant, conuexum, vsque ad finem caudae 8 cum dimidio pollices longum. *Pectus* et *Abdomen* e fuſco nigricantia. *Remiges* viginti ſex, viridi et cyaneo colore, ſaturatius ſplendentes. *Tectrices* omnes coloris eiusdem. *Rectrices* duodecim aequales, colore dorſi, *vropygium* et *femoralia* colore abdominis. *Pars crurum plumis denudata* pollicis vnius et linearnm ſex, circulis notata. *Tibiae* pollicum 3 et linearum 2, inciſuris transuerſis per omnem ſui longitudinem interruptae. *Digitus anticus medius* longitudine pollicum duorum et lineae 1. vnguis illius linearum 4. *Digitus anticus extimus* cum vngue longit. poll. 2. et linear 2. Intimus pollicum 2. Anticus medius cum extimo cohaeret membrana vsque ad articulum primum producta, et cum intimo membrana ſimili, mox deficiente. *Poſticus* omnino ſolutus eſt. *Pedes* autem cum *vnguibus* colore nigerrimo praediti ſunt.

Iisdem cum *N. igneo* locis degit, iisdem cibis viſtitat, at volatu demiſſiore differt, et aëra, hirundinis ad inſtar, percurrit.

Non refragabor, ſi quis hanc Numeniorum bigam ad genus Tantali referre velit, nam ſecundum definitionem huic generi adplicatam *iugulari ſacco* eo omnino pertinet. Sed nondum perſpicio, an hic Tantalos a Numeniis ſufficienter diſtinguat.

XIV.

XIV.

ANAS *eritrocephala.* Tab. XX.

Ruth. Krasnogolowoi Nyrok.

(Красноголовой Нырокъ :)

	Ped.	Poll.	Lin
Longitudo auis ab extremo roſtro ad extremam caudam - - - -	1.	3.	10.
—— mandibulae ſuperioris a baſi frontis menſurata - - - - -	0.	1.	11.
—— —— a media fronte menſurata	0	2.	4.
—— —— a baſi temporum menſurata	0.	2.	1
—— mandibulae inferioris a baſi menti vsque ad extremum -	0.	2.	$1\frac{1}{2}$.
Diſtantia oculorum a baſi roſtri anteriore ad mediam frontem - -	0.	0.	17
—— —— a baſi roſtri poſteriore ad baſin frontis - - -	0.	1.	$0\frac{1}{2}$.
—— —— a baſi roſtri laterali ad baſin temporum - - -	0.	0.	$10\frac{3}{4}$.
—— inter oculos - - - -	0.	0.	$11\frac{4}{5}$.
Longitudo capitis ad nucham - - -	0.	2.	$10\frac{1}{2}$.
—— colli - - - - - - -	0.	4.	1. 0
—— pectoris vsque ad vropygium -	0.	8.	0. 0
Diameter latitudinalis abdominis - -	0.	4.	11 0
—— ab extremo collo ad flexuram cubiti - - - - - - -	0	3.	7. 0
Alae expanſae diſtant - - - -	1	6.	10.
Longitudo caudae - - - - - - -	0	2.	2.
—— femorum cruribus denudatorum	0	1.	10.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo digiti antici medii - - -	o.	2	6.
—— vnguis illius - - - - -	o.	o.	5.
—— digiti antici intimi - - -	o.	1.	9.
—— vnguis illius - - - -	o	o.	4.
—— digiti antici extimi - - -	o.	2.	3.
—— digiti poſtici - - - -	o.	o.	7.
—— vnguis illius - - - - -	o.	o.	$2\frac{1}{4}$.

DESCRIPTIO.

Roſtrum ad exortum duplici conuexitate, in, quam plumago frontis demittitur, ſenſim planum, baſi medio lateribus que nigrum, medio pallidum, vngue nigro, gibbo terminatum, *mandibula inferiore* faſcia candicante ad vtrumque ſulcum, duplici conuexitati ſuperioris reſpondentem. *Caput* turgidum. *Frons*, *tempora*, *vertex*, *occiput*, *collum* caſtaneo-ſplendentia, macula ſubtus ſordide alba ad baſin maxillae inferioris longitudine linearum duarum, diametro linearum 2. cum dimidia. *Pupilla* nigra. *Irides* coccineae. *Oculi* minimi linearum vix duarum. *Collum* contractum *Pectus* dilatatum, ſupra nigrum, anterius medio plumis rubicundis a collo excurrentibus, varium, infra quoque nigrum, ſed plumis poſterius fuſco et albo ciliatis. *Dorſum* cinereum, lineolis nigricantibus transuerſim vndatimque ſtriatum. *Abdomen* cinereo punctatum, et circinnatum. Regio *vropygii* profundius gryſea, circulis nigricantibus, hinc inde flaueſcentibus vndata. Regio pone illud e fuſco nigra. *Remiges* 24, primores 1-10, gryſeae apice

apice nigricantes 11 - 24 gryſeae, apice albicantes, punctis que albicantibus adſperſae, quae in vltimis ad vtrumque latus confertiſſimae, nigricantes euadunt. *Tectrices* corpori propriores, gryſeae, ſymmetrico ordine nigricantibus circulis vndatim ſtriatae, quo magis alis vicinae, e gryſeo-fuſcae, lineis que albicantibus transuerſis absque ordine notatae. Infra *Tectrices* omnes candicant. Plumae femora tegentes reſpondent veſtitricibus, corpori vicinis. *Cauda* breuiſſima, *rectricibus* 12, latere anteriore flaueſcentibus, duabus vtrinque extimis immaculatis. *Pedes* pallide incarnati. Faſcia ad ſingulos articulos nigricans. *Vngues* et *membrana* connectens nigra.

FEMINA differt, quod pectus cum capite et collo concolor ſit, nebuloſo ferrugineum illud intenſius, hoc dilutius. *Dorſum* fuſco cinereum. *Hypochondria* ferruginea, quae in mare alba.

Videtur Anas Fiſtularis BRISSON ord. 24 gen. 107. ſp. 21. eſſe, ſed deſcriptio ferinae, ad eam excitatae, quatenus in fauna ſuecica habetur, vix quadrat.

XV.

Tab. XXI.

ANAS *Kogolka.*

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius Auis - - - -	I.	6.	$2\frac{3}{4}$.
—— roſtri ab apice frontis vsque ad baſin extremam - - - -	o.	I.	$5\frac{1}{2}$.
—— —— a temporibus ad eandem baſin menſurata - - -	o.	I.	$7\frac{1}{2}$.
Peripheria roſtri - - - - - -	o.	o.	$9\frac{1}{2}$.
Longitudo maxillae inferioris a temporibus ad apicem - - - - -	o	I.	$6\frac{3}{4}$.
—— —— a baſi menti vsque ad extremum - - - - -	o.	I.	2. o
—— a frontis baſi anteriore vsque ad nucham - - - - - -	o.	2.	5. o
Diſtantia a baſi roſtri ad initium remigum - - - - - -	o.	2.	o. o
—— oculorum - - - -	o.	o.	$10\frac{1}{2}$.
—— roſtri ab oculis - - -	o.	o.	$9\frac{1}{4}$.
Peripheria oculorum - - - - - -	o.	o.	$3\frac{3}{4}$.
Diſtantia a baſi roſtri laterali ad nucham	o.	2.	o. o
Longitudo colli - - - - - -	o.	4.	$3\frac{3}{4}$. o
Diameter pectoris - - - - -	o.	3.	7. o
—— dorſi - - - - - -	o.	4.	4. o
Longitudo pectoris et dorſi - -	o.	6.	o. o
—— regionis vropygii - - -	o.	2.	o. o
—— Caudae - - - - -	o.	3.	8. o
Alae expanſae diſtant - - - -	I.	8.	4. o
—— Complicatae caudam extremam attingentes - - - -			

Lon-

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo femorum cruribus denudatorum vsque ad exortum digiti medii	o.	1.	$7\frac{1}{4}$.
—— digiti antici medii - - -	o.	1.	8. o
—— vnguis illius - - - -	o.	o.	5. o
—— digiti antici extimi - - -	o.	1.	$4\frac{1}{4}$.
—— vnguis illius - - - -	o.	o.	3. o
—— —— intimi - - - -	o.	1.	$2\frac{3}{4}$.
—— vnguis digiti antici intimi -	o.	o.	4.
—— digiti poſtici - - - -	o.	o.	$3\frac{1}{4}$.
—— vnguis illius - - - -	o.	o.	$2\frac{1}{2}$.

DESCRIPTIO.

Roſtrum medio conuexum, lateribus compreſſum, ſupra pallide violaceum, vngue gibbo, nigerrimo, infra pariter nigrum. *Linea* ad omnem illius baſin nigra, ſupra ad exortum frontis triangulum inaequilaterale formans. *Caput* tumidum, ſubcriſtatum. *Faſcia* alba ad *frontem* et *verticem* inter oculos, longitudine pollicis vnius cum lineis decem et dimidia, diametro linearum fere octo, maculis caſtaneis ad frontem frequentioribus varia. Reliquum *caput*, *collum ſuperius* et *inferius* cum *gula* ex ruſo caſtanea, temporibus punctis nigris, ad oſſa parietalia excurrentibus, adſperſis, oculorum orbita punctis maculisque ex nigricante et virideſcente colore ſplendentibus, et abhinc occiput verſus non nunquam conſpicuis, circumdata. *Irides* liuidae. Caput inferius medio a baſi maxillae inferioris vsque ad ſupremum collum pollicum trium ſeptemque linearum, ſpatio

e caſtaneo colore nigricat. *Collum ſuperius poſteriusque* et *dorſum* concolora, ex cinereo et nigricante transverſim vndatimque ſtriata. Pectus inferius antice caſtaneum, poſtice gryſeum. *Pectus* et *prolobi* cum *vropygio* dilute caſtanea. *Venter* niueus, criſſo nigro. *Remiges*, primores 10, fuſcae, latere poſteriore gryſeae, ſecundariae priores 8, excepta prima, primoribus reſpondentes, latere anteriore e viridi ſplendentes, eodem apice nigro terminatae, poſteriori gryſeae; ſubtus coloris eiusdem, quemadmodum ſecundariae. *Tectrices* corpori propiores, gryſeae; quae alas ſecundarias obuoluunt, niueae, apicibus nigerrimis ſplendentes; quae primores fuſcae, duabus prioribus infra candicantibus, punctisque et lineis gryſeis, confertis adſperſis; vltimis gryſeis, et ſimilibus punctis ad marginem, apicemque notatis. *Regio* ſubalaris et plumae femorales ex albicante et nigricante transuerſim et vndatim ſtriatae. *Rectrices* 14 gryſeae, ſubaequales, margine anteriore tantiſper albicantibus, duabus mediis, reliquis paulo longioribus, fuſcis; illis infra e diluto gryſeo colore candicantibus; his ſaturate gryſeis. *Tectrices* ex nigricante, gryſeo alboque colore variae. *Pedes* liuidi. *Vngues* nigricantes.

An ſufficienter ab A. Penelope diſtincta? Fere, dum haec ſcribo, conuenire nimium mihi videtur.

XVI.

ONOCROTALVS *Auctorum.*

PELECANVS *Onocrotalus* LIN.

Ruthenice бaбa.

DESCRIPTIO.

Mas eſt, quam dico, valde annoſa, magnae magnitudinis, anſerem tota corporis figura referens, ni ad roſtrum attendas, tardiore inceſſu, prolobosque propendente cygnum. *Roſtrum* habet rectum, flauum, dum liuidum in iunioribus eſſe ſolet, rubrumque in perfectis. *Mandibula ſuperior* in tres lamellas diſtincta, media ad frontem ſubrotunda, verſus apicem plana, ſenſim anguſtiore, cui ligula adunca, deorſum flexa, flauicans dura ac oſſea adnaſcitur; vtrinque ad hanc lamella lateralis, ad ligulam roſtri aduncam deficiens, ad mediam ſubrotundam rimam formans, quae nares fere obliteratas 1—10 pollicis, a plumagine frontis ſitas, recipit, non niſi membrana roſtri diducta in conſpectum venientes. *Subſtantia* roſtri cornea, leuiſſimae preſſioni cedens, *ligula* autem *adunca* robuſtiſſima, qua piſces lubricos comprimit, exanimatosque roſtri protenſo vnco ſaccatae gulae immittit. *Iris* e cinereo flaueſcens. *Pupilla* opalina coeruleſcens. *Plumago frontis*, parte, qua roſtrum attingit, cinerea, ea parte, qua medium roſtrum ſpectat, deficiens, nares verſus duobus veluti cornubus latius diffunditur *Mandibula*

dibula inferior 5 eminentiis linearibus quatuorque aequalibus intermediis ſpatiis ſecundum longitudinem excurrentibus inaequalis, aſpera, nec, vt in anſeribus, villoſa. Ita enim cauet natura, ne petita praeda, dum proiiciendo eam gulae admouere debet onocrotalus, elaberetur. Deficientibus eminentiis palati rima conſpicitur, et poſt hanc inter nares et oculos ad perpendiculum eminentia quaedam longa pollicem, acuminabus gibboſa: rima palati ad nares hiat, huius que ope ſaccum ſublingualem, adeo capacem, mandibulae inferiori ita adducit auis, vt ne vel minimum propendeat. Eadem rima raucori vocis inſeruit, clauſis enim mandibulis haec clamoſior euadit, et ad Aſinorum grunnitum accedit. *Mandibula* inferior ſuperiori tantillum breuior, tres circiter pollices a plumagine frontis remota capiti articulatur, inde diuaricata, non niſi 4 pollices in vnum coit, ibidem validiſſimo apice oſſeo donatur, interius eminet areola quaedam gibboſa, quam ſulcus ambit, areola autem illa reſpondet cauitati ligulae mandibulae ſuperioris, et adprehenſioni fortiori inſeruit. *Latera* mandibulae inferioris adaucta ſuperioris anguſtiora, et gulam verſus ſaccatam oblique ſubſtantiae corneae, introrſum extrorſumque flexilia. Huic mandibulae inferiori ab interiori parte ſaccus ſublingualis appenditur. *Saccus* ipſe validus, membranaceus, e multis venis a lingua ortis ortus, huicque lingua ipſa ſub oculis adcreta eſt, frenum autem retrorſum et verſus roſtri ligulam extenditur, tantamque ſacco elaſticitatem praebet,

vt

vt ſecundum neceſſitatem molem et magnitudinem praedae pro lubitu extendi et mandibulae adduci poſſit. Extendit autem Onocrotalus ſaccum hami adinſtar, et deglutit. Irata hominum manus pedesque ferire intendit, tuncque mandibulam ſuperiorem inferiori fortiter allidit, vt inſignis ſtrepitus oriatur.

A plumagine frontis ad nucham ſpatium eſt 3 et $\frac{2}{15}$ pollicum. Caput plane anſerinum ad frontem non nihil rotundatum, in vertice planum, verſus nucham latius adſurgens, ad oculos planum, mentum verſus oblique latius. Mentum ipſum latiſſimum, et ſi ſaccum propendentem exceperis, omnino planum. *Caput* et *collum* villis potius, quam plumis tecta. *Illud* compreſſum, oblongum, *ſcapis* pennarum fuſcis, *radio* denſo, albo, verſus apicem ſpectante. *Occiput* criſtatum. *Aures* freno oris ſitu parallelae, anſerinae. *Dorſum* in quibusdam cinereo-albidum, in aliis candidum. *Vropygium* album, *cauda* ſubrotunda, rectricibus 22. albis, lateribus fuſcis et ad apicem cinereis. *Remiges* 56. extimis maioribus, tertia longiſſima, ſcapis omnium atris, latere anteriore nigris, poſteriore albo nigroque dimidiatis, nigro praedominante. Vsque ad remigem octauam nigredo praeualet, latere adeo interiore, tum autem albus augetur color, vt mediae minores totae candidae euadant, et vltimae iterum maiores colore e fuſco cinereo tinguntur. *Tectrices* ſupra colore dorſi, infra candidae, neque vero in colore totius corporis conſtantia datur. Variat plurimum

 aetate

aetate Onocrotalus, variatque loco. Vidi in Caſtello *Nowopavlovsk* fere totos candidos et *Aſtrachaniae* vidi fuſcos, incarnatos, alios que ſcapulis ſplendentes nigris, vt plane certi determinem nihil. Sed adlegata coloris ratio omnium frequentiſſima occurrit. *Pedes* craſſi. *Femora* plumoſa. *Tibiae* nudae, vndique ſquamatae, *ſquamis* circularibus liuidis. *Digiti* membrana craſſa, inferne vltra dimidium vnguiculorum excurrente, plumbea, ſubtus que rubicunda inter ſe connexi. *Digiti* quatuor, ſcutis ſemicircularibus loricati, intimo minimo, ſecundo longiſſimo, quem magnitudine primus, hunc que tertius ſequitur. *Vngues* craſſi, viridiuſculi, ſpatulati. Lingua hac in aue ſingularem attentionem meretur. Adeo minuta eſt, vt impoſuerit multis Auctoribus, nullam habere. Scilicet ligulae tantum meretur nomen, vix enim vltra dimidium pollicem longa, cartilaginea apice deorſum flectitur, pollicem vnum a Laryngis rima remota, ad latera vtrinque *oſſi hyoidi* adnaſcitur, et intra illius deuaricata crura valida, vt vt tenui, expanditur membrana. Aldrouando elapſum eſt, carere medulla oſſa, ſed bene ea repleta inuenio.

Onocrotalus adſpectum hominum fugiens ſaepe in aquis deliteſcit, ſed in illis ad aliquod tantum temporis interuallum permanet. Vere lacus inſignes, hyeme mare redit, qui Tanain abit, nigrum, qui Wolgam, Caſpium, inter omnes lacus in toto terrarum orbe exiſtentes, maximum; venit autem, et reuertitur cum Ciconiis, Anſeribus, Gruibus,

bus, et Cygnis eodem tempore. *Femina* nidum ſtruit ex gramine arundinaceo, figura rotunda, latitudine diametrali, ſeſquipedali, concauo, mollibus graminibus impleto; nidum autem ſemper ſtruit ad inſulas lacuum et ceſpites muſcoſos, Ruthenis мундра dictos. Oua ponit alba, Cygni illis et magnitudine et numero plerumque reſpondentia, duo vt plurimum, tantum que temporis, vt Anſeres et Cygni excludendis illis inſumit. In nidos Femina aduentu hominum deturbata, oua ex illis excutit, in aquam deiicit, abeuntibus ſibi inimicis viſis oua, vndis immerſa, extenſo roſtro nidis denuo infert.

Piſcibus victitat, magnam eorum vim conſumit, in piſcatu Pelecani carbonis, Ruthenis бакланъ dicti auxilio opus habet. Onocrotalus expanſis alis agitat aquas, Carbo infra alis prouocat piſces, alis Onocrotalus illos ad littus pellit, pulſosque deuorat, carbone comite et *Gauia ridibunda maiore* ſaepe accedente, exoptatam talem praedam non reſpuente.

Ad tringinta libras Ruthenicas ponderat.

XVII.

STERNA *metopoleucos*.

Tab. XII. Fig. 1.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius auis ab extremo roſtro ad extremam caudam - - -	o.	8.	9.
—— roſtri - - - - - -	o.	1.	4.
—— a baſi mandibulae ſuperioris vsque ad oculos - - - - -	o.	o.	3.
Diſtantia inter oculos - - - -	o.	o.	8.

 Longi-

	Ped.	Poll	Lin.
Longitudo a baſi mandibulae ſuperioris ad flexuram cubiti - - - -	o.	2.	8.
—— caudae - - - - - - -	o.	2.	9.
Alae expanſae diſtant - - - -	o.	9.	6.
—— complicatae vltra caudam extenſae			
Circumferentia corporis aequalis - -	o.	4.	5.
Longitudo frontis albae - - -	o.	o.	5.
—— nigredinis a baſi frontis albae ad collum ſuperius et anterius - -	o.	1.	4.
—— ab extremitate colli ſuperioris ad finem dorſi - - - - - -	o.	3.	2.
—— femorum plumis obtectorum -	o.	1.	o.
—— pedum plumis denudatorum vsque ad exortum digitorum - -	o.	o.	11.
—— digiti antici medii - - - -	o.	o.	5.
—— vnguis illius - - - - -	o.	o.	3.
—— digiti antici intimi - - -	o.	o.	5.
—— vnguis illius - - - - -	o.	o.	1.
—— digiti antici extimi - - -	o.	o.	5.
—— vnguis illius - - - - -	o.	o.	1.
—— digiti antici poſtici cum vngue	o.	o.	1½.

DESCRIPTIO.

Ex hac dimenſione patet ad minores pertinere, et ſternas quidem habitu et volatu refert, neque proinde ob mandibulam ſuperiorem, apice decliuem, lateribus que adplanatam et nares antice latiores ſub laris militare puto. *Roſtrum* baſi rubrum, ab hinc flauum, extremitate nigrum. *Nares* diame-

diametro linearum duarum. *Lingua* ex lato principio ſenſim anguſtata, extremitate ſua bifida. *Frons* alba. *Tempora* nigra, vt omne *caput*, *collumque* ſuperius et anterius. *Dorſum* canum, immaculatum. *Cauda* forficata, niuea. *Prona pars* corporis a *mento* ad finem vropygii niue candidior. *Remiges* 26. 1 et 2 longiſſimis, fuſcis, latere poſteriori dimidiato albis, reliquis gradatim minoribus, eleganter cinereis, candore ad latus, poſterius in aliquibus ſuperſtite, ſubtus omnino niueis, praeſertim ſecundariis. *Tectrices* concolores. *Caudae* rectrices 12. niueae. *Oculi* mediocres. *Pupilla* nigra. *Iris* liuida. *Plumae* femorales niueae. *Pedes* crocei, graciles, tribus anterioribus membrana tenui inter ſe coniunctis, poſtico minimo ſoluto. *Vngues* incurui, nigri.

Ad aquas degit, piſciculis minoribus victitans, menſe Iunio nidificans, oua plerumque duo pariens, quibus per aliquot ſeptimanas incubat. Alte volat et velociſſime, vt difficulter explodatur, quin quod noſtra non obtigerim ſpecimina, niſi venator prius, ſternam hirundinem, quam agitabant, ipſius praedam auferre tentabant, exploſiſſet, et exploſam poſtea ſaepe in aëra proieciſſet, vt deciperentur volare humilius.

Femina a mari nec colore nec magnitudine differt. Vtrique vero indiſſolubiles ſocii.

Trans mare nigrum vere huc venit; primo autem centum verſtas a *Woronez* mihi viſus. Autumno redit.

XVIII.

Tab. XXII. Fig. 2.

LARVS *Atricilla*. An varietas?

Sterna caſpia Pall.

DESCRIPTIO.

Per omnia Atricillae auis ſimilis eſt, cuius Iconem exhibeo, *roſtro* quoque ſanguineo, *pedibus* que nigris. Differt autem *capite* nigro albo que maculato, et magnitudine multo minor conſpicuus eſt. *Dorſum* pariter canum; et *prona pars corporis* alba. Ad *Tſcherkask* tantum vrbem vidi.

XIX.

Tab. XXIII. Fig. 1.

TVRDVS *roſeus* LIN.

DESCRITPIO.

Magnitudine T. pilari aliquantum maior, craſſitie ipſi aequalis. *Roſtrum* pallide liuidum, tereticultratum, apice decliui terminatum, longitudine linearum nouem. *Maxilla inferior* ſuperiori tantillum breuior. *Nares* ouato-oblongae. *Caput* nigrum. *Collum* e fuſco-gryſeum, marginibus plumarum nigris. *Dorſum* ſanguineum, *gula* et *collum inferius* nigra. *Pectus* et *abdomen* ſanguinea. *Remiges* ib. fuſcae vnicolores, e *ſecundariis* vltimae latere anteriori viridi ſplendentes. *Tectrices* coloris eiusdem eodem que virore imbuti. *Rectrices* 12. nigrae. *Veſtitrices* albo ferrugineae. *Femora* plumis e fuſco-nigris obtecta. *Pedes* pallide rubri. *Digitus* poſterior

rior anticis longior. *Vngues* valde incurui, pallide fuſci, nitentes. *Pupillam* nigram habet, pallida vero ſunt *Iris* et *palpebrae.*

Femina a mare abludit colore pallidius ſanguineo magnitudine quoque ipſi paululum cedit.

XX.

ALAVDA *mutabilis.*

Tab. XXIII. Fig. 2.

DESCRIPTIO.

Ab imo roſtro ad finem caudae ſeptem pollices cum duabus lineis longa eſt; corporis autem circumferentia quinque fere lineis reſpondet. *Roſtrum* linearum 8, baſi albidum, apice nigricans, ſubulatum, craſſum, recta decliue, *mandibulis* ſubaequalibus. Tota auis atra, extremitatibus pennarum in *collo ſuperiore*, *dorſo*, et ad *caudam* albo cano que colore fimbriatis. *Frons* feminae, quae atra in mare eſt, ſimiliter cana. Sed in vtrisque *prona* pars corporis aterrima, et *regio* tantum ſubalaris rarioribus caneſcentibus pennis ſparſim obſita. *Remiges* 18 nigerrimae, apice obſolete fuſceſcentes. *Tectrices* eodem colore donatae. *Cauda* ſubforcipata rectricibus 12 nigris, extima vtrinque immaculata, reliquis apice canis. Pedes et digiti nigri. E tribus anterioribus *medius* cum vngue, lateralibus magnitudine aequalibus, longiori *vngue*. *Poſtici* rectiore, vnguibus omnium longiore. *Oculi* minuti, *Iride* et *pupilla* liuidis.

Atque

Atque haec facies auis eſt, dum ſub adultam aetatem deprehenditur. Iunior alaudinaceum prae ſe fert ordinem, toto corpore cinerea, vel et e cinereo rubicunda, quemadmodum icon dorſum ſupremum exprimit. Mutatio in atrum colorem fit pedetentim, vt ſpecimina poſſideam, tota gryſeo - rubra, duabus partibus gryſea, vna que atra, gryſeo nigro que dimidiata, alia aterrima. Icon tale habet, vbi auis vniuerſali nigredini proxima eſt. Sed feminae frons ſemper caneſcens.

Hyeme Aſtrachaniae frequentiſſima auis, in deſertis volitans, adpropinquante vere loca *Wolgae* ſuperiora gregatim petens.

XXI.

Tab. XXIII. Fig. 3.

EMBERIZA *leucocephalos.*

Roſtrum $\frac{9}{20}$ longum, conicum, paululum ad latera depreſſum, *mandibula ſuperiori* nigra, *inferiori* albente. *Pennae* circa roſtrum ſature caſtaneae ſiue rufae, in latam ſimilis coloris faſciam ſupra oculos continuatae, quae reflexa ſecundum inferiorem malarum marginem ad roſtrum redit, albas malas circulo ſuo includit, in gula torquis ſpeciem efficit. *Rufus* quoque ductus infra oculos conſpicuus. *Vertex* et *occiput* alba, pennis quibusdam ad verticem apice nigricantibus. *Album* hoc ad frontem regionemque ſyncipitis *ſpatium* ductu nigricante cinctum, faſciae rufae ſupra oculos contiguae. *Ceruix* dilute rufa, pennarum oris in

in quibusdam luteſcentibus, in aliis cinereſcentibus. *Dorſum* rufum, pennis ſingulis verſus apicem ſecundum ſcapum nigris. *Vropygium* et *pennae caudae incumbentes* rufa. *Pectoris ſumma pars* et *jubalaris regio* faſcia lata rufa, ad oras albente. *Reliquum pronum corpus* candidum, hinc inde conſpurcatum. *Cauda* forcipata $\frac{29}{10}$ poll. longa, rectricibus duodecim, quarum *octo intermediae* fuſcae, exteriores obſcurius, *duabus* vtrinque *extimis* verſus apicem macula lata alba notatis. *Alae* ab extrema cauda vnum et $\frac{3}{4}$ pollices deficientes. *Remiges* obſcure fuſcae, oris limborum anteriorum obſcure albentibus. Infimus alae nothae ordo nigricans, ad oras luteſcens, aut dilute rufus, cui reſpondent infimus *tectricium* ordo, ad oras faſcia dilute rufa cinctus, apice candido. *Tectrices* ſupremae anterius e fuſco cineraſcentes, poſterius fere totae rufae. *Pedes* et digiti incuruati. *Vngues* nigricantes, modice adunci, *vngue* poſterioris reliquis longiori fortiori, maxime adunco.

Longitudo auis ab extremo roſtro ad initium caudae tribus poll. et 3. lineis reſpondet.

Diſtantia alarum expanſarum decem pollicibus aequalis eſt.

Longitudo caudae pollicum circiter qnatuor: digiti poſterioris vnguis longitudine reliquos $\frac{3}{10}$ poll. ſuperat.

Medii anteriorum digitorum vnguis $\frac{2}{10}$ poll. vix attingit.

Pondus Ruthenicum auis $6\frac{1}{2}$. ſolotn. aequat. Habitat *Aſtrachaniae* in arundinetis. In ea, ad quam expreſſum fuit, occiput erat nigrum, coniunctioni faſciae frontem et ſynciput cingentis efformatum; ceterum nihil differebat. Figura auem naturali magnitudine ſiſtit etiam ad *Tanais* littora copioſiſſimam.

XXII.

Tab.XXIV. An ARDEA *Botaurus maior?*

BRISS. av. ord 17. g. 81. ſp. 28.

Dimenſio partium.

	Ped.	Poll	Lin.
Longitudo totius auis ab extremo roſtro ad extremos pedes - - - -	4.	6.	6.
—— —— —— Ad extremam caudam	3.	8.	0.
—— roſtri a baſi frontali menſurata	0.	5.	$4\frac{1}{2}$.
—— —— temporali - - - - -	0.	6.	3.
—— narium - - - - - - -	0.	0.	10.
Latitudo - - - - - -	0.	0.	$1\frac{1}{2}$.
Diſtantia inter eas - - - -	0.	0.	6.
Longitudo ab angulo poſteriore narium ad anteriorem oculorum - - -	0.	1.	3.
—— oculorum - - - - -	0.	0.	4.
Latitudo - - - - - -	0.	0.	4.
Diſtantia oculorum - - - -	0.	0.	10.
—— a baſi roſtri frontali ad flexuram cubiti - - - - - -	1.	11.	10.
Longitudo capitis - - - -	0.	4.	10

Lon-

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo colli - - - - -	0.	2.	5. 8
—— dorſi - - - - - -	0.	10.	8.
—— caudae - - - - -	0.	6.	10½.
Circumferentia capitis - - -	0.	5.	3.
—— colli infra caput menſurata - -	0.	3.	3.
—— —— ante inſertionem - -	0.	5.	10.
—— corporis - - - - -	1.	4.	7.
Diſtantia alarum expanſarum - -	4.	11.	2.
Longitudo femorum - - -	0.	9.	0.
—— tibiarum - - - -	0.	6	10.
—— digiti antici medii - - -	0.	5.	3.
—— vnguis illius - - - -	0.	1.	1.
—— —— intimi - - - -	0.	2.	10.
—— —— —— vnguis illius - -	0.	0.	11.
—— —— extimi - - - -	0.	4.	8.
—— —— vnguis illius - - -	0.	0.	10¼.
— Digiti poſtici - - - - -	0.	2.	1½.
—— —— vnguis illius - - - -	0.	1.	2½.

DESCTIPTIO.

Specioſa auis eſt, quam propono, dubitanter valde BRISSONIANAM denominationem meam faciens. *Roſtrum* cultratum, ſupra ſecundum morem huius generis *ſulco longitudinali* exaratum, flauum, *mandibula ſuperiore* medio fuſca. *Nares* lineares. *ſpatium* roſtrum inter et oculos nudum, luteum. Caput nigrum, pennis conſtans mollibus, longiuſculis, criſtae in ſpeciem propendentibus. *Tempora* flaua, baſi punctis nigris adſperſa. *Palpebrae* nudae, e caeruleo luteſcen-

 tes.

tes. *Iris* crocea. *Pupilla* nigra. *Caput inferius* niueum. *Plumae* ab eo intra commiſſuras mandibulae inferioris excurrentes, ſine maculis nigris, margine ferrugineis, interruptae. *Collum* gracile, elongatum, ad octo pollices et vltra caſtaneum, triplici faſcia nigra notatum, media latiore, poſtea vsque ad inſertionem gryſeochalybeum inferius itidem caſtaneum, maculis longitudinalibus nigris, et nigro alboque dimidiatis varium. *Dorſum* ſature cinereum, pennis vltimis longe productis, lateſcentibus, rubris, longiſſimis albo terminatis *Vropygium* gryſeo-fuſcum. *Corpus inferius* e nigro rubroque colore varium. *Remiges* 26. nigrae. *Tectrices* cinereae nonnullis apice flaueſcentibus. Margo alarum ferrugineus. *Rectrices* aequales, 12, remigibus concolores. *Tectrices* ſature gryſeae. *Femoralia* caſtanea. *Pedes* ſupra fuſci, infra rubicundi. *Digiti* ſupra fuſci, infra lutei. *Vngues* pallide fuſci, incurui, medio interius ſerrato, poſtico longiſſimo omnium maxime arcuato.

Cum congeneribus in arundinetis viuit, femina ponit oua tria, magnitudine gallinaceorum, glabra, immaculate viridia. Migratur Aſtrachaniae. Menſe Maio mihi obſeruata auis.

DE-

DESCRIPTIONES AVIVM.

Auctore

I. LEPECHIN.

d. 12. Nouembr. 1770.

Emberiza ſuperne rufa, ſubtus flaua, faſcia pectorali transuerſa ferruginea.

DIMENSIO.

Fringillam domeſticam adaequatur.

Longitudo ipſius ab apice roſtri ad caudae extremum - - - - - -	5″—10‴
Roſtrum longum eſt - - - - -	$4\frac{1}{2}$
Digitorum medius cum vngue - - - -	9
laterales multo ſunt breuiores.	
Extremitates alarum diſtant - - -	8 — 7
Alae complicatae vix tertiam caudae partem tegunt. Longitudo caudae - - -	2 — 3.

DESCRIPTIO.

Pulcra haec Emberizarum ſpecies roſtro donatur pallido cum tranſparente aliqua nigredine in dorſo mandibulae ſuperioris. Frons tegitur pennis nigricantibus, quarum nigredo adumbrat etiam capillitium. Occiput et nucha cum pennis interſcapularibus rufo reſplendent colore, vbi ſingulae pennae apex tenuiſſima cingitur canitie. Dorſum cum adiacente vropygio nuchae concolor, hoc cum diſcri-

 mine,

mine, quod memorata canicies in dorſo magis ſit conſpicua, et rachis quorundam pennarum lituris nigris tingatur. Scapulae alarum albae, ſecundus tectricum ordo conſtat pennis vexillo externo rufeſcente, cum albicante fimbria marginis, coſta vero eorum et vexillum internum nigricant, vnde macula in alis ſecundaria alba: reliquae tectrices dorſo propiores interſcapuleo concolores. Remiges primores fuſcae, albicante tenui fimbria exterius notatae; poſteriores remiges itidem fuſcae, aſt vexillum externum in illis maiori ex parte ferrugineum eſt. Genae atque gula nigrae, pectus cum abdomine flavum; ſed flauedo in pectore interrumpitur faſcia transverſa ſegmentum circuli efficiente, et ſeſe in hypochondria extendente, vnde hypochondria ferruginea quoque apparent. Tectrices ſubcaudales albae cauda parum forcipata, 12. conſtat rectricibus fuſcis, quarum duae extimae ſecundum vexillum internum longa tenia alba, longitudinali notantur. Pedes atque vngues ſordide albi. Haec eſt deſcriptio maris. vid. Tab. XXV. Fig. 1.

Foemina perfectiſſime cum mare conuenit, praeter quod in ipſa capillitium magis ſit nigrum et dorſalium pennarum margines maiori canitie gaudeant.

Habitat in pinetis circa Catharinopolin.

Alia Emberizae ſpecies confinia priori inhabitans loca diſtinguitur a congeneribus capite diuerſimode faſciato, corpore ſupra rufeſcente; pectore atque imo abdomine canis.

DI-

DIMENSIO.

Magnitudo Emberizae citrinellae.

Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum 6''-5'''
Longitudo roſtri - - - - - - $4\frac{1}{2}$
Longitudo digiti medii cum vngue - - 5
Laterales paulo breuiores.
Extremitates alarum explicatarum diſtant 8 - 6
Alae complicatae $\frac{1}{3}$ caudae attingunt.
Longitudo caudae - - - - - 2 - 4.

DESCRIPTIO.

Caput ornatur variis faſciis; medium occupat faſcia longitudinalis ſat lata, cana; ad latera capillitii vtrinque ducuntur faſciae nigrae, quae in occipite concurrunt et canitiem interſecant, vnde in collo poſteriori maculae duae canae conſpiciuntur; a naribus per oculos tranſit faſcia rufeſcens, genas occupat macula alba triangularis, cuius apex ab angulo ducitur oris; albam maculam excipit macula nigra eiusdem figurae occupans regionem temporum. Partes colli laterales gula atque collum anterius ferruginea. Pectus inſignitur macula magna alba triangulari, medium abdomen ex cinereo album, hypochondria atque latera abdominis rufa; interſcapulcum cum dorſo itidem rufum rachi pennarum nigricante. Vropygium ſupra rufum infra albicans. Tectrices alarum fuſcae, rufeſcente vndique margine. Remiges maiores nigricantes, per vexillum externum ex toto, per internum vero ad dimidium albido

bido fimbriatae. Remiges minores tectricibus concolores. Cauda parum forcipata 12 conſtant rectricibus, quae remigibus concolores ſunt, exceptis duabus vtrinque extimis, quae a medio ad apicem per vexillum internum albae, in vexillo externo vero a baſi ad medium albo fimbriatae. Roſtrum atque pedes ſordide albi, vngues nigricantes. Mas Tab. XXV. Fig. 2.

Foemina ſupra tota griſeo aut rufeſcente vario, rachi pennarum nigricante, ſubtus magis rufeſcens, ima abdominis regio ſordide alba, vropygium remiges rectricesque prouti in mare.

MOTACILLA ſuperne nigricans, torque albo interrupto, pectore atque abdomine ſuperiore croceis.

DIMENSIO.

Magnitudo motacillae Rubetrae.

Longitudo ipſius ab apice roſtri ad caudae extremum - - - -	4″–11‴
Longitudo roſtri - - - - -	4
Alae explicatae extremitatibus diſtant -	6 – 7
Compoſitae dimidiam fere caudam attingunt	
Longitudo caudae - - - -	1 – 10
Digitus medius cum vngue - - -	8
Laterales multo ſunt breuiores - - - - -	

DESCRIPTIO.

Roſtrum tenue nigrum, mandibula ſuperior paulo longior apice incurua vti in congeneribus. Vertex capitis, genae, gula atque collum anterius atra,

atra, Nucha quoque inſignitur nigredine a capillitio ad dorſum producta; partes laterales colli albae; qui color etiam ſumma hypochondriorum tenet. Pectus atque abdomen crocea, ſed in abdomine croceus color magis magisque diluitur ita vt ad pedes albidus ſit. Dorſum nigricans margine pennarum parum ruſeſcente. Scapulae alarum niueae, tectrices anteriores nigrae apicibus ex albido ruſeſcentibus. Remiges maiores fuſcae, minores nigricantes, omnes margine vexilli interni ad dimidium albo. Vropygium vtrinque niueum. Rectrices duodecim aequales nigrae exceptis vtrinque externis, quarum margo vexilli externi albicat. Pedes vnguesque nigri. Maſſ. Tab. XXV. Fig. 3.

Foemina ſupra fuſca marginibus pennarum ruſeſcentibus, macula alarum candida, gutture ſordide albo, pectore atque abdomine dilute ruſeſcente. Remiges rectricesque prouti in mare.

Rutheno nomine a voce Tſchecantſchiki (чеканчики) vocantur. Habitant in betuletis atque locis paludoſis.

STRIX

Nota: Maxima conuenientia eſt Motacillae noſtrae cum Rubetra luccouenſi Clariſſ. *Briſſon*, deſcripta in ipſius Ornithologia T. I. p. 432. N. 30. ſed in deſcriptione ſua Clariſſimus Autor nullam mentionem iniicit de pectore maris croceo atque collari albo interrupto. Hinc iure concludimus Motacillam noſtram aut prorſus non, aut imperfecte deſcriptam.

STRIX capite aurito, e gente ſua minima, corpore toto gryſeo, fuſco, ferrugineo, alboque vario.

Strigi Paſſerinae magnitudine multum cedit.

Longitudo ipſius ab apice roſtri ad caudae extremum - - - - - -	9″–4‴
Longitudo roſtri - - - - - -	6½
Alae explicatae extremitatibus diſtant -	1–4 –3
Complicatae extremum caudae attingunt	
Cauda longa eſt - - - - -	2 –6
Digitus medius cum vngue - - -	1 –2
Laterales ſunt breuiores.	

DESCRIPTIO.

Medium capillitii tegitur pennis ruſeſcentibus tenuiſſimis lineis fuſceſcentibus transuerſim ſtriatis; latera eiusdem albidiora ſunt, cinereo colore vndulata, quae permixtio colorum continuatur in aures ex 10 pennulis compoſitas. Spatium poſterius inter aures et occiput, quaſi faſciis candidioribus notatur; extremitates enim pennarum his in locis albicant. Interſcapuleum itidem ſe maiori albedine diſtinguit. Dorſum ſordide cinereum. Mediis in alis conſpiciuntur maculae albae, oblongae, piliformes, natae a tectricum alarum peſteriorum vexillo externo albo, nigro colore terminato. Remiges aut dilute, aut obſcure cinereis, punctis albidis faſcias imitantibus in vtroque vexillo diſtincti. Remigum extima ſerrata eſt. Oculos ambit circulus conſtans pennis decompoſitis cinereis. Circulum complectitur quaſi aſcia

faſcia albo nigro et rufeſcente varia a baſi auricularum ad pectus vsque producta , interrupta. Pectus atque abdomen ratione dorſi candidiora ſunt , vbi ſingula penna per album colorem riuulis transuerſis fuſcis notatur. Rachis omnium pennarum nigra eſt. Vropygium ſupra dorſo , infra abdomini concolor ; tectrices caudae inferiores albae duabus faſciis flauicantibus transuerſim interſtructae. Rectrices ſubaequales rufeſcentes faſciis et punctulis fuſcis notatae. Oculorum irides flauae. Pedes veſtiuntur pennis rufeſcentibus nigris lineolis adumbratis. Roſtrum , pedes vnguesque ſordidi. Obſeruata eſt circa Catharinopolin. Tab. XXVI. Fig. 1.

CYPRINVS Corpore aliuaceo maculis fuſcis diſtincto, ima corporis parte Cinnabarina pinna ani radiis ſeptem.

Pinna dorſi radiis - -	8
pectoral. - - -	14
ventral. - - - -	8
caudae - - -	19
ani - - -	7
Longitudo totius - - - -	3″—
capitis - - - -	6 —
Diſtantia ab apice roſtri ad oculum -	2
inter nares et oculum - -	½
ad pinnas pectoral.	—7
ad apertur. branchiar. ſuper.	—6½
ad pinnam dorſi	1—5
ad pinnas ventrales -	1—2

Diſtantia ad pinnam ani - - -	1—6
ad caudae initium -	2—7
Longitudo pinnarum pectoralium - -	—5
ventralium - -	—3½
Ani - - -	—5
Dorſi - - -	—6
Caudae - - -	—5
Craſſities capitis linea circulari per oculos ducta - - - - - -	$1''-1'''$
ad aperturam branchiarum	1 —5
pone pinnas ventrales -	1 —6
ad initium pinnae dorſal.	1 —6
ad exortum caudae - -	—6.

DESCRIPTIO.

Caput breue fere conicum, cuius vertex nigricat, oculi lateraliter ſiti iride argentea, pupilla atra. Ab angulo oris infra oculum vsque ad regionem auditus ducitur macula alba ſat lata fere lunaris. Operculi branchioſtegi vltimum officulum argenteo colore reſplendet, vnde in operculo macula trapezoides argentea: reliquae capitis partes atrae. Rictus anguſtus, mandibula inferior paulo breuior ſuperiore, extus colore ſanguineo imbuta, qui ſanguineus color occupat etiam marginem mandibulae ſuperioris ab oris angulo ad medium. Maxillae faucium quatuor denticulis ſetaceis vna ſerie poſitis armantur. Dorſum ab initio vltra cranii planum eleuatum, ad caudam vero decliue linea fuſca notatum: latera piſcis olivacea, ad aperturam branchiarum obſcuriora vbique macu-

maculis fuſcis rotundatis temere notata. Linea lateralis incurua et abdomini propior vt in congeneribus. Venter et tota ima corporis pars pulcherrimo cinnabarino colore imbuta eſt. Squamae valde exiguae, rotundatae, tenaciter corpori adhaerentes. Radii pinnarum omnes apice ramoſi. Pinnarum baſis cinnabarina, apex fuſcus, medium albicans, ſed cauda bifurca et pinna dorſi quadrangula excipiuntur; in his enim baſis nigra, reliqua pars albicans punctulis nigris adſperſa. Tab. XXVI. Fig. 2. 3. Pulcra haec cyprinorum ſpecies habitat in riuis ſcopuloſis circa Catharinopolin.

Rutheno nomine vocatur Galian, (Галïанъ) deriuatione mihi incerta. Et Miles (Солдатъ) ob rubrum colorem. Gratam conſtituit eſcam ſole torrefacta vna cum Peskany, Песканы cyprinus gobio, et Piſcaſoby, (Пискачобы) cobitis barbatula.

Nota: Ichthyotomiam huius piſcis non neceſſariam putaui, dum fere nullum diſcrimen ratione partium internarum in omni Cyprinorum familia obſeruatur. Id ſolum monendum habeo, quod variis e gente Cyprinorum ſpeciebus ſub examen reuocatis, obſeruauerim, nullam conſtantiorem notam ad diſtinguendas ſpecies dari, quam, ordinem, numerum et figuram dentium, qui in faucibus horum piſcium reperiuntur; et ſi obſeruationes exterarum ſpecierum per has notas inſtituentur, credo fore, vt haec confuſa atque non ſat determinata piſcium gens clarior et ſtabilita euadat.

DESCRIPTIO
CYPRINI RVTILI,
QVEM HALAWEL RVSSI VOCANT, HISTORICO-ANATOMICA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

d. 3. Decembris 1770.

Cyprinus (*rutilus*) pinna ani radiis 12 rubicunda Lin. Syſt. Nat. ed. 10. p. 324. n. 16. Fn. Suec. 329.

Cyprinus iride, pinnis ventris ac ani plerumque rubentibus. Art. gen. 3. Syn. 10. Spec. 10. Gron. muſ. 1. n. 8. Act. vpſ. 1741. p. 74. n. 51 et 52.

Brama. Klein. piſc. N°. 5. Tab. XIII. fig. 2.

Corpus ab oris extremo ad pinnae dorſi principium vsque ſenſim aſcendit, hinc vero ad eiusdem pinnae baſin notabiliter deſcendit, iſtaque deſcenſione, minus quidem, quam antea, obſeruabili, ad caudae pinnam vsque pergit. Ab eodem quoque termino idem pinnas ventrales verſus deſcendit, hincque recto curſu anum petit; inde autem iuxta ani pinnam, ſub aſcenſione maxime notabili, ad eius finem

finem vsque procedit, viaque tandem rectilinea ad caudae pinnam excurrit. Dorſum ab initio latum ac conuexum, pinnam ſuam verſus, ſub aucta magis conuexitate, ſenſim in anguſtius contrahitur, pone hanc vero denuo lateſcit, ita quidem, vt ipſius latitudo ad caudae pinnam vsque ſenſim ſenſimque decreſcat, conuexitas autem mediocris ac ſibi vndique aequalis ſit. Abdomen infra pinnas pectorales ac inter pinnas ventrales et anum parum contractum ac ſubconuexum, ante pinnas ventrales planum, inter pinnae ani finem vero pinnaeque caudae principium denuo ſubconuexum.

Color totius corporis argenteus, pallide aureo mixtus; dorſum quidem, pro varia ad ſpectatorem directione, vel argenteo aureum, vel ſubfuſcum. Iris oculorum ex argenteo deaurata, ſuperne macula nigricante, a lateribus autem punctis ſimilibus notata. Latera capitis in aureum magis vergunt, quam ipſe truncus. Prona capitis regio ſubfuſca. Abdomen pallide carneum. Pinnae pectorales ſubcinereae, pauciſſimo rubro colore admixto. Pinna dorſi cineracea. Pinnae ventrales ex ſanguineo purpuraſcentes; eodemque colore etiam ani et caudae pinna, ſed minus ſaturato, tincta eſt.

Prona capitis ſuperficies ſubconuexa, glaberrima absque omni carina eminente. Nares amplae.

Squamae magnae, ſtriatae, ſubquadrangulae. Maximae omnium in trunci fere medio ad vtrumque latus, 6''' latae, $6\frac{1}{2}$''' longae, margine antico

ſiue

ſiue tecto, diuerſimode crenato ac ſinuato, poſtico circulari ac integerrimo.

Linea longitudinalis, ſub angulo operculi branchiarum poſtico, eodemque ſuperiore, ad 3 lin. diſtantiam, oriunda, ab initio ſtatim ad pinnarum ventralium regionem vsque deſcendit, inde infra dorſi pinnam in rectum ſenſim flectitur, circa ani pinnam vero ſenſim aſcendit, iterumque recto tramite ad finem vsque excurrit, toto ſuo decurſu, ſi initium eius excipias, imo ventri propior, quam dorſi ſummo.

Pinna dorſi radiorum vndecim, quorum primus 2 lin. longus, omnium breuiſſimus, ſecundus 1 poll. 2 lin. longus, tertius ac praecipue quartus omnium longiſſimi, reliqui vero ex ordine breuiores; ceterum primi tres ſimplices, ac ſibi inuicem arcte appreſſi; reliqui omnes ramoſi; vltimus bipartitus.

Pinnae pectorales radiorum octodecim; quorum primus fortiſſimus, et ſecundo tertioque, longiſſimis, paullo breuior.

Pinnae ventrales radiorum decem: primus horum ſecundo, cui arcte appreſſus eſt, plus dimidiam partem breuior, ſimplex; ſecundus omnium fortiſſimus, itidemque ſimplex, tertio paullo breuior; ceteri a tertio, qui longiſſimus omnium eſt, ad vltimum vsque ramoſi et ex ordine iterum breviores.

Pinna

Pinna ani radiorum tredecim, quorum primus 3 lin. longus, omnium breuiſſimus, ſecundus 1 poll. longus, tertius ac praecipue quartus longiſſimi omnium; reliqui vero ex ordine iterum breuiores; caeterum, vt in dorſi pinna, primi tres ſimplices, ac ſibi inuicem arcte appreſſi; reliqui omnes ramoſi; vltimus bipartitus.

Pinna caudae radiorum circiter triginta, ab vtriusque lateris octauo ad intimum vsque ramoſorum.

Principium pinnae dorſi principio pinnarum ventralium paullo poſterius eſt, finis autem pinnae dorſi ano ex diametro opponitur.

OBS. Pinnis huius Cyprini, pectoralibus praeſertim, Lerneam viuentem, albidam frequenter adhaerere vidi, abdomine quaſi annulato, ſubcylindraceo, tentaculisque tribus inſtructam, binis ſcil. praedae affixis, tertio ſolitario, diſſito, liberoque, quae, cum in hunc vsque diem incognita plane mihi viſa fuerit ſpecies, breuiter hic deſcripta, ac naturali magnitudine declineata traditur. Vid. Tab. XXVI. Fig. 4.

ANATOME.

Hepar in varios lobos grandiores diuiſum. Lobus anterior longiſſimus, inter ventriculum, duodenum et reflexam inteſtimi partem ſitus, a principio ſuo, quo ex hepatis maſſa egreditur tenuiſſimo, ad angulum iſtius flexurae vsque, deſcendendo ſenſim increſcit. Lobus dexter, ventriculo ac duodeno ſub-

iacens; anteriore paullo craſſior eſt, ac ſub eadem flexura terminatur.

Siniſter lobus latiſſimus, concauitate ſua, reflexam inteſtini partem reſpiciente, lienis portionem dimidiam anguſtiorem, eamque ſuperiorem, amplectitur, dextro, maſſula mediante hepatica, per ſiniſtram ventriculi faciem transuerſim extenſa, annexus. Praeterea ſub mox memorata lienis portione tenue quoddam hepaticae ſubſtantiae ſtratum conſpicitur, ſiniſtro lobo hinc inde cohaerens; ipſum vero hepatis corpus mole admodum paruum. Veſicula fellis, inter hoc ipſum, eiusdemque dextrum lobum ſita, oblonga, collo ſuperius terminatur breviſſimo, quod ductus hepaticus, a dextra hepatis portione deſcendens, ſubit. Collum hoc, in ingreſſu ad ventriculum parum inflexum, ſub diuerticuli ſatis ampli, valuulisque interius vndique intertexti ſpecie ductum perbreuem largitur choledochum, Flatu in ductum hepaticum immiſſo non tantum ipſa fellis veſicula intumeſcebat, ſed ſimul etiam ductus choledochus bullas aereas in ventriculi cauum eructabat.

Lien longiſſimus, 3 circiter pollicum, extremitate ſua ſuperiore, eaque tenuiore, ſub hepatis ſumma ac concaua facie partim deliteſcit, partim inferiore maiore ac ſubtriquetra ampliori veſicae aereae ventri incumbit.

Ab oeſophago ad duodeni reflexum, qui vnius circiter pollicis ab ano diſtantia incipit, vnus canalis rectus eſt, inde vero ad hepatis diuiſuram vsque reuerti-

reuertitur inteſtinum, iterumque abhinc deflexum, recta via anum petit. Ipſe ventriculus, inteſtini reflexum verſus, ſenſim anguſtior fit, ac a duodeno et pyloro non multum diſtinguitur. Hoc diſſecto, ductus choledochi oſtium, quod circumcirca flauo bilis colore tinctum eſt, 9 linearum diſtantia ab eius ſummitate, ſub papillae forma eminet.

In inferiore ventriculi parte, inprimis autem in duodeni reflexu, vermes ſedecim, illis, quorum in deſcriptione Coregoni Lauareti iam facta eſt mentio, ſimillimos, albentes, lineari oblongos ac planiuſculos, inteſtini tunicis adhuc inhaerentes deprehendi. Caput eorum oblongum, ſubdiaphanum ac denticulis durioribus, vel nudo oculo conſpiciendis, ſcabrum; collum capite anguſtius ac breue; truncus ipſe autem figurae turbinatae, vel lineari oblongus, rugisque circularibus diſtinctus erat. Si eiusmodi vermis caput exporrectum, quod proboſcidis vſum ei praeſtare olim dixeram, microſcopii ope inſpicias, totum aculeis validis recuruis ac vere oſſeis horridum videbis, quibus extractionem eius tentanti fortiter reſiſtunt. Extrahere nihilominus hos omnes, quotquot erant, poteram absque capitis ipſorum iactura; contrarium tamen aliis, quos in variis Cyprinis et in Coregono Lauareto olim inueni, ſaepius accidiſſe. indicium ex parte iam factum eſt. Magnitudinis autem ac formae ſunt admodum diverſae, nec color omnibus ſemper idem: inter viginti ſc. eiusmodi vermes, quibus Cyprinum id. *Linn.*

 Syſt.

Syſt. Nat. ed. 10. p. 324. n. 17. ſimili loco infeſtatum vidi, plures octo lineas longos, lineares, ſubteretes, glaberrimos, ac a praeterfluente bile, quaſi gummigutta tinctos fuiſſe, ex manuſcripto mihi conſtat, cum alii vel diuerſae progeniei, iidemque aetate ſine dubio minus prouecti, $1\frac{1}{2}$ tantum vel 2 lineas longi, plus minusue turbinati, in rugas contracti ac albidi eſſent. Dum viuunt hi *acanthocephali*, quo diſtincto nomine hoc animalium genus appellare liceat, aculeatam corporis extremitatem ſimili plane mechaniſmo, quo ſerpentes penem, ac limaces cornicula ſua, pro lubitu modo exſerere, modo reducere valent Vid. Tab. XXVI. Fig. 5. Sed redeo ad vlteriorem Cyprini noſtri anatomen:

Veſica aerea eiusdem plane figurae, quae huic piſcium generi propria eſt, duobus ſcil. ventribus conſtat, altero antico, minore, ſubſtantiae firmioris et craſſioris, altero poſtico, maiore, tenuioris magisque tendinoſae fabricae, ductuque pneumatico inſtructo. Diſſecto ſecundum longitudinem poſteriore, diſtincte apparet, fibras ipſius longitudinales, tendinoſas, albentes, oſtium verſus vtrique commune excurrere, ac $2\frac{1}{2}$ lin. diſtantia ab eodem euaneſcere, in circulum omnes collectas. Harum actio procul dubio in eo conſiſtit, vt, ſi idem, ad aerem contentum in ductum expellendum, ſe contrahat, inſita ipſarum vi ſtringant quaſi ac occludant commune illud oſtium, ne aer in receptaculum anterius, ad quod patentior longe via eſt, retrocedat. Ductus

pneu-

pneumaticus in poſticum oeſophagi latus, proxime ad diaphragma, inſeritur, ac orificio ſuo ad imas fauces hiat. Hoc, primo quidem adſpectu, ſatis largum, aerem tamen ex oeſophago afflatum non admittit, licet eum, ex ipſo ductu impulſum, ſub bullarum forma facile eructet. Recte autem, ad aditum aeri, aquae vel cibis praecludendum, ſatis denſo ac valuuloſo lacunisque variis imperuiis, ad duas vsque lineas extenſis, cautum eſt.

Lactes valde tenues. Renum potior pars ſub thorace, ſeu caput inter ac apophyſin iſtam, cui anticus veſicae aereae venter, ligamenti fortiſſimi ope, annectitur, ſita eſt; infra hoc iidem latiores facti, et circa abdominis medium in monticulum quaſi eleuati ſunt, inde vero ad ipſorum extremitatem vsque, veſicae vrinariae fundo contiguam, in anguſtius ſenſim coeunt. Veſica vrinaria ouata, vrethra ampliſſima, patente inſtructa.

MENSVRA.

	Poll.	Lin. paris.
Longitudo tota, ſcil. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	1'. 2''	3.
Ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	11.	10.
—— —— —— ad oculi medium - -	1.	$\frac{1}{3}$.
—— —— —— ad marginem operc. branch. poſticum - - -	2.	11.

	Poll.	Lin. Paris.
Ab oris extremo ad principium pinnarum pectoralium - - - - - - -	3.	3
—— —— —— ventralium - - -	6.	4.
—— —— —— —— ani - - - -	6.	7.
—— —— —— ad anum - - -	8.	9.
Longitudo pinnarum pectoralium - -	8.	5.
—— —— —— ventralium - - - -	2.	5.
—— —— pinnae dorſi, ad baſin - -	2.	1.
—— —— —— radiorum longiorum -	1.	6.
—— —— pinnae ani, ad baſin - - -	2.	2.
—— —— —— radiorum longiorum - -	1.	6.
—— —— pinnae caudae, ſc. ab eius principio ad longiorum radiorum	1.	10.
apices - - - - - -	3.	1.
—— —— radiorum longiorum - - -	—	10.
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad - - - - - -	—	7.
Diameter oculi horizontalis - - -	—	$6\frac{1}{2}$.
—— —— perpendicularis - - -	—	6.
Diſtantia inter primi pinnae pectoralis radii baſin et primum pinnae ventralis radium - - - - - - -	3.	3.
—— —— primi pinnae ventralis primique pinnae ani radii baſin - -	2.	7.
—— —— vltimi pinnae dorſi radii baſin et primum pinnae caudae radium	3.	3.
—— —— vltimi pinnae ani radii baſin et primum pinnae caudae radium	1.	6.

Lati-

	Poll. Paris.	Lin.
Latitudo horizontalis per oculorum axes	1.	4.
—— —— per poſticum opere branch. marginem - - - -	1.	6.
—— —— ad principium pinnae dorſi -	1.	3.
—— —— —— —— pinnae caudae	—	5.
Latitudo perpendicularis per oculi medium	1.	9.
—— —— —— —— per principium pectoralium - -	2.	10.
—— —— —— —— pinnae dorſi - -	3.	3.
—— —— —— —— pinnarum ventralium	3.	2.
—— —— —— —— pinnae ani - -	2.	10.
—— —— —— per pinnae ani finem - -	1.	10.
—— —— —— —— caudae principium	1.	6.

Explicatio Figurarum.

Tab. XXVI. Fig. 4. Lernea corpore ſubcylindraceo, annulato; brachiis ſeu tentaculis tribus.

a. Pinnae affixa vna.

b. *c.* *d.* *e* } Solutae aliae, variae magnitudinis ac formae

Tab. XXVI. Fig. 5. Acanthocephalus, vermium nouum genus, in inteſtinis piſcium reperiundum.

a. inteſtini tunicis inhaerens.

b. inde detractus.

c. idem magnitudine aucta expoſitus.

d. alius, (*a*) longe maior, ex Cyprino Id. *Linn.*

DE-

DESCRIPTIO.

PISCIS, E COREGONORVM GENERE, RVSSICE *SIG* (СИГЪ) VOCATI, HISTORICO-ANATOMICA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

d. 10. Decembris 1770.

Salmo (*Lauaretus*) maxilla ſuperiore longiore, radiis pinnae dorſi quatuordecim *Linn.* Syſt. Nat. ed. 10. p. 310. n. 14. Fn. Suec. 312. Act. Stockh. 1753. p. 195.

Coregonus maxilla ſuperiore longiore, pinna dorſi oſſiculorum 14. Art. gen. 10. Syn. 19. ſpec. 37.

Albula nobilis Gesn. piſc. 33.

Albula nobilis maior. Schoenſ. ichth. 12. Ionſt. piſc. t. 46. f. 1. Rai. piſc. 60. 61.

Lauaretus allobrogum. Will. ichth. 183.

Caput pro corporis ratione non magnum, ad latera compreſſum, circa verticem angulum obtuſum, ſecundum eius longitudinem excurrentem, efformabat, vix niſi tactu percipiendum. Ab occipite dorſum ſtatim notabiliter eleuabatur, ad pinnae dor-

dorſualis principium vsque, ipſiusque margo, quo propior huic erat, eo acutior fiebat; margo autem inter pinnam dorſi primam et ſecundam plane convexus, inter hanc et caudam fere planus erat. Sic quoque latitudo corporis a pinnae dorſualis primae principio ad caudam vsque iterum decreſcebat. Decreſcentia tamen iſta inter anticum et poſticum vtriusque pinnae dorſualis marginem potior erat. Margo abdominis a mento ad quatuor vsque pollices retroſecus eleuabatur, inde ad marginem baſis pinnae ani poſticum vsque ſenſim decreſcebat, hinc vero, ſub angulo valde obtuſo eandem deſerens, linea magis recta in caudam excurrebat. Idem etiam abdominis margo pinnas pectorales ac ventrales inter leuiſſime conuexus, circa ventralium inſertionem planus, inter has et anum notabiliter convexus, inter ani pinnam vero caudamque fere planus erat. Venter ab anteriore pinnarum pectoralium regione ad pinnas ventrales vsque ſatis latus erat, pone has vero ipſius latitudo ad corporis extremitatem vsque ſenſim ſenſimque decreſcebat.

Color dorſi, ſi piſcem a cauda caput verſus, et parum oblique inſpexeris, ex coeruleo nigricans, inuerſa autem ratione ex viridi fuſcus apparebat. Latera corporis infra lineam longitudinalem ſub omni adſpectu e pallide caeruleo argentea erant. Oris extremitas, regio capitis ſuperior, et pinnae, praeſertim dorſuales ac caudae, in nigricantem inclinabant; Facies vero corporis inferior vndique alba.

Iris oculorum argentea, ſupra pupillam coeruleo-nigricante colore leuiter tincta. Vertex capitis ſatis pellucidus. Cutis pone oculos et circa ambitum operculi branchiarum ſuperiorem pallide deaurata. Mandibula ſuperior, oſſe mobili conſtructa, inferiorem duarum linearum longitudine ſuperabat, faciemque anteriorem offerebat retuſam. Rictus oris reſpectu corporis anguſtus.

Limbus maxillae ſuperioris denticulorum minutiſſimorum ac viſu vix percipiendorum ſerie, quorum numerum octonum circiter eſſe deprehendi, erat inſtructus, paribusque etiam, aſt longe pluribus lingua faucesque armatae.

Opercula branchiarum laminis oſſeis quatuor conſtabant: ſuperiore ſ. prima circulari, ſecunda obſolete triangula, tertia quaſi cultrata ſiue ſubfalcata, et quarta triangulari cum acumine anteriora verſus ſpectante. Oſſicula membranae branchioſtegae octo.

Squamae mediocres, ouales, integerrimae ac glaberrimae; caput et branchiarum opercula iis carent.

Linea longitudinalis, primae ſ. ſuperiori operculi branchiarum laminae e diametro oppoſita, ſquamulisque XCVII, leuiter emarginatis, conflata, recta via excurrebat, dorſo tamen, quam ventri, propior.

Pinna dorſi prima, ex incano nigricans, radiorum quatuodecim; quorum primus omnium breviſſimus, ſecundus et tertius iſto paulo longiores, ſimpli-

ſimplices; ceteri a quarto, omnium longiſſimo, ad vltimum vsque, ex ordine iterum breuiores ac ramoſi.

Pinna dorſi ſecunda, radiis deſtituta, adipoſa, figurae quodammodo falcatae, poſticos ipſius margines verſus extenuata valde, ac ad $3\frac{1}{3}$ lin. vsque libera. Per huius pinnulae ſubſtantiam puncta innumera nigricantia erant diſperſa, qualia etiam in reliquis pinnis et omnibus ſquamis, ſi ventrales exceperis, obueniebant.

Pinnae pectorales ex incano albicantes, radiorum quindecim. Primus horum ſequenti breuior ac fortior, ſimplex; ceteri omnes apicibus ramoſi.

Pinnae ventrales albicantes, circa apices autem et in ſuperficie potiſſimum exteriore ex coeruleo nigricantes, radiorum duodecim vel tredecim; quorum 1 et 2 omnium breuiſſimi ac ſimplices, ceterorum omnium apices ramoſi.

Pinna ani pallida ad baſin, circa radiorum maiorum extremitates vero e coeruleo nigricans, radiorum ſedecim vel ſeptendecim; horum 1, 2, 3 breuiſſimi ac ſimplices, 4, 5 et 6 longiſſimi omnium et cum reliquis ramoſi.

Pinna caudae ex incano nigricans, bifurca, 32 circiter radiis compoſita, quorum primi ſ. extimi breuiſſimi, plures inſequentium ex ordine longiores, ceteri vero, in medio conſtituti, ad formandam bifurcationem ex ordine iterum breuiores; ſimplices

1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 tam ex ſuperiorum, quam ex inferiorum extimis; reliqui valde ramoſi.

Magna horum piſcium, cucumeres redolentium, copia quotannis in Newa fluuio capitur.

ANATOME (*a*).

Diſſecto abdomine hepar ſtatim ſub adſpectum veniebat, diaphragmatis ſuperficiei inferiori contiguum, in regione pinnarum pectoralium ſitum, coloris pallidioris, quam huic viſceri alias proprium eſt, a ſumma ipſius conuexitate ad marginem inferiorem, quo inteſtinula ſiue ſic dictas appendices lambit, 6‴ longum; in ſiniſtro autem latere maxima eiusdem portio, ſub poſticam ventriculi faciem reflexa, ad pollicem vsque extendebatur.

Appendices ventriculi ſ. potius pylori infra hepatis marginem conſpiciendae, et ad 11 lin. vsque deorſum extenſae, totum transuerſum abdominis ambitum occupabant, ſubſtantia pinguedinea, qua, praeſertim inferiora verſus, inter ſe ex parte erant conne-

(*a*) Notandum hic, viſcerum deſcriptionem e. g. ratione faciei ſuperioris et inferioris, vel anticae ac poſticae alicuius partis ex piſce elaboratam eſſe dorſo incumbente; hinc id, quod ſub hoc ſitu eſt ſuperius, in prono cadavere inferius erit. Vbi vero ſermo eſt de dextro et ſiniſtro latere vel hypochondrio, pronum piſcis ſitum ſ. naturalem intelligas, quamuis reliquae denominationes ad ſupinum factae ſint.

connexae, interſtrata. Eadem pinguedo, coloris e pallide rubello albicantis, ac 2 poll. 3 lin infra hepatis marginem et circa ventriculi flexuram in vnam confluens maſſam, ſatis latam craſſamque, continuo tractu vtrumque replebat hypochondrium, ventriculi parte denudata tantummodo a ſe inuicem ſeiuncta. Potior pinguedineae huius ſubſtantiae pars circa coſtam decimam octauam inciſura quadam erat notata, ſub qua lienis profunde rubentis extremitas triangulari ſub forma apparuit, lobo triquetro ſenſim attenuato, et ſuper veſicam aeream recta protenſo, circa coſtam vigeſimam ſextam terminata.

In dextro latere, ſeptem circiter linearum diſtantia a mox memorato liene, infra fines appendicum, quintam inter ac decimam coſtam, maſſula quaedam ex atro rubens, figurae quaſi lanceolatae ſ. ellipticae, 1 poll. 1 lin. longa, 3 lin. circiter lata, ſubconuexa, extremitate ſuperiore obtuſa, inferiore attenuata occurrebat, partim tractu illo pinguedineo dextro obtecta, partim conuexitate ſua peritoneo obuerſa, quam lienis pariter vices gerere ſuaſit non tantum ſubſtantia et color, ſed etiam ipſius nexus cum liene inferiore, de quo mox ſermo erit, ope vaſis ſanguinei maioris, quod ex ſummitate huius ortum, infra lateris interni medium ei inſerebatur.

In ſiniſtro latere viſcus quoddam albicans, ſubſtantiae firmioris, 2 poll. 4 lin. longum, 8 lin. in medio latum, inter tertiam ac decimam ſextam coſtam ſitum erat, facie exteriore peritoneum, in-

teriore tractum pinguedineum ſiniſtrum reſpiciens. Viſcus hoc, quod lactium vnam eſſe comperi, latitudine ſua inferiora verſus ſenſim decreſcebat, ipſiusque margines leuiter attenuati erant.

Ad partes, quae diſſecto abdomine viſui ſtatim ſeſe obtulere, tubus inteſtinalis quoque pertinet, iuxta latus dextrum recto itinere ad anum vsque decurrens. Emerſit ſc. hic infra lienem ſuperiorem, et tam ſupra quam infra tractum ſibi annexum habuit pinguedineum; ſuperior horum circa coſtam vigeſimam quartam, proxime inferiorem, finiebatur, hic autem auerſam inteſtini partem, ad anum vsque, inueſtiebat, aduerſa plane nuda relicta.

Remotis dextri lateris appendicibus, leuiterque eleuato liene primum dicto, quem medium nuncupabo, mox in conſpectum veniebat tertius lien, huic, ſitu inter quartam et decimam coſtam, contiguus, 1 poll. 4 lin. longus, 4 lin. in medio latus, figurae itaque valde oblongae vel lanceolatae. Superficies ipſius ſuperior ſubconuexa erat, nullique partium adiacentium adhaerebat, ſuperne appendicibus, inferne medio liene, obtecta, inferior autem, ſi ſummitatem eius omnino liberam exceperis, cum pinguedine ſubſtrata appendicibusque ſubiacentibus arcto nexu erat coniuncta. Ipſe autem hic lien vaſe mediante ſanguineo, cum medio cohaerebat. Videmus itaque, tres diſtinctos huic piſci a natura datos eſſe lienes, variae magnitudinis ac formae; id quod ſingulare omnino et notatu digniſſimum eſt. Sed plura

ra adhuc ſuperſunt, quae non minorem merentur attentionem.

In eodem latere, dextro nempe hypochondrio, abſcondita iacebat lactium altera, alteri, niſi quod latior paulo et craſſior fuerit, plane ſimilis, vix, niſi prius partes ipſi ſuperincumbentes remoueantur, conſpicienda, appendicibus ſc. inteſtini tractu et pinguedine, huic adnata, facile tota contecta. Haec ratione figurae et ſitus cum illa ſiniſtri lateris fere conueniebat, longitudine autem, cum ſub hepate diaphragmati iam contigua, et circa vigeſimam demum coſtam terminata eſſet, eandem ſuperabat. Vtraeque margine ſuo poſtico, membranae ope, angulo affixae, quem veſicae aereae cum hypochondriis connexus efformat. Binae aliae lactes, quas ſuccenturiatas vocare placet, eiusdem coloris ac ſubſtantiae, magnitudine tamen prioribus longe cedentes, inteſtini recti extremitatem circumdabant, quarum dextri lateris vna altera ſiniſtri paulo maior erat. Vaſa vtriusque lactium generis ſpermatica, ſub poſtica ipſarum ſuperficie decurrentia, veſicaeque aereae membranulae ope adnexa, ſub inteſtini recti extremitate ad angulum acutum inter ſe coibant.

Infra lienem infimum iuxtaque inteſtini tractum diſtentae veſicae aereae pars in conſpectu erat, per cuius tunicam valde pellucidam vermes nouem filiformes, pollice plus minusue longiores, internae eius ſuperficiei agglutinati, translucebant.

Hepar

Hepar in ſuprema abdominis parte tranſuerſum ſitum, indiuiſum ac tota dextra parte ſubtus concauum. Veſicula fellis ſatis ampla, in dextro magis latere, quam in medio, collocata, pyloro ſeu potius duodeni principio, lactiumque dextrae flauo bilis colore tinctae, contigua, 6''' longa, 4''' lata, figurae oualis, pariter, ac illud, tranſuerſa. Ductus choledochus ex ſiniſtra huius extremitate ſub angulo acuto ortus, ſatis capax, ac inter ſiniſtram hepatis partem et appendices pylori poſteriores decurrens.

Separata omni ab oeſophago et ventriculo pinguedine, comperi, iſtum ad huius fundum incurvari, eidemque ſub angulo valde acuto iungi, ita, vt ſitum inter ſe haberent fere parallelum. Oeſophagi collapſi, teneriorisque ſubſtantiae, maxima latitudo in diſtantia 10 lin. ab inferiore ipſius extremitate 7 lin. aequabat; ipſe autem ventriculus teres, ac oeſophago, ſi fundum tenuiorem excipias, longe ſolidior, 1 poll. 7 lin. longus, 5 lin. latus, craſſitiei fere vbique aequalis, ac ſub directione parum obliqua in pylorum leuiter contractus. Duodenum, ſubſtantiae tenerioris, principio tenui primum et arcuato ex pyloro ortum, ſenſim vero ſenſimque amplius factum diaphragma verſus reflectebatur, ad duos pollices ſuae longitudinis vsque, appendicibus numeroſiſſimis, inferius circumcirca, ſuperius alteri tantum ipſius lateri appenſis auctum. Numerum earum 219 fuiſſe comperi, omniumque

oſcula

oſcula ad duodeni cauum hiare, ſuccumque, pancreatico forte ſimillimum in idem transfundere, cuiuis iam patet. Reliquus inteſtini tractus, ſubſtantiae membranaceae, tenacioris, a duodeno ad anum vsque, curſum fere rectilineum tenebat. Obſeruationes, quas diſſectio totius inteſtinorum canalis, muco albicante ac tenaci valde repleti, mihi ſuppeditauit, ſequentes ſunt: interior ſc. oeſophagi ſuperficies iugis quinque, valuuloſis, rectis ac longitudinalibus inſtructa, valuula pylori, ab relaxata tunica ventriculi interiore oriunda, limbum efformabat aequalem, circularem, ac $\frac{1}{2}$ lin. latum. Oſtium ductus choledochi, in ora appendicis cuiusdam, quatuor circiter linearum a pylori valuula interuallo, conſpiciendum. Rectum, proprie ſic dictum, proxima inteſtini parte paulo amplius, rugis innumeris transuerſis notatum.

Vermes praeterea non omittendi ſunt turbinati, ab $\frac{1}{2}$ lin. ad $2\frac{1}{2}$ lin. longi, et $\frac{1}{3}$ lin. lati, coloris vel ruſſi vel ex albido flaueſcentis, rugisque circularibus vndique diſtincti, quorum non exigua copia totum inteſtinorum canalem, inprimis vero rectum inhabitabat, in quo ad 80 facile numerare mihi licuerat. Muco partim ſupra dicto libere eos innatare, partim pedunculi vel proboſcidis ope, quam e craſſiore corporis extremitate pro lubitu vel propellere, vel penitus reducere poſſunt, inteſtini tunicis adeo arcte inhaerere vidi, vt, dum eorum nonnullos vi inde auellere conabar, ſaepius eam abruptam

 relin-

relinquerent. Pleniorem huius vermis hiſtoriam in deſcriptione piſcis, Cyprini rutili, *Linn.* quem Ruſſi *Halawel* vocant, tradere mihi conſtitutum eſt. Veſica aerea ſimplex, magna, verſus inferiora anguſtior, ſuperiora verſus amplior, et ab abdominis lateribus, cui interſtrato vtrinque pinguedinis tractu cohaeret, facile ſeparabilis. Summitas ipſius coarctata primum, iterumque, circa coſtam ſextam, leuiter ampliata, dextrorſum deorſumque flectebatur, et hac ipſa flexura in ductum aereum, penna columbina craſſiorem ac in oeſophagi cauum patentem deſinebat.

Renes in vnum corpus coaliti, longiſſimi, ad diaphragmatis baſin latiori principio orti, et ad extremitatem ipſorum acuminatam vsque, quae veſicae vrinariae fundo obuerſa eſt, ſenſim anguſtiores facti.

Vreteres, ex huius viſceris medio enati, duo, quorum vnus, ſubſtantia eius euolutus, in ſiniſtro, alter, eadem vndique obtectus, in dextro renum latere decurrit, veſicae vrinariae fundo inſerebantur.

Veſica vrinaria ellipticae figurae, ſub aſcenſu obliquo, in vrethram patentiſſimi oris excurrens.

Peritoneum argentei coloris, punctis nigricantibus rarioribus adſperſum.

Coſtae 37. vertebrae in vniuerſum 62. 35 ſc. dorſi, et 27 caudae.

MEN-

MENSVRA.

	Poll.	Lin pariſ.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinn. caudae long. - -	1′, 1	4
Ab oris extremo ad oculi medium - -	—	10
—— —— —— ad angulum operc. branch. poſticum - - - - - - - - -	2	3
—— —— —— ad pinnas pectorales - -	2	3
—— —— —— ad pinnam dorſi primam	5	6
—— —— —— ad pinnam dorſi ſecundam	9	9
—— —— —— ad pinnas ventrales -	6	
—— —— —— ad pinnae ani principium	9	3
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	1	8
—— —— pinnae dorſi primae, ad baſin,	1	4½
—— —— —— —— radiorum longiorum	1	9
—— —— —— ſecundae - - - - -	—	10
—— —— pinnarum ventralium - - -	1	8
—— —— pinnae ani, ad baſin, - - -	1	5
—— —— pinnae caudae tota - - -	1	9
—— —— —— —— radiorum, ad bifurcationem, - - - - - -	—	6
A fine fixo pinnae dorſ. primae ad pinnae dorſ. ſecundae princ. - - - - -	3	
—— libero pinnae dorſ. ſecundae ad caudae extremum - - - - - - - -	2	8
—— —— —— —— ad pinnae caudae principium - - - - - -	—	11
A principio pinnarum pect. ad principium pinnarum ventral. - - - - - - -	4	
—— —— —— ventralium ad anum - -	3	

	Poll.	Lin. pariſ.
A fine fixo pinnae ani ad pinnae caudae principium - - - - - - -	1	2
Diameter oculi - - - - - - -	—	$5\frac{1}{3}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes	—	9
—— —— —— —— inter pinn. dorſ. prim. et pinn. pect. - - - - - - - -	1	3
—— —— —— —— inter extremos margines principii pinn. ventr. - - - -	1	
—— —— —— —— ad pinnae caudae principium - - - - - - -	—	$4\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium	1	2
—— —— —— —— —— princ. pinn. pect.	2	3
—— —— —— —— —— princ. pinn. dorſ. primae - - - - - - - - - -	3	2
—— —— —— —— —— princ. pinn. ani	1	11
—— —— —— —— —— princ. pinn. caudae	—	$10\frac{1}{2}$

DE

DE LEONE OBSERVATIONES ANATOMICAE

Auctore

C. F. WOLFF.

d. 23. Maii 1771.

In eos ſtructurae characteres praecipue inquiſiui, quibus ſingularia huius animalis attributa maxime deberi videbantur. Muſculos ideo cubiti notaui et humeri muſculos ad pectus ſitos, quorum nempe actionibus maximam vim Leo exſerere dicitur. Deinde neruos extremitatis anterioris. Denique viſcera quoque thoracis et abdominis, quorum ſtructura non modo ad robur corporis multum conferre, ſed rationem quoque exhibere viſa eſt, vnde ſingularis, quae in hoc animali obſeruatur, alacritas et audacia aliquo modo intelligi poſſint.

Remota cute thoracis, muſculus pectoralis, qui pectorali maiori humano reſpondet, (minor enim deficit) in conſpectum venit. In eo iam non nulla notabilia occurrunt. Ex quatuor plane diſtinctis portionibus ille conſtat, quarum prima, quae reliquis ſuperſtrata eſt, a manubrio ſterni et a latere ſterni ad quintam circiter coſtam vſque, deinde a peculiari ligamento quodam originem ſuam ducit. Ligamentum

Muſculus pectoralis.

Eius portio exterior (fig. 1. *h. h.*) **T. XXVII.**

tum hoc ſummo apici ſterni firmiter adhaeret, indeque ſurſum ad aliquot pollices continuatur et producitur ex fibris tendineis horum pectoralium vtriusque lateris ipſis, in illo loco concurrentibus, ſibique inuicem intertextis, quemadmodum ex fibris trapeziorum ligamentum nuchae efficitur. Hac ſtructura, dum punctum fixum extenditur et fibrarum quoque copia augetur, vis muſculi increſcit et nullum tamen motui colli impedimentum producitur, quod fieret ſi ſternum oſſeum ſurſum magis extenderetur. Fibrae huius portionis conuergendo ad latus thoracis verſus os humeri decurrunt et muſculum paulo anguſtiorem et ſatis fortem conſtituunt, qui in varias minores portiones muſculoſo membranoſas, vt triceps femoris, diffinditur, iisque in ſpinam humeri, quae a tubere maiori deſcendit, ſe inſinuat, partemque occupat oſſis humeri dimidiam inferiorem, dum fibrae infimae huius portionis ad condylum humeri externum, tanquam locum, ab hypomochlio remotiſſimum vsque decurrunt; vnde patet, inſertionem huius muſculi ita comparatam eſſe, vt maximum effectum exſerere poſſit; cum in homine idem muſculus prope extremitatem ſuperiorem ſeſe inſerat, ibique exiguam tantummodo partem occupet.

Portio ſuperior (fig. 1. *i.*) T. XXVII.

Altera pectoralis portio, ſuperior, aliqua ſui parte priori ſubſtrata, oritur a ligamento ſupradicto, a manubrio ſterni et a parte ſterni, quae primae coſtae reſpondet. Inde fibris parallelis verſus humerum decurrit et ſimili modo, vt prior portio, in partes muſculoſo-membranoſas diuiditur, quibus mediam oſſis humeri partem

partem in eadem ſpina occupat, adeo, vt fibrae ſuperiores ad extremitatem ſuperiorem fere attingant, inferiores autem retro portionem primam ad aliquod ſpatium deſcendant cum eaque in eandem ſpinae partem inferantur, quemadmodum ſimilem ſtructuram quoque in inſertione tricipitis femoris in homine obſeruamus. Tertia portio, inferior, a ſterni parte inferiore oritur, quae ſextae et ſeptimae coſtae reſpondet; atque inde fibris craſſioribus muſculoſis verſus os humeri adſcendit, retro priores portiones tranſit et in partem ſuperiorem oſſis humeri, ad baſin tuberculi maioris vsque, inſeritur. Denique quarta portio, infima*, a linea alba abdominis originem ducit et cum fibris muſculi deſcendentis connexa eſt vsque ad marginem coſtarum ſpuriarum. Ibi ab illis ſecedit et verſus humerum adſcendit, abitque in longum gracilem muſculum, qui coniunctus denique cum fibris portionis inferioris in eandem tuberis baſin inſeritur.

Portio inferior (*k.*)

Portio abdominalis (*l.*)

Totum igitur os humeri ab extremitate ſua ſuperiori vsque ad inferiorem ab hoc muſculo pectorali comprehenditur; cum exiguum tantum, vix duorum pollicum, haud procul ab extremitate ſuperiori oſſis humeri, ſpatium in homine ſit, quod inſertione pectoralis maioris occupatur; vbi tamen notandum, os humeri in leone, vt in reliquis fere animalibus, craſſius et robuſtius, ſed breuius quoque eſſe pro portione animalis, quam in homine. Hinc functio muſculi intelligetur. In eo quidem conuenit cum pectorali humano, vt brachium verſus thora-

Vſus muſculi pectoralis.

thoracem adducat. Differt autem in eo, vt motus iſte adductorius in leone minor ſit quoad diſtantiam, ſed longe validior, et maior quoad vim, qua motus peragitur. Ipſa enim illa inſertio ad extremitatem inferiorem efficit, vt neque abduci brachium a thorace, neque adduci ad eundem eo vsque poſſit quam in homine, vbi inſertio hypomochlio propior maiorem arcum decribere ſinit extremitatem brachii inferiorem. Sed eadem inſertio cauſa ſimul eſt, vt motus ille minor cum vi, eo maiori, exerceatur, quod facile intelligitur. Generatim ita muſculorum in leone fabricam comparatam eſſe obſeruaui, vt motus minus accurati minusque completi et pauciores quoque, quam in homine, motus, ſed longe validiores, per eos exerceri poſſint. Denique muſculus pectoralis alligando praecipue humero ad thoracem inſeruit, quo mobilior cubitus in motibus ſuis maiorem firmitatem acquirat. Caeterum ſuperiores portiones muſculi humerum ſurſum ſimul inferiores deorſum trahere poſſe, ſi ſeiunctim agant, facile patet.

Structura huius muſculi in fele.

In fele ſimilem fere huius muſculi ſtructuram inueni, ſed tertia circiter pars oſſis humeri inferior ab inſertione eiusdem libera manet. Minor ergo, quam leoni, ſed maior, quam homini, vis inde feli reſultat.

Pectorali alius muſculus incumbit, qui ad flexores cubiti pertinet. Hos autem non ſatis intelligemus omnes, niſi ſingularis quidam, et, quantum ſcio,

ſcio, proprius leoni, muſculus, magnus erector cervici, antea innotuerit.

Hic muſculus ab oſſe occipitis et ligamento nuchae originem ſuam ducit. Inde flectendo ſeſe ex parte colli poſteriori verſus anteriorem et deſcendendo ſimul verſus humerum in enormem maſſam carneam cylindricam excreſcit, quae vtrinque ad collum duo quaſi alia colla acceſſoria referri videtur. Nam ſi totum collum in quatuor partes aequales diuiſeris, duae earum exteriores a ſolis fere his musculis efficiuntur. Fibrae, dum circa collum flectuntur, diuergunt; in parte vero anteriori et prope humerum in planitiem magis expanduntur cum in parte colli laterali perfecte cylindricam figuram effecerint. Inſertio muſculi ſingularis eſt. Abeunt enim fibrae eius, quae exteriores ſunt et ſuperficiem tenent in lineam quandam debilem albam tendineam, quae transuerſaliter fere et ductu ſerpentino ſuper caput oſſis humeri in facie eius anteriori decurrit. (fig. 1. *e.*) Haec linea formatur a fibris erectoris huius magni ceruicis et a fibris, quibus alter flexorum cubiti oritur. Vtriusque muſculi fibrae carneae ſunt, et nonniſi in ipſa linea, quae tenuis eſt, albeſcunt, adeo vt linea obliterata hinc inde videatur. Perfecte ſimilis eadem eſt inſcriptionibus tendineis muſculi recti abdominis, niſi vt etiam debilior ſit illis. Fibrae erectoris profundiores, in ſpecie quae in media musculi parte ſitae ſunt, in clauiculam inſeruntur, ex qua itidem flexoris quoque fibrae profundae enaſcuntur,

Magnus erector ceruicis (fig. 1. *d.*)

dum laterales vtriusque muſculi fibrae, ſiue profundae, ſiue ſuperficiales fuerint, ſola linea illa alba intermedia coniunguntur. Clauicula, quam dixi, magis quam humana curuata eſt et ſimplicem arcum figura refert. Extremitas anterior tenuior, ſubcylindrica, capitulo paruo inſtructa, poſterior, ſeu exterior, plana et lata eſt. Totius oſſiculi longitudo ad arcum maiorem tribus pollicibus octoque lineis, latitudo maxima ſeptem lineis aequalis eſt. Adeoque diametrum capitis oſſis humeri, cui incumbit, longitudine ſua non excedit. Nulli oſſi per ligamenta vel per articulationem adnectitur ſed inter muſculos dictos flexorem cubiti et erectorem ceruicis, quaſi ſuſpenſa haeret, in eorumque carne adeo ſepulta eſt, vt niſi muſculi diſſecentur, eius externe nullum veſtigium appareat. In fele eandem fere clauiculae rationem inueni reſpectu figurae, ſitus et connexionis; ſed paulo minor haec pro portione animalis, quam in leone viſa eſt.

Analogia erectoris magni.

Dixi proprium hunc muſculum eſſe leoni, non, quod nihil eſſet in aliis animalibus vel etiam in homine, quod ei reſponderet, nam datur omnino in ipſo homine aliquid eius analogi, ſit ideo, quod hoc analogum a muſculo leonis adeo tamen differt, vt eidem vſui inſeruire non poſſit. In fele loco vaſtiſſimi cylindrici muſculi, qui circa collum quaſi torquetur, tres dantur tenues nec latae ſed longae laminae muſculares a ligamento nuchae ortae, quarum duae interiores cum alia portione, a ſterno orta,

orta, in ventrem flexoris cubiti abeunt, cuius illae totidem capita referunt, exterior autem in aponevroticam vaginam humeri inſeritur. In homine facile patet, reſpondere erectori leonis partem ſuperiorem ceruicalem trapezii, quae ab oſſe occipitis et ligamento nuchae orta in partem poſteriorem clauiculae inſeritur, quae portio aeque, ac felis muſculi, ab illo leonis muſculo figurae inſertionis et muneris reſpectu differt. Trapezios generatim ſoli homini proprios eſſe puto.

Vſus huius muſculi varius eſt. Primaria actio in erectione ceruicis conſiſtit. Sed notabile eſt, magnum hunc muſculum eo munere nunquam fungi poſſe, niſi in auxilium ſimul vocentur et flexor ille cubiti, quocum, nullo oſſe fixo intercedente, coniunctus eſt, et ipſe anconeus magnus. Nam clavicula, quae inter erectorem ceruicis et flexorem cubiti ſuſpenſa mobilis haeret, nullum illi punctum fixum ſuppeditare poteſt. Hoc igitur a muſculo flexore praeſtari debet. Sed hoc ipſum fieri non poteſt, niſi cubitus, vnde porro flexorem ſuam firmitatem petere oportet, ope anconei magni fixus prius redditus fuerit. Quum vero os humeri quoque et ſcapulam fixa eſſe oporteat, vt vlna firmari et anconeus agere poſſit; facile patet, ad vnam erectionem ceruicis omnes fere muſculos extremitatum anteriorum ſimul concurrere debere, et illum motum ceruicis ſine motu extremitatum exerceri non poſſe. Quae ſane fabrica haud apta eſt multis diuerſis et deter- Vſus eiusdem.

determinatis motibus exercendis; nam ad paucas ea ratione compoſitas actiones redibunt, quascunque leo omnibus ſui corporis muſculis efficere poteſt; ſed eo aptior quoque ea fabrica inde euadit maximis viribus exſerendis, vti continuo patebit.

Actiones ſpecialiores. Rugitus. Dilaceratio.

Si alter horum muſculorum agit, caput ad latus oppoſitum reiicitur et in eo ſitu tenetur. Sic leo plerumque dum incedit, caput gerere ſolet, et peculiari igitur muſculo leonis haec propria eidem actio debetur. Si ambo muſculi ſimul agunt, collum rigeſcit et caput eleuatur. Eam actionem leo exſerit, dum rugit. Denique eadem actione et toto muſculorum ſuperius dicterum apparatu vtitur, dum aliquid dilacerat aut diſrumpit. Vngulis enim et dentibus dum leo praedam arripit, pedibus, adeoque vi anconei magni hanc ad ſolum deprimit, erectore autem ceruicis partem, dentibus prehenſam, ſurſum ducit, qua actione vix eſſe exiſtimo, quod non disrumpere aut diffringere poſſit, et quam etiam inter omnes, quas exſerere poteſt, validiſſimam eſſe credo. Nam bini hi muſculi erector ceruicis et anconeus magnus, praecipue hic poſterior, qui erectorem vi longe praecellit, ſine dubio robuſtiſſimi ſunt inter omnes, quos in corpore leonis inuenias. Praeterea ita quoque compoſiti ſunt hi muſculi, vt ex ipſa compoſitionis ratione ſingulari modo aliquod illis virium augmentum accedat. Dum enim punctum fixum erectoris magni ceruicis ſoli flexoris cubiti et praecipue anconei magni actioni innititur; hoc pun-

punctum fixum eo firmius reddetur, quo magis, quoque validius anconeus magnus agit. Quo magis igitur praeda ad ſolum deprimitur ope anconei, eo validius erector agere, partemque dentibus comprehenſam ſurſum contra abripere poterit. Imo cum punctum illud, quod fixum dicitur, clauicula nempe et tota linea alba mobiles ſint; dum anconeus vlnam extendit, dumque flexor ſimul vlnae agit, punctum fixum erectoris deorſum trahetur et a ceruice et capite, tanquam puncto mobili magis remouebitur. Quodſi nunc erectorem ſimul in actione verſari poſueris, quo minus ſe extendi, punctumque fixum a mobili remoueri ſinat; patet, ipſo anconeo, quo praeda verſus ſolum deprimitur, ceruicem ſimul et caput, cuius inter maxillas pars altera praedae tenetur, retrorſum duci, adeoque vim erectoris augeri, quod ſane fieri non poſſet, ſi clauicula fixa eſſet. Quantum igitur haec fabrica in leone minus apta eſt humana fabrica ad varios multiplicesque motus inſtituendos, tantum quoque aptior eſt eadem ad ſummas in vnica ſaltem actione vires exſerendas. Etiam hoc notabile eſt in illa dilacerationis actione quod aliquatenus ſpontanea ſit et mechanica. Dum enim leo, facto in praedam ſaltu, pedibus anterioribus eam deprimit, dentibusque ſimul arripit, eo ipſo quoque ceruix cum parte, dentibus praehenſa, et neceſſario, ſurſum retrahitur. Neque improbabile eſt, erectorem, dum anconeus magnus vlnam, eiusque ſimul flexorem extendit, ea actione laceſſiri atque adeo per modum irritationis ad actio-

 nem

nem perduci, quo eo magis efficitur, vt actio erectoris ceruicis cum actione anconei magni neceſſario coniuncta ſit. Sic vno igitur eodemque momento et eadem actione qua praeda capitur, eadem quoque dilacerabitur.

Flexor cubiti pectoralis. (fig. 1. g.)

Muſculus, quem incumbere dixi pectorali, flexor cubiti pectoralis, originem ducit a ligamento manubrii ſterni, porro a manubrio ipſo et a parte laterali ſterni, cui prima et ſecunda coſta reſpondent. Oritur, vt ſolent muſculi, a ſterni latere orti, fibris tendineis breuiſſimis abitque in muſculum planum qui fibris longis, ſenſim conuergentibus ad latus thoracis ſuper mediam portionem pectoralis verſus brachium decurrit, et in regione flexurae cubiti tandem tendinem producit breuem teretem, quo cum ſimili tendine flexoris deltoidei coniungitur et in faciem anteriorem radii inſeritur ad angulum, ſemirecto maiorem. Vſus eſt flectere antibrachium.

Vſus eiusdem.

In homine nullus muſculus reperitur, qui ortus a thorace ad cubitum vsque pertingeret. In ſcapulum tranſeunt, os thoraci proximum, qui inde oriuntur, vel ſaltim ad humerum perueniunt. Cubitum nullus eorum attingit. Qui autem in cubitum inſeruntur, vel ab humero, oſſe proxime praecedente, vel a ſcapula ſaltim ortum petunt. Sed facile patet, quid ſingulari hac fabrica efficiatur. Qui muſculi, vti flexores in homine, vel ab oſſe humeri vel a margine cauitatis glenoideae et ab

apo-

apophyſi coracoidea ſcapulae oriuntur, paralleli decurrunt oſſi humeri cubitoque extenſo, in eumque inſeruntur ad angulum omnium acutiſſimum; vnde cubitum nonniſi cum maxima difficultate mouere poſſunt in qua difficultate ſuperanda magna pars virium conſumitur. Si vero a ſterno flexor cubiti aduenit, in radium extenſum impingit ad angulum, ſi brachium thoraci parallelum teneatur multo maiorem ſemirecto et fere perpendicularis. Tum nulla ergo difficultas ſuperanda eſt et omnis vis muſculi ad mouendum antibrachium immediate adhibetur. Longe ergo aptior ad vires exſerendas haec fabrica in leone quam in homine eſt. Sed patet ſimul, quo maiori cum vi motus ille in leone exercetur, eo minus hunc motum fore completum. Nam nonniſi eo vsque muſculus cubitum flectere poterit, donec punctum inſertionis cum puncto muſculi fixo et hypomochlio in vnam lineam rectam contingat et angulus inſertionis euanuerit; id quod fiet, quando cubitus cum oſſe humeri angulum efficit, praeter propter aequalem angulo inſertionis. Quo igitur hic angulus inſertionis maior eſt, eo minus cubitus flecti poterit. Maxima flexio fiet, ſi muſculus flexor vti in homine vel ab oſſe humeri, vel, quod etiam praeſtat, a margine cauitatis glenoideae et proceſſu coracoideo ortus radio extenſo parallelus inſeratur, nullumque cum eodem vel minimum angulum efficiat. Sed non modo hic flexor pectoralis ipſe cubitum vltra angulum, angulo inſertionis aequalem, flectere non poteſt, ſed impedit quoque,

dum

dum agit, quo minus reliqui flexores, ab humero vel a ſcapula orti, vltra eundem angulum cubitum flectere poſſint. Quamprimum enim hoc factum eſt, flexor pectoralis retrahere cubitum conatur. Varias ergo ob cauſas haec ſtructura incommoda eſt, ſi ad varietatem motuum inde pendentium eorumque perfectionem reſpicias; aptiſſima contra, ſi ad gradum virium, muſculo exſerendarum, quem ſcilicet ſolum in hoc animale finem fuiſſe cognoſcimus, attenderis.

Analogia. In fele ſimilis flexor pectoralis exiſtit ſed multo tenuior et longior pro portione animalis. Si fabricam humanam pro norma conſtituere velis, ad quam reliqua animalia comparentur, hunc flexorem cubiti tanquam portionem pectoralis maioris conſiderare oportet. Nam pectoralis in leone, humano maiori reſpondens, ad extremitatem inferiorem humeri vsque ſe extendit. Haec ergo eius portio paulo vlterius ad radium vsque progreditur.

Flexor deltoideus (fig. 1. *f*) Secundus flexor cubiti deltoideus eſt idemque muſculus, in quem erector magnus ceruicis intermedia linea alba finitur, cuiusque in ſuperioribus mentionem iam feci. Oritur ergo hic flexor a dicta linea alba et a clauicula, quae in media parte lineae albae ſepulta in carne horum muſculorum haeret. Inde eius fibrae ad faciem anteriorem oſſis humeri conuergendo decurrunt, adeo vt variae earum hinc inde pennatim in ſtrias tendineas concurrant

rant et vltimato in regione flexurae in anguſtiorem tendinem teretem omnes colligantur, muſculique figuram triangularem efficiant. Tendo cum flexoris pectoralis tendine coniungitur, tendinemque communem conſtituit, qui porro cum tertii flexoris tendine coaleſcens in radium denique ſe inſerit.

Omnibus notis hic muſculus deltoideo humano, eleuatori humeri, qui in leone et fele non exiſtit, ſimilis eſt, adeo, vt pro eodem, cuius etiam locum occupat, haberi poſſit, cum eo tamen diſcrimine, vt qui in homine brachium attollit, antibrachium in leone flectat. Sed mirandam etiam in hoc exemplo natura ſe praebet, quae viribus conſulens omnibus modis in hoc animale, motum quoque peculiarem alteri membro detrahit plane, alterique addit ſuperfluum ne aliquo modo vires perdantur. Omnibus enim, quibus homo, et praeterea pectorali quoque, leo flexoribus cubiti gaudet. Ergo ſuperfluus deltoideus eſt, niſi ad vim in flectendo auctam reſpicias. Sed ſi humero, velut in homine hic muſculus inſeritur, quo motus efficiatur proprius, eleuatio humeri; flexio non modo debilior inde redditur, ſed quantum huic actioni virium decedit, id neque adhibetur omne ad nouam illam actionem efficiendam ob inſertionem deltoidei in humerum, quae nota eſt, viribus minime fauentem. In homine contra manifeſtum eſt in hoc exemplo, quam egregie, cum diſpendio nempe virium, motuum varietati proſpectum ſit.

Analogia.

Vſus.

 Tertius

Flexor cubiti, qui bicipiti reſpondet. (fig. 3. *k.*) T.XXVIII.

Tertius cubiti flexor, muſculus egregius, robuſtus, durus, ventricoſus, facie nitida, ſuperne inferneque argenteo-ſplendidus, reſpondet bicipiti humano, cui, praeterquam quod nomen bicipitis non conueniat, in omnibus reliquis notis ſimilis eſt. Oritur principio tendineo, forti, tereti, eoque vnico, a margine ſuperiori cauitatis glenoideae ſcapulae, in quo loco tuberculum eſt, quod quaſi veſtigium apophyſeos coracoideae refert. Tranſit deinde ſub ligamentum articulatorium humeri et ſub inſertionem ſupremam muſculi pectoralis, cuius partem tendineam in eo loco perforat. In conſpectum venit infra caput oſſis humeri et ad latus interius pectoralis. Ibi expandi ſenſim incipit in ventrem rotundum, magnum, humano bicipite etiam proportione longitudinis muſculi et oſſis humeri quadruplo ſaltim craſſiorem et finitur tendine fortiſſimo tereti, qui cum communi tendine flexorum pectoralis et deltoidei coniungitur, et in radium denique inſeritur, loco tertiam circiter partem totius antibrachii ab extremitate ſuperiori remoto.

Flexor cubiti brachialis.

Denique quartus flexor cubiti brachiaeus eſt, horum, quos hactenus pertractaui, minimus, neque tamen inualidus. Oritur fibris mere carneis ab exteriori oſſis humeri facie inter inſertionem pectoralis et anconeum externum ſub muſculo, quem poſtea dicam, tenſore vaginae humeralis. Inde oblique verſus interiora brachii decurrit et cum tendine com-

communi flexorum coniunctus hic quoque in radium inſeritur.

Ad extenſores nunc peruenimus cubiti, ideo praecipue notabiles, quod maxima vis leonis communi horum muſculorum actioni, qua nempe praedam percutit et quae percuſſio extenſione cubiti abſoluitur, vulgo, nec perperam, vt puto, attribuitur. Nimirum in leone, vti in reliquis fere animalibus oſſa extremitatis anterioris ita compoſita ſunt, vt, dum flexura cubiti, vti in ſitu naturali, anterior, olecranum autem poſterius eſt, dorſum manus, aliter atque in homine, ſimul anterius, palmaque poſterior ponatur, vel extenſo carpo verſus terram reſpiciat. Hinc homo flectendo cubitum et transuerſim, animalia contra extendendo eundem et deorſum palma feriunt. Adeoque homini flexores cubiti, animalibus extenſores eiusdem muſculi ſunt verberatorii. Extenſoribus autem homo in feriendo nonniſi ad pugnum infligendum, non palma feriendum, vti poteſt.

Extenſores cubiti.

Tres dantur in leone muſculi extenſores anconei, quorum primus, idemque maximus ſitu medius, ſecundus externus, tertius minimusque internus eſt. Prius quam vero hos muſculos deſcribam, ordo poſtulat, vt membranam exponam aponeuroticam, ſimilem faſciae latae potius quam debiliori humerali vaginae hominis, vna cum muſculo eius-

dem tenſore, qua membrana omnes muſculi ad humerum ſiti, praecipue vero anconei includuntur comprimunturque.

Muſculus tenſor vaginae humeralis. (fig. 2. *b*) T.XXVIII

Muſculus ille durus, tendineo-carneus, ex fibris varie decuſſatis, contextus, originem a baſi tota ſcapulae ducit fibris tendineo-membranoſis fortiſſimis, vnde conformiter ſitui ſcapulae, (quae in leone et fele baſi breuiori, lateribusque duobus longioribus gaudet,) perpendiculariter verſus humerum adſcendit, et porro a tota ſibi hac ratione ſubiecta ſpina ſcapulae. Fibrae, quae a parte baſeos ſupraſpinata oriuntur, oblique verſus humerum deſcendunt, in eundemque quoad maiorem partem inſeruntur, in ſpinam, quae a tubere maiori deſcendit. Aliae tamen earum magis oblique progrediuntur et in membranam dictam tranſeunt, in eaque oblique verſus regionem flexurae cubiti tendineae decurrunt. Illae fibrae, quae a parte baſeos infraſpinata ortum duxerunt, magis perpendiculariter verſus humerum tranſeunt; ſed in medio hoc itinere in tendineam membranam humeralem abeunt, in qua eandem continuo directionem obſeruantes circa brachium voluuntur. Quae denique fibrae a ſpina ſcapulae oriuntur, exceptis illis quae ab ipſo acromio originem ducunt, eae a prioribus fibris, a baſi ortis, fere teguntur. Sic oſſi humeri et thoraci paralleli deſcendunt, et in eodem termino, vbi fibrae a baſi productae membraneſcere incipiebant, hae quoque eandem

dem naturam membranoſam induunt, et ad vaginam humeri conſtituendam concurrunt. Quae vero ab ipſo acromio naſcuntur, illae maxime cum iis, quae a parte baſeos ſupraſpinata ortum duxerant, in ſpinam oſſis humeri tranſeunt, nonnullae tamen earum itidem in membranam oblique abeunt. Sic igitur complicatus iſte muſculus, miſſa fibrarum ſuarum aliqua parte in ſpinam oſſis humeri, reliquis, iisque plurimis, producit membranam fortiſſimam, lineam, aut plus ea craſſam, ex fibris duriſſimis, longitudinalibus, transuerſalibus et obliquis compoſitam. Longitudinales enim a fibris muſculi, ſpinae ſcapulae adhaerentibus, producuntur, indeque ſuper muſculos anconeos magnum et externum ad regionem olecrani recta deſcendunt, eosque muſculos contegunt. Transuerſales fibris muſcularibus debentur, quae a parte baſeos ſcapulae infraſpinata oriuntur. Hae ſuper muſculos anconeos ad interius latus humeri perueniunt, totumque brachium circumdant. Denique obliquae a parte baſeos ſupraſpinata et ab acromio maxime proueniunt et verſus flexuram cubiti tendunt. Haec membrana nunc vaginam conſtituit, qua omnes ad humerum ſiti muſculi, maxime tamen anconei includuntur et continentur. Nam quae ad interius brachii latus pertingunt, rariores tantum et debiliores fibrae ſunt. In parte exteriori vero copioſiſſimae et duriſſimae fibrae membranam efficiunt firmiſſimam et validiſſimam. Denique membrana terminatur deorſum,

Membrana vaginae humeralis.

Vagina.

dum fibrae eiusdem partim cum lata maſſa tendinea anconeorum, adeo quidem firmiter, coaleſcunt, vt ſeparari nequeant, partim vero in ſimilem vaginam, qua muſculi ad vlnam et radium ſiti inueſtiuntur, abeunt.

Vſus vaginae humeralis.

Vſus quidem eiusmodi vaginarum aliquid adhucdum obſcuri habet in explicationibus phyſiologorum; neque enim, quomodo ad vim muſculi, dum agit, augendam, aliquid conferant, ſatis manifeſtum eſt, neque omnino quidquam in eum vſum efficere poſſunt vaginae, quas eo tempore, dum muſculus agit, praecipue ſi nullis propriis muſculis tenſoribus inſtructae ſunt, neceſſario laxiores eſſe oportet muſculis ipſis, quos inueſtiunt; ſiquidem fibra tendinea minus quam carnea contractilis eſt; adeoque muſculum eo tempore comprimere, aut continere non poſſunt. Videntur potius ad conſeruandum muſculi robur et firmitatem fibrarum deſtinatae eſſe. Vt enim minus contractiles, ita duriores minusque extenſiles quoque ſunt fibrae tendineae quam carneae, adeoque impedient, quominus vel ab antagoniſtis, vel aliis cauſis muſculi incluſi nimium extendantur, laxentur et molleſcant. Quicquid interea ſit; ſiue immediate vim muſculi agentis augeant, vt vulgo putatur, ſiue robori eiusdem intrinſeco conſeruando inſeruiant; hoc certum tamen eſt, muſculos eiusmodi vaginis indutos, caeteris paribus fortiores aeſtimandos eſſe, quam ſi nudi ſunt; idque eo magis cum videmus, praecipue illos muſculos vaginis donatos

natos eſſe, qui vel ſua natura et debiliores ſunt et nimiae extenſioni facile exponuntur, vt longi extremitatum muſculi, vel qui magnis effectibus, quibus vires vix ſufficiant, exſerendis deſtinati ſunt, vti in exemplo crotaphytis apparet. Similiter ergo de noſtris quoque anconeis iudicandum erit, notabile iis accedere robur ob vaginam hanc rigidiſſimam, qua inuoluuntur. Et omnino hi muſculi ſingulari fibrarum duritie et firmitate gaudent, quam ipſi vaginae deberi, facile cenſeas.

Caeterum muſculus tenſor vaginae praeterquam quod hanc membranam intendat, os humeri quoque, cui pars fibrarum ſuarum inſeritur et totum brachium ad thoracem alligat, non modo dictis carneis fibris ſed ipſa membrana quoque, quae circa os humeri producitur et in olecrano firmatur. Adeoque pectorali in ſua actione reſpondet. Hic enim os humeri ad partem thoracis anteriorem reuincit, ille idem verſus partem poſteriorem retrahit; adeoque efficitur vt os humeri valida vi ad thoracem firmetur atque in ſuo ſitu fixetur, ne in magnis anconeorum actionibus vllo modo vacillare poſſit. Vſus muſculi tenſoris.

Analogus hic muſculus eſt parti poſteriori deltoidis, quae ab acromio et ſpina ſcapulae originem ducit, cum parti eiusdem anteriori flexorem cubiti deltoidem reſpondere ſupra vidimus. Analogia eiusdem.

In

Structura eius in fele.

In fele ſtructura diuerſa eſt. Tenuis lamina carnea a baſi ſcapulae praecipue, tum et fibris debilioribus a ſpinae parte inferiori orta tenuiſſimam pro vagina membranam producit. Sed ab acromio peculiaris muſculus oritur, ſubuentricoſus, a priori plane ſeparatus, qui totus in ſpinam humeri tranſit, nec quidquam ad vaginam contribuit.

Anconeus magnus (fig. 2. *d.*) T.XXVIII.

Anconeus denique magnus ſequitur, quem ſane vi aeque, qua pollet, ac muneris, quo fungitur, praeſtantia, principem in toto corpore leonis muſculum eſſe arbitror, quem vna cum erectore ceruicis ſolum naturam curaſſe, ſolum ornaſſe dixeris. Vis quidem non vna cauſa eſt, cur maxima huic muſculo attribuatur, vti in ſequentibus patebit; munere autem inſignem eſſe, facile credas, ſi conſideraueris, hunc cum erectore ceruicis praecipuum inſtrumentum eſſe, quo animalia leo occidit (cui tamen prouinciae ille maxime praefectus eſſe videtur) cuiusque vnice virtute fretum hoc animal audax nihil non aggreditur vincitque.

Eius origo.

Ille oritur fibris carneis ſub muſculo tenſore vaginae humeralis a coſta ſcapulae, cuius maximam quidem partem principium hoc muſculi occupat, vt quarta circiter pars eius verſus baſin libera maneat pro adhaeſione teretium muſculorum. Iam notandum eſt, hanc coſtam ſcapulae in leone longiorem eſſe pro portione reliquarum partium quam

in

in homine, et, vt paucis dicam, ſolam eius partem, ab anconeo occupatam, haud cedere longitudine dimidiae parti oſſis humeri; vnde iam ex principio validitas muſculi cognoſci poteſt. Inde ergo muſculus ortus actutum valdopere intumeſcit, et ſub tenſore vaginae, tanquam e ſpelunca ſua prodit. Hic nempe tenſor, dum fibris aponeuroticis a parte baſeos infraſpinata oritur proxime ad faciem externam ſcapulae continuat vsque in eam regionem, vbi a coſta anconeus oriri incipit. Ibi tenſor aequaliter margini ſpinae eleuatur ſuper faciem ſcapulae ab eaque et a coſta ſcapulae remouetur tres digitos transverſos, eaque ratione carneis fibris ad humerum vsque continuat. Totum igitur hoc ſpatium, quod tenſori muſculo coſtaeque intereſt, a craſſo hoc principio anconei repletur. Hic vero, dum prodit, ilico et latior fit multo et craſſior, vt inde appareat, eum tamen, quatenus a tenſore tegitur, ab eodem compreſſum fuiſſe. Sic progreditur vaſtiſſimus muſculus fibris arcuatis, quae valde diuergunt, ventremque conſtituunt, deinde iterum conuergunt ad tendinem producendum. Muſculus, hoc modo productus, ſi tendinem nempe, quem poſtea dicam conoideum, quo in olecranum inſeritur, ſeparaueris, ſolamque partem muſculoſam reſpicias, maſſam carneam refert figurae ſubgloboſae, vel irregulariter cubicae, cuius nempe latitudo nullo modo longitudini cedit, et craſſities haud multo latitudine aut longitudine inferior eſt. Si etiam os humeri ita dirigitur, vt cum ſcapula, quam a baſi ad cauitatem

Ventris deſcriptio.

glenoideam eiusdem fere cum oſſe humeri longitudinis eſſe monui, angulum intercipiat rectum; hoc totum ſpatium inter humerum et ſcapulam a ſolo hoc anconeo occupatur, et humerus cum ſcapula et interiecto anconeo magno iterum maſſam quadraticam refert. In omnibus animalibus anconeus magnus muſculus longus ſubcylindricus eſt. In homine is anconeus, qui magno leonis reſpondet, ille eſt, qui longus dicitur; idemque a parte coſtae ſcapulae breuiſſima illa oritur ſola quae collum vocatur, vnde non alius niſi ſubcylindricus muſculus, neque craſſus euadere potuit. Similisque eiusdem figura in fele eſt. Quos aliorum animalium anconeos, ſi comparaueris cum illo in leone, videntur hi longi graciles muſculi modo ad vlnam mouendam facti eſſe, cum ille quadraticus ſolus ad magnas ope vlnae vires exſerendas productus ſit. Neque etiam in aliis muſculis maioribus exemplum facile inuenitur eiusmodi figurae, qui quippe vel plani ſunt et ſatis plerumque tenues, vt muſculi ad thoracem ſiti, vel longi ſubcylindrici, vt muſculi extremitatum. Neque in maximorum animalium glutaeis magnis eius figurae maſſam inueniri perſuaſus ſum, quorum tamen glutaeorum inſertio in os femoris exſerendis viribus adeo parum fauet, vt magnitudo eorum omnino magis obſtaculis vincendis quam producendis effectibus inſeruire videatur.

Inſertio. Tendine tandem lato et craſſo conoide fortiſſimo anconeus finitur. Ei in ſuperficie exteriori fibrae acce-

accedunt a vagina humerali, quae ad ipſam baſin cum hoc tendine concreſcit, vnde ille notabiliter augetur. Tendo deinde coniungitur cum collaterali exterioris, et ad faciem interiorem humeri cum interioris, anconei tendinibus, quibus vnitis ampla maſſa tendinea formatur. Hac tanquam in capſula totum olecrauum praecipue proceſſus vlnae anconeus ſuſcipitur. Ea huius maſſae tendineae portio, quae in facie poſteriori ad proceſſum anconeum decurrit, duriſſimis fibris in eius ſubſtantiam oſſeam intrat, totamque eiusdem tum ſuperiorem, quae verſus humerum ſpectat, tum poſteriorem planam latamque ſuperficiem occupat. Laterales vero dictae capſulae tendineae partes exterior et interior ſuper antibrachium deſcendunt et vaginam antibrachii producunt. In eandemque vaginam etiam ſuperficiales fibrae illius portionis abeunt, quae in proceſſum anconeum inſeritur.

Nunc verum quidem eſt in fele, et etiam in ipſo homine ſimilem fere eſſe anconeorum ad vlnam applicationem. Interim primo quidem fatendum tamen eſt, hanc applicationem pro viribus parcendis melius excogitari non poſſe. Nam tendinis pars, quae in anconeum proceſſum inſeritur, reſpectu lineae a puncto inſertionis ad articulationem ductae, ad quam ſcilicet ſolam reſpiciendum eſt, angulo inſertionis omnino recto gaudet; quamuis fibrae in anconei faciem poſteriorem intrantes, reſpectu huius faciei ſub angulo acutiſſimo inſerantur. Ea vero

tendinis portio, quae in vaginam antibrachii abit, praeter illam vtilem inſertionem totum antibrachium ipſa hac mediante vagina in ſingulis punctis comprehendit. Deinde porro conſiderandum eſt, in homine omnia longe eſſe debiliora, tendinem, qui proceſſui anconeo inſeritur, vaginam, qua antibrachium prehenditur, et proceſſum anconeum ipſum. Denique propinquitatem inſertionis anconeae ad hypomochlion in homine quidem, vt fere vbique fieri ſolet, nocere facilitati motus, in leone vero nullo modo eidem obſtaculo eſſe. Nam in leone antibrachium in parte ſuperiori adeo craſſum, praetereaque vna cum manu adeo breue eſt, vt nullus pro inſertione anconei locus in vlna aptior reperiri poſſe videatur, quominus ob imminutam motus celeritatem effectus actionis quoque imminuatur quam ille, qui propior hypomochlio eſt. Quibus omnibus computatis apparet quamuis homini et feli, caeterisque forte animalibus, ſimilis quoad inſertionem anconeorum ſtructura ſit; nullo tamen modo eundem inde vſum redundare poſſe in exſerendis viribus, qui in leone obtinetur..

Vires huius muſculi maximas eſſe oportet.

Vſum huius muſculi in ſuperioribus iam explicui, vbi de erectore ceruicis et de actione dilacerationis agebatur. De viribus addere liceat, eas paene incredibiles videri, ſi ad omnes muſculi proprietates attenderis; Principium largum validum, quo a ſcapula oritur! Inſertio, qua ad vlnam applicatur, pro viribus parcendis vtiliſſima, inſimulque vali-

validiſſima. Craſſities ventris, qua gaudet, enormis! Membrana rigida, qua includitur et denique quae haud minoris, quam priora, momenti eſt, breuitas totius muſculi, ſingularumque eius fibrarum, cum muſculi craſſitie coniuncta. Quo enim maiorem copiam fibrarum muſculus habet, quae ex craſſitie eiusdem iudicatur, et quo breuiores hae fibrae ſunt, eo maius robur ei ineſſe facile intelligitur. Ideoque qui muſculi longi ſunt, eos vaginis, vel inſcriptionibus tendineis, vel aliis artificiis, quibus debilitati eorum ſuccurratur, munitos videmus. Ex his omnibus igitur colligendum eſſe exiſtimo, hunc muſculum anconeum leonis omnino ſingulare exemplum validitatis et roboris exhibere, nec perperam leoni, praecipue eius actioni, qua ferit, vim maxime inſignem inſolitamque adſcriptam eſſe.

Secundus anconeus exterior eſt. Ille oritur ſub parte tenſoris anteriori a plana lataque facie tuberis maioris oſſis humeri carneus, et porro ab exteriori eiusdem oſſis ſuperficie. Inde latus et craſſus recta deſcendit et cito in tendinem abit, ipſo muſculo latiorem, qui coniunctus cum tendine magni, in proceſſum anconeum partim, partimque in aponeuroticam vaginam antibrachii inſeritur. Quamuis vi longe cedat anconeo magno, tamen et ipſe validus muſculus eſt, qui ſymbolum ſuum haud ſpernendum ad actionem cubiti conferre videtur. Anconeus externus (fig. 2. *f*) T.XXVIII.

Tertius autem, interior, omnino, quatenus in leone, paruus muſculus eſt, et parum, credo, con- Anconeus internus (fig. 3. *f*.) T.XXVIII.

contribuit ad vires augendas. Idem oritur a ſuperficie oſſis humeri interna fibris carneis et ad latus interius deſcendit. Inſeritur tendine tenuiori in latus interius proceſſus anconei.

Reliquos vel humeri, vel ſcapulae muſculos, vel manus extremae, cur in leone magis inquirerem et deſcriberem quam in quouis animale alio, nullam cauſam video. De neruis quaedam notatu digna occurrunt. Haec addo.

De Neruis brachialibus.

Neruos in leone aliter reperi, atque putaueram. Quis enim non crederet tantae maſſae muſculari proportionatam quoque datam eſſe copiam neruorum? et ſane, qui ſtatuunt, neruos fluido muſculis aduehendo inſeruire, quo motus in illis producerentur, haud facile phaenomenon hoc in exſpectatum interpraetari poterunt.

Trunci quatuor. Nerui enim leoni valde exigui ſunt, quod idem quoque de arteriis et de venis valet. Quatuor trunci in meo exemplo ad producendos brachiales neruos ex medulla ceruicali concurrunt, quorum duo ſuperiores quidem ex interſtitio inter penultimam et antepenultimam vertebram colli alter anterior, alter poſterior prodeunt. (Eorum primus fig. 3. *a.*) Ille, qui anterior eſt, ipſe haud validus, et radiali humano vel mediano vix latior, poſt breue ſpatium in tres ramos tenuiores diuiditur, quorum ſuperior minimus continuo carni

carni ſubſcapulari quosdam ramulos communicat alios que ad muſculos ſupra - infraque - ſpinatos mittit. Hic loco ſuperſcapularis humani eſſe videtur, eique magnitudine fere aequalis eſt. In fele duos truncos ſuperſcapulares reperi aequales, quorum vnus pro portione animalis hunc vnicum leonis neruum longe ſuperat. Secundus ramus neruus radialis, idemque humano radiali manifeſto tenuior eſt. Si vero ad proportionem animalis reſpicias octuplo ſaltem craſſiorem eum eſſe oporteret, vt reſpondeat magnitudine neruo humano. Deſcendit ille ſine ramis notabilibus ad medium os humeri vsque. Ibi diuiſus in duos ramos aequales retro os humeri tranſit, et vt fieri ſolet, in reliquis animalibus ſecundum longitudinem radii decurrit diſtribuendus in dorſo manus. In fele hic neruus inſignis eſt magnitudinis et non adeo multum abeſt, quin, quod incredibile videtur, craſſitie aequalis ſit radiali leonis. Tertius primi trunci ramus ille neruus eſt quem in homine medianum vocamus. Hic notabile ſpatium ſine ramis deſcendit, tum duas radices accipit, ſibi fere aequales, a neruo cubitaeo. Inde paululum augetur. Poſthaec ad partem inferiorem oſſis humeri peruenit. Ibi ſingularis trabecula oſſea a corpore oſſis ſecedit, iterumque cum eodem coniungitur. Sub hac trabecula, quaſi ſub ponte neruus vna cum arteria et vena brachiali tranſit et diuiditur in duos ramos, quorum alter muſculos ad vlnam ſitos adit, alter ad palmam manus peruenit, ſolitoque modo in digitales diuiditur. Similis trabecula oſſea pro tranſitu nerui medi-

Neruus ſuperſcapularis (fig. 3. *f.*)

Neruus radialis (fig. 3. *g.*)

Neruus medianus (fig. 3. *h.*

mediani in ſele eſt, ſed longior, elegantiorque, viam producens ampliorem. Hic medianus neruus, etiam poſt acceptas radices a cubitaeo, tamen ſenſibili gradu tenuior itidem eſt quam medianus in homine, et proportione reliquarum partium fere octuplo tenuiorem eſſe cenſeo. In ſele et coniunctum cum cubitaeo vsque fere ad tranſitum per foramen oſſis humeri, vbi vterque ramus a ſe inuicem ſecedit, et ſeparatum truncum hunc medianum reperi. Siue vero proprius truncus, ſiue ramus fuerit trunci, ſibi cum cubitaeo communis, proportione animalis tamen etiam humano, craſſior eſt, licet enormem illam craſſitiem non habeat, quam radialis.

Truncus ſecundus (fig. 3. *b.*) Secundus pro brachio truncus ceruicalis poſt aliquod ab ortu ſpatium tres notabiles ramos reddit anaſtomoticos, a ſe inuicem remotos, breuiores, qui in plexum latum planumque, a tertio et quarto trunco formatum, inſeruntur. Poſthaec truncus ipſe in duos ramos aequales finditur; atque hi ſub celluloſam, quae ſubſcapularem obducit, repunt ad angulum inter humerum et ſcapulam et in muſculos ſuperſcapulares et qui ad latus exterius humeri ſuperne collocantur, ſeſe diſtribuunt, vnde ergo patet, hos ramos loco eius nerui eſſe, qui in homine axillaris dicitur. Vtrique ſimul ſumti omnino maiores et quilibet eorum circiter aequalis eſt axillari humano; ſed multum tamen abeſt, quin iuſtam proportione reliquarum partium magnitudinem habeant. In ſele etiam hic neruus valdopere, humanum aeque ac leoninum relatiua craſſitie ſuperat.

Nerui axillares (fig 3. *m,n*)

Ter-

Tertius truncus ex interſtitio inter vltimam et penultimam vertebram colli prodit. Hic neruus inter reliquos maxime ſpectabilis eſt et videtur primo intuitu eiusmodi neruus fere eſſe quales in leone quaeſiueris. Gaudet etiam latitudine quinque linearum et dimidiae. Verum enim vbi recte conſideraveris hanc laminam nerueam, vix lineam craſſam eam inuenies. Adeoque minorem longe portionem ſubſtantiae medullaris, quam alteruter priorum truncorum brachio adfert; neque notabiles neruos hic truncus edit. Primus ramulus eſt, qui cuti proſpicit interioris partis humeri et loco cutanei interni eſſe videtur. Deinde continuo truncus coniungitur cum quarto et expanſionem nerueam cum eodem producit latam, oblongam, valde tenuem, hinc inde quaſi in filamenta fiſſam, in qua tres illi rami anaſtomotici trunci ſecundi recipiuntur. Poſtea a quarto trunco iterum ſecedit, et nunc notabili gradu, quam ante coniunctionem, anguſtior, ſed tantundem quoque craſſior, vnaque mollior eſt. Tum vero denuo lateſcere et expandi in maiorem planitiem incipit. Tandemque ſenſim in mera filamenta tenuiſſima ſeparata flabelli inſtar diſpergitur, quae retro medium os humeri progrediuntur, ibique maxime circa perioſteum in celluloſa et adipe, partim quoque in adiacentibus muſculis diſtribuuntur Neque in homine neque in fele quod huic neruo ſimile ſit, reperitur. Loco vero eiusdem muſculo-cutaneus eſt.

Tertius truncus (fig. 3. *c.*)

Cutaneus internus (o.)

Denique quartus truncus ex interſtitio inter vltimam vertebram colli et primam dorſi naſcitur.

Quartus truncus (*d*)

Iſte omnium reliquorum validiſſimus et aequalis circiter eſt coniunctis in vnum truncum ceruicali ſeptimo et octauo ex quo trunco cubitaeus et cutaneus internus in homine oriri ſolent. Tamen multum abeſt, quin requiſitam proportione muſculorum craſſitiem habeat. Poſt aliquod ſpatium vnitur cum tertio trunco in dictum latum plexum nerueum, eique in eo latere, vbi accedit, craſſitiem paulo maiorem, quam in oppoſito latere producit. Secedit deinde ab illo et duos ramos anaſtomoticos ad medianum mittit quibus arteria brachialis et vena comes complectuntur, vnde neruus paulo tenuior euadit et cubitaeum nunc refert, qui cubitaeo craſſior et aequalis circiter mediano vel etiam paulo maior eodem eſt; neque tamen iuſtam proportione muſculorum craſſitiem habet. Deſcendendo verſus cubitum primo attenuatur, deinde denuo intumeſcit, ſimulque mollescit et rubricundo colore tingitur, vt retro condylum internum oſſis humeri clauae fere figura gaudeat. Tum inter muſculos ad cubitum ſitos ſe recipit, iisque ramulos reddit ſolitoque modo ad latus vlnare decurrit et ad palmam, vbi diſtribuitur, peruenit.

Neruus cubitaeus (*p.*)

Explicatio exiguae neruorum ad muſculos rationis.

Dummodo ad phaenomena neruorum notiſſima attenditur; quae difficilis videtur primo intuitu, neruorum exigua ad muſculos ratio, eam explicatu haud difficilem eſſe exiſtimo. Si neruus, qui muſculum adit, ligatur vel diſſecatur, muſculus nullo modo aut viribus ſuis, aut facultate motus, deſtituitur; ſoli animae potentia aufertur motum pro arbitrio ſuo

ſuo in hoc muſculo excitandi. Si enim vel muſculus ipſe vel neruus infra ligaturam irritatur, vehementiſſimos ille motus actutum exercet. Non igitur a neruis muſculorum facultas mouendi aut vires dependent, quae muſculo ipſi eſſentialiter inſunt. Nerui vero animae inſeruiunt, quo muſculum quaſi tangere eumque ad motum ſuum edendum ſollicitare poſſit. Eaque ratione in diuerſis corporis partibus motus pro lubitu excitat moderatque.

Neque in corpore humano exempla deſunt vbi aut validis muſculis validae exiguis ſub neruis vires exſeruntur, aut debilioribus partibus magni nerui praeſunt. Illud in corde quod viribus, quas exſerit, non minus, quam neruorum ſuorum exiguitate inſigne eſt, hoc in digitis elucet, qui viribus ſatis mediocribus neruisque permagnis inſtructi ſunt. Quid ergo demum magni aut parui nerui efficient? aut quid dicendum erit de illis muſculis, qui magnis neruis, et de his, qui paruis inſtructi ſunt? ſiquidem ſoli animae nerui inſeruiunt, vt motus muſculorum iis mediantibus excitet atque moderet; facile apparet; ibi multis fibrillis nerueis, vel quod idem eſt magnis neruis, qui multas fibrillas contineant, opus eſſe, vbi multi et varii motus a muſculis produci et ab anima excitari, variaque ratione determinari et moderari poſſunt, ſiue cum magna vi hi motus exerceantur in muſculis magnis et validis, ſiue in debilibus muſculis debiles tantummodo motus ſint, qui producuntur; ibi vero magnos neruos ſuperfluos eſſe, minores

conuenire, vbi (vel magnis cum viribus, vel parvis) motus nonniſi pauci, iique vno ſemper eodemque modo exercentur, vbi minor in motibus varietas et parum adeo negotii in muſculis animae eſt. In ipſis adductis exemplis rei veritas ſe manifeſtat. Cor enim, quod, licet vi magna, tamen neruis exiguis gaudet, quos et ipſos ſenſorios ſolummodo eſſe puto, liberum prorſus ab omni animae arbitrio eſt, quae neque excitare, neque interrumpere, neque vllo modo validos eius motus mutare vel determinare poteſt. Sed mirum eſt, quantum eadem contra imperium habeat in digitos muſici, qui craſſis ideo neruis inſtructi ſunt.

Quum ergo in leone magnos quidem et validos muſculos, ſed pauciores, eosque ita applicatos inuenerimus, vt magnas quidem vires in motibus, quos exercent, ſed pauciores quoque motus diuerſos efficere poſſint; quumque omnia generatim ita comparata ſint, vt facile appareat, ſolis viribus, diſpendio varietatis motuum in hoc animali conſultum eſſe; non mirum ſane eſt, ſi neruos in eodem debiliores inueneris.

Si quis vero crediderit forte, neruos eo inſeruire, vt fluidum nerueum muſculis adferant, quo fibrillae eorum inflentur, et motus in iis producantur, tum ſane magni muſculi leonis maſſae inutiles erunt, quae ob defectum fluidi neruei ſuccurrentis nunquam ſatis inflari, nunquam, quamuis magni ſint, magnas vires exſerere poterunt.

Caete-

Caeterum ex comparatione ſtructurae leonis cum humana apparet quoque melius, quam ex ſola humanae conſideratione apparere poteſt, quam omnibus modis in homine, etiam, ſi aliter fieri non potuit, cum maximo diſpendio virium, multitudini et varietati motuum, eorundemque plenitudini et perfectioni proſpexerit Sapientia Diuina. Membra hominis longa ſunt et gracilia, et idem de muſculis eorum valet. Horum praeterea punctum mobile plerumque propius eſſe ſolet hypomochlio. Plerumque etiam ad angulum acutiorem inſeruntur. Haec omnia eo exacte redeunt, vt homo inde euadat debilior, ſed tantundem quoque mobilior et in dirigendis motibus dexterior, ad quam dexteritatem ſuam viciſſim partem contribuunt magni, quibus inſtructus eſt, nerui.

Scholium de ſtructura corporis humani.

Cauendum autem eſt in comparatione virium diuerſorum animalium cum humanis, ne, quae ipſi huic dexteritati humanae, vel ingenio, vel maiori applicationi et diligentiae debentur, viribus adſcribantur. Probe cauendum adeo, ne cum ſoliditate oſſium et firmitate ligamentorum vires muſculares confundantur. Dum pondera homo eleuat, ligamenta maxime patiuntur et vi ponderum firmitate ſua reſiſtunt. Dum onera, quae fert, capiti, vel ceruici et dorſo incumbunt, oſſa, praecipue vertebrae, earumque cartilagines comprimuntur, ſuaque duritie vel elaſticitate reſiſtunt. Muſculi nil conferunt, niſi, vt totum corpus in aequilibrio et ſingula

gula membra in ſuo ſitu erecto contineant; quod nullius fere momenti res eſt. Si ponderi quoque, quod homo dorſo ſuſtinet, animal homine maius ſuccumberet, etiam hoc noli mirari. Nam columna vertebrarum in homine erecta eſt et vertebra vertebrae incumbit. In animalium columna horizontali vertebrae a ſe inuicem ſe disrumpi patiuntur. Multa alia hic porro ſunt conſideranda, quae euoluere nimis longum eſſet, et a meo penſo alienum. Obſervata de viſceribus leonis proxime dabo.

EXPLICATIO TABVLARVM.

Fig. 1. Muſculi humeri et cubiti ex parte anteriori thoracis orti.

a. a. Latiſſimis colli.
b. b. Portiones ſternomaſtoideorum.
c. Portio laryngis.
d. Magnus erector ceruicis.
e. Linea tendinea.
f. Flexor cubiti deltoideus.
g. Flexor cubiti pectoralis.
h. h. Portio muſculi pectoralis exterior.
i. Portio eiusdem ſuperior.
k. Portio inferior.
l. Portio abdominalis.
m. Manubrium ſterni.
n. Ligamentum manubrii ſterni.

Fig. 2. Muſculi ad exteriorem partem humeri ſiti.

a. Tuberculum maius oſſis humeri.

b.

b. Tenſor vaginae humeralis.
c. Margo huius muſculi, a quo membrana vaginae reſecta eſt.
d. Anconeus magnus.
e. Margo reſectae membranae vbi cum tendine anconeorum muſculorum concreſcit.
f. Anconeus externus.
g. Pectoralis maior.
h. Flexor cubiti pectoralis.
i. Flexor cubiti deltoideus.
k. Portio flexoris cubiti, qui bicipiti humano reſpondet.
l. Flexor cubiti brachiaeus.

Fig. 3. Nerui brachiales.
A. Pectoralis muſculus.
B. Portio flexoris deltoidei.
C. Flexor pectoralis.
D. Anconeus magnus.
E. Supraſpinati portio.
F. Subſcapularis coniunctus cum tereti.
G. Portio latiſſimi dorſi.
H. Portio ſternomaſtoidei.
I. Pars inferior anconei interni, cuius pars ſuperior reſecta eſt, vt neruus *s* appareat.
K. Muſculus flexor, qui bicipiti humano reſpondet.
a. Truncus neruorum brachialium primus.
b. Truncus ſecundus.
c. Tertius. *d.* Quartus.
e. Arteria axillaris.

f.

f. Neruus qui ſuperſcapulari humano reſpondet.

g. Neruus radialis.

h. Neruus medianus.

i. k. Eius diuiſio, poſtquam per foramen ſingulare oſſis humeri tranſiit.

.l Rami tres anaſtomotici inter truncos ſecundum et tertium.

m. n. Nerui, qui loco ſub axillaris humani ſunt.

o. Neruus cutaneus, qui loco cutanei interni eſſe videtur.

p. Neruus cubitaeus.

q. r. Rami anaſtomotici inter cubitaeum et medianum.

s. Neruus, qui muſculo-cutanei humani loco eſt.

Vngulae vna cum vltimis phalangibus digitorum in cute effarcienda relictae, quae ideo in his figuris deficiunt.

NOVAE

NOVAE PLANTARVM SPECIES.

Auctore

E. LAXMANN.

Exhibit d. 20. Iunii 1771.

Ex herbario meo ſibirico, quod per quinquennium praeſertim in alpinis auſtralioribus comparaui, quodque pluſculas nouas ſpecies continet, Pemptadem hic ſtirpium ſpecioſiorum publicae luci committo. Primus eorum mihi dicitur:

I.

VERONICA *pinnata* ſpica terminali, foliis linearibus, dentato pinnatis. T. XXIX. Fig. 1.

DESCR. RADIX ramoſo fibroſa, perennis.

CAVLES plurimi, pedales, erecti, teretes, ſimpliciſſimi, herbacei.

FOLIA linearia, alterna, conſertiſſima; inferiora pinnata, intermedia dentata, ſuperiora integerrima.

SPICA terminalis caule dimidio breuior, plerumque vnica, floribus conſertiſſimis.

 CALY-

CALYCIS perianthium quadripartitum, perſiſtens, laciniis lanceolatis, acutis.

COROLLA dilute coerulea; *tubo* calyce paulo longiore; *limbo* quadripartito plano; *laciniae* ouatae, inferiore reliquis minore.

STAMINVM *filamenta* duo adſcendentia, corollae tubo quadruplo longiora, *antheris* oblongis.

PISTILLI, *germen* compreſſum, *ſtylus* filiformis, longitudine filamentorum, perſiſtens, *ſtigma* ſimplex.

PERICARPII *capſula* ouata, obcordata, apice compreſſa, glabra, bilocularis, quadriualuis.

SEMINA plurima, rotunda, ruſa, minima.

Habitat ad Obum fluuium in apricis; floret circa initium Iunii; caules, folia et perianthio pube quadam tenuiſſima coriacea veſtita.

Obſeru. In alpibus Siniae Sopka, Reunoua Sopka, aliisque altioribus argentifodinam Smeinogorsk circumiacentibus montibus, varietatem huius Veronicae obſeruari glabram, floribus albis, foliis ſucculentis, caule palmari.

II.

Secundo loco prodeat noua Spiraeae ſpecies, elegantiſſimus in ſuo genere frutex, quam ob locum natalem *altaienſem* dico, et a congeneribus ſequenti denominatione diſtinguo.

SPIRAEA

SPIRAEA foliis lanceolatis, integerrimis, glabris, ad baſin anguſtatis, ſeſſilibus, floribus racemoſis, racemis ſimplicibus. T. XXIX. Fig. 2.

DESCR. RADIX lignea, ſolidiſſima, ramoſo fibroſa.

CAVLIS fruticoſus, ſolidus, quadripedalis, laeuis, ramoſus.

FOLIA ſparſa, lanceolata, integerrima, in denticulum excurrentia, ad baſin anguſtata, glabra, ſeſſilia, patentia, plana, dilute viridia et quaſi membranacea.

RACEMI plures, ſimplices, in capitulum ouale congeſtis, ramos terminantes.

CALYCIS perianthium monophyllum, baſi planum, quinquefidum, laciniis acutis, paruis.

COROLLAE *petala* quinque, alba, ouata, obtuſa, patentia *vnguibus* anguſtatis, magnitudine petalorum ſpiraeae opulifoliae.

STAMINVM *filamenta* capillaria, circiter triginta, petalis longiora; *Antherae* ſubrotundae.

PITILLI *germina* quinque, *ſtyli* filiformes, longitudine calycis, *ſtigmata* ſimplicia, obtuſa.

PERICARPII *capſulae* quinque, oblongae, teretes, accuminatae.

SEMINA plurima, ouata, parua.

Habitat in montoſis radicibus alpium Maloi Altai. Floret circa finem Iunii. Inter fluuios Injae (иня et Bjelaja (белая) haud procul a munimento Tigiretskoi Krepoſt vt et ad amnem Kabanovka legi.

III.

Tertia noſtra planta erit ex ordine ringentium.

T. XXIX. Fig. 3. DRACOCEPHALVM *altaienſe* foliis radicalibus cordatis, orenatis, petiolatis; caulinis orbiculatis ſubſerratis ſeſſilibus, floribus verticillatis, bracteis laciniatis, oblongis.

DESCR. RADIX fuſca, fibroſa, perennis.

CAVLIS plerumque vnicus (raro plures) quadrangularis, ſimplex, erectus, pedalis, herbaceus.

FOLIA leuiter rugoſa, *radicalia* pauca, oblonga, cordata, crenata, obtuſa, petiolata petiolis foliis longioribus, hirſutis: *caulina* oppoſita alterno ordine, orbiculata, crenato ſerrata, quinqueneruia, ſeſſilia, ad baſin hirſuta: *floralia* profundius ſerrata, laciniis accuminatis, in violaceum colorem vergentia, neruis hirſutis.

BRACTEAE colore foliorum floralium, oblongae, profunde laciniatae, hirſutae, ad baſin floris plerumque duae vel tres.

VERTI-

VERTICILLI ex alis foliorum floralium totidem in capitulum coarctati, floribus ſex vel octo maximis, violaceo coeruleis, patentibus.

CALYCIS *perianthium* tubulatum, ſtriatum, hirſutum, quinquefidum, laciniis lanceolatis, integerrimis, inaequalibus; ſuperiore latiore obtuſiuſculo, reliquis anguſtioribus acutis.

COROLLA ringens: *tubus* longitudine calycis, verſus faucem ſenſim ampliatus; *faux* maxima, inflata, barbata, hians; *labium ſuperius* fornicatum, emarginatum, lobis rotundatis, intergerrimis; *labium inferius* trifidum, laciniis lateralibus obtuſis, integerrimis reflexis, media pendente, emarginata, longiore.

STAMINVM *filamenta* quatuor, filiformia, ſub labio ſuperiore recondita, quorum duo paulo longiora; antherae nigrae, ſubcordatae, lobis longiſſimis, diſtantibus.

PISTILLI *germen* quadripartitum; *ſtylus* filiformis ſtaminibus paulo longior, *ſtigma* bifidum, tenue, reflexum.

PERICARPIVM nullum.

SEMINA quatuor, ouato oblonga, nigra, nitida, *hilo* albo, plano, ouato.

Habitat in ſummis cacuminibus alpium Maloi Altai et Sinjae Sopka in vmbroſis verſus ſeptemtrio-

 nem

nem vergentibus. Alibi nunquam vidi. Floret Iunio.

Obſeru. Maxime adfinis noſtra planta Dracocephalo *grandifloro* LIN. Sp. Pl. Tom. 2. p. 830. n. 8. Fl. Sib. Tom. 3. p. 233. n. 56. Radix enim fuſca fibroſa, caulis quadrangulus, calyx quinquefidus, hirſutus, lacinia ſuperiore latiore, maximi et coerulei denique flores in ambabus hiſce plantis ſimillima: longitudo autem caulis pedalis, folia radicalia crenata, cordata, caulina quinqueneruia orbiculata, floralia profunde ſerrata, bracteae denique profunde laciniatae laciniis accuminatis noſtrum Dracocephalum a linneano ſeparant.

IV.

Dracocephalo huic duas Papilionaceas ſubiungo, et quidem quarto loco Robiniae ſpeciem, quae mihi ob ingentes acutiſſimasque ſpinas:

Tab. XXX. Fig. 4. ROBINIA *ſpinoſiſſima* foliis iunioris plantae ſparſis, abruptae pinnatis, ſtipulatis, petiolo perſiſtente, arboreo, inque ſpinam acutiſſimam exeunte: adultae vero plantae foliis quaternatis, ſubpetiolatis, faſciculatis, floribus ſeſſilibus.

DESCR. RADIX ramoſa, fruticoſa, ſolida, longiſſima, varie ſeſe extendens.

CAVLES

CAVLES plures fruticoſi, plerumque orgyales, ſolidi, teretes, cortice luteo, *virideſcente*, coriaceo, glabro, ramoſiſſimi, ramis foliatis, virgatis.

FOLIA ramulorum et ſurculorum primi anni ſparſa, abrupte pinnata, tri vel quadriiuga, pinnis lanceolatis acutis ſpineſcentibus, petiolo coſtaceo in mucronem acutiſſimum exeunte, perſiſtente: in adulta vero planta folia quaternata, petiolo breui ſpinula terminato inſidentia, oblonga, obtuſa cum ſpinula, verſus baſin ſenſim anguſtiora: petioli faſciculati, faſciculis ex alis petiolorum coſtaceorum perſiſtentium.

STIPVLAE duae ad baſin petiolorum coſtaceorum lanceolatae, membranaceae, acutae, ſpineſcentes, cum petiolo caulem amplectentes.

FLORES ſeſſiles e faſciculis foliorum, plerumque ex ſingulo faſciculo vnicus.

CALYCIS perianthium coloratum, quadridentatum, denticulo ſupremo latiori, emarginato, caeteris acutis.

COROLLA Papilionacea, magnitudine et figura Robiniae caraganae ſimillima.

STAMINA et piſtillum vti in congeneribus.

PERICARPIVM Legumen cylindraceum, pollicare.

SEMI-

SEMINA plerumque quinque vel ſex oblonga, cylindrica.

Habitat ad Selengam fluuium in campis montoſis, arenoſo glareoſis: alibi nunquam vidi. Floret Iunio.

Obs. Frutex hic elegantiſſimus non quidem prorſus nouus, ſed minus rite hactenus deſcriptus. Figura Ammanni Tab. XXXV. Robiniam pygmaeam Illuſtr. a Linne repraeſentat, neque ex deſcriptione pag. 204 data aliud videri poteſt. Iuniores vero plantae, quas ex ſeminibus ſatis in horto academico accepit, quarum mentionem pag. 205 fecit, quaeque iamdudum periere, nihil aliud quam noſtra Robinia fuere. Nunc iterum ex ſeminibus quae exportaui, nonnulla ſpecimina in horto noſtro academico vigent. Allata noſtra figura ramulum adultae plantae cum flore, magnitudine naturali, optime repraeſentat.

V.

Altera Papilionacea quam propono eſt Trifolii, generis botanicis difficillimi, noua ſpecies, mihi ob locum natalem transbaicalenſem:

Tab. XXX. Fig. 5. TRIFOLIVM *dauricum* foliis oualibus, integerrimis, venoſis, caule erecto, floribus capitatis, capitulis axillaribus et pedunculatis et ſeſſilibus ex ſingula ala.

DESCR.

DESCR. RADIX ramoſa, longiſſima, perennis.

CAVLIS herbaceus, ſtriatus, erectus, foliatus, ramoſus, ramis ſparſis, foliatis.

FOLIA ternata, petiolata, foliolis oualibus, integerrimis, obbuſis, denticulo ſpiniformi terminatis, venoſis, laeuibus, lateralibus ſeſſilibus terminali paulo maiore, remotiore.

STIPVLAE duae, ſetaceae, ad baſin petiolorum.

FLORES Capitula ex alis foliorum plurima et quidem ex ſingula ala bina, pedunculatum vnum, ſeſſile alterum.

CALYCIS perianthium monophyllum, tubulatum, quinquedentatum, denticulis lanceolatis, acutis, longitudine tubi, perſiſtens.

COROLLA flaua, perſiſtens, marceſcens, *Vexillum* obtuſum, patens, *Alae* vexillo paulo breuiones, *carina* longitudine alarum, interdum paulo longior.

STAMINVM *Filamenta* diadelpha, adſcendentia *Anthenae* ſimplices.

PISTILLI *Germen* ſubrotundum, *ſtylus* filiformis, adſcendens perſiſtens, *ſtygma* ſimplex.

PERICARPIVM *Legumen* ouatum, acutum, vniualue, monoſpermum.

Habitat ad Selengam fluuium in pinetis. Floret Iulio.

 EX-

EXPLICATIO TABVLARVM.

Tab. XXIX. Fig. 2. Veronica pinnata cum flore et fructu.

Fig. 2. Spiraea altaienſis cum flore.

Fig. 3. Dracocephalum altaienſe.

a. Calyx cum ſtaminibus, piſtillo et bracteis.

b. Bractea.

Tab. XXX. Fig. 4. Robinia ſpinoſiſſima cum flore.

Fig. 5. Trifolium daurium cum flore.

a. Flos per microſcopium ampliatus.

b. Flos magnitudine naturali.

c. Vexillum.

d. Carina cum alis.

e. Stamina cum piſtillo.

f. Calyx.

g. Legumen.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONES
NON NVLLAE OBSERVATORIO PETROPOLI INSTITVTAE.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Anno 1767.

Occultatio Pleyadum a Luna die $\frac{22\ \text{Febr.}}{5\ \text{Mart.}}$

Praecedentibus tranſitum Lunae per Pleyades diebus ob coelum nubilum motum horologii ad examen reuocare non licuit; ipſo vero die tranſitus, tubo quadrantis tripedalis in Sirium directo, obſeruaui appulſum illius

ad fil. vert. microm.	$9^h.\ 52'.\ 12''$
—— obliqu. ——	— 53. 23
Exitum e tubo	— 53. 45.

Poſt modum tubo *Dollondiano* ſex pedes longo ad idem horologium obſeruaui Lunam limbo obſcuro occultaſſe.

Seleno - - - - - - -	$11^h.$	$5'.$	$53''$
Electram	11.	8.	$8\frac{1}{2}$
Maiam	11.	32.	38
Lucidae pleyadum proximam	12.	9.	23
η ſeu Lucidam Pleyadum	12.	13.	$43\frac{1}{2}$
Emerſio Electrae	12.	56	26.

Emerſio Electrae obſeruata eſt ad limbum Lunae lucidum et tremulum; quam obrem pro exacta reputari nequit; praecedentes vero ad ſemiſſem ſecundi certae ſunt.

Nubila coeli facies durat vsque ad $\frac{4}{15}$ Martii, qua demum ſequentes capere licuit altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.	Alt. ☉lis	Poſt. merid.	Meridies
$9^h. 46'. 43''$	$23°. 0'$	$2^h. 17'. 40''$	$0^h. 2'. 11''\frac{1}{2}$
— 48. 4		16. $21\frac{1}{2}$	— 2. $12\frac{3}{4}$
— 51. 15	23. 20	13. 2	— 2. $8\frac{1}{2}$
— 52. $34\frac{1}{2}$	23. 40	11. $42\frac{1}{2}$	— 2. $8\frac{1}{2}$
9 55. 56		2. 8. 25	0. 2. $10\frac{1}{2}$.
	Meridies medius		0. 2. 10, 3
	Correctio meridiei		— 28, 3
	Meridies verus		0. 1. 42.

Eodem die tranſitum Sirii per tubum quadrantis, priſtinum ſitum ſeruantis, ſequentem in modum obſeruaui.

Appulſ. ad fil. vert. micr.	$9^h. 20'. 48''$	acc. hor. $47''$, 7
—— ad fil. obliqu.	22. 0	- - 47, 6
Exitus ſtellae e tubo	22. 16	- - 47, 0.

Poſita itaque acceleratione horologii ſupra diem ſolarem medium $47''$, 3 momenta Immerſionum ad tempus verum reducta habebunt ſe, vt ſequitur.

Immer-

Immerſ.	Seleno - - - - - -	11^h.	$9'$.	$10''$
	Electrae		11.	$25\frac{1}{2}$
	Maiae	11.	35.	54
	Stellae Lucid. Pleyad. prox.	12.	12.	3
	η ſeu Lucidae Pleyad.	12.	16.	59.

Inuigitanti mihi huic phaenomeno minores ſtellae longius, maiores vero minus limbo Lunae inherere viſae ſunt, id quod mereri videtur, vt obſeruationibus aliorum aſtronomorum vel confirmetur vel euertatur.

Labentibus menſibus Februario et Martio plures inſtitutae ſunt ſuper *Satellites Iouis* obſeruationes, verum motum horologii obſeruationibus altitudinum Solis correſpondentium ſtabilire non licuit, id circo referendis iis ſuperſedeo. Emerſio tantum die $\frac{22 \text{ Martii}}{2 \text{ Aprilis}}$ horologio monſtrante 7^h. $35'$. $18''$ obſeruata hoc incommodo non laborat; nam eo ipſo die meridies correctus ex altitudinibus Solis correſpondentibus 0^h. $10'$. $9''$, 6 et die $\frac{24 \text{ Martii}}{4 \text{ April}}$ eodem modo meridies verus repertus eſt 0^h. $10'$. $42''$, 3; vnde tempus verum *Em. I. Sat. Iouis* erit 7^h. $25'$. $2''$.

Anno

Anno 1768.

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Die $\frac{5}{16}$ Febr. meridies ex 8 paribus altitudinum Solis correſpond.	$0^h.51'.40'',9$	
Correctio meridiei	— 26, 7	
Meridies verus	0. 51. 14, 2	
Immers. I. Sat. Iouis tubo Gregoriano 24 poll. longo.	13. 52. 0	$12^h.59'.19''$
Islenieff tubo Achr. 10 ped.	13. 52. 5	59 24
Die $\frac{6}{17}$ Febr. meridies medius ex 4 paribus alt. Solis correſpondent.	0. 52. 57, 5	
Correctio meridiei	— 26, 7	
Meridies verus	0. 52. 30, 8	
Die $\frac{19 \text{ Febr.}}{1 \text{ Martii}}$ meridies medius ex ſex paribus altit. Solis correſpondent.	1. 6. 2, 9	
Correctio meridiei	— 28, 6	
Meridies verus.	1. 5. 34, 3	
Eodem die obſeruata eſt *Imm. I. Sat. Iouis* tubo Gregoriano 24 poll.	5. 54. 36.	4. 48. 50
Obſeruatio haec ſubdubia eſt ob intemperiem aeris		
Die $\frac{20 \text{ Febr.}}{2 \text{ Mart.}}$ meridies medius ex 4 paribus altit. Solis correſpondentium.	1. 7. 1, 1	
Correctio meridiei	— 28, 7	
Meridies verus	1. 6. 32, 4	

Eodem

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Eodem die coelo ſereno ſed Luna ſplendente .		
Imm. III. Sat. Iouis	$12^h. 58'. 32''$	$11^h. 51'. 25''$
Imm. II. Sat. Iouis	14. 17. 49	13. 10. 40
Die $\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}}$ meridies medius ex ſex paribus altit. Solis correſpondent.	1. 9. 16, 9	
Correctio merid.	— 28, 9	
Meridies verus.	1. 8. 48	
Die $\frac{27\ \text{Febr.}}{9\ \text{Mart.}}$ *Imm. III. Sat. Iouis* coelo ſereno.	17. 1. 45	15. 49. 49
Die $\frac{28\ \text{Febr.}}{10\ \text{Mart.}}$ meridies medius ex 5 paribus altitud. Solis correſpondent.	1. 12. 36	
Correctio meridiei	— 28, 3	
Meridies verus	1. 12. 7, 7	
Eodem die *Imm. I. Sat Iouis*	14. 25. 55	
Die ſequenti horologium ad quod hucusque obſeruationes peractae ſunt, poſt meridiem ſubſtitit; id circo in ſequentibus aliud a *Charoſt* nempe elaboratum ad obſervationes adhibitum eſt.		
Die $\frac{8}{19}$ Martii meridies medius ex ſex paribus altit. Solis correſp.	0. 6. 6, 7	
Correctio meridiei	— 27, 9	
Meridies verus.	0. 5. 38, 8	

	Temp. Horol	Temp. ver.
Eodem die coelo ſereno *Imm. I. Sat.*	$9^h. 44^l. 46$	$9^h. 39^l. 0^{ll}$
Die $\frac{9}{20}$ Mart. meridies medius ex ſex paribus altit. Solis correſpond.	0. 6. 23, 9	
Correctio meridiei	— 27, 8	
Meridies verus	0. 5. 56, 1	
Die $\frac{15}{26}$ Mart. meridies medius ex ſex paribus alt. Solis correſpond.	0. 7. 52, 3	
Correctio meridiei	— 26, 2	
Meridies verus	0. 7. 26, 1	
Eodem die aere tranquillo, coelo ſereno *Imm. I. Sat. Iouis.*	11. 42. 3	11. 34. 52.
Die $\frac{21\ Mart.}{1\ April.}$ meridies medius ex ſex paribus altit. Solis correſpondent.	0. 9. 15, 5	
Correctio meridiei	— 25, 5	
Meridies verus	0. 8. 50.	

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

ANNIS 1769 ET 1770. INSTITVTAE.

Vna cum determinationibus geographicis aliquot locorum Imperii Ruſſici inde deductis.

Auctore

W. L. KRAFFT.

In obſeruationibus, quas hic Academiae exhibeo, inſtrumentis vſus ſum iisdem, quibus obſeruatio Veneris in Sole a me inſtituta. Iis igitur deſcribendis hic non immoror, cum iam in Commentariorum noſtrorum praecedenti tomo reperiantur deſcripta. Id vnum arbitror praemonendum, altitudinibus ſiderum hic recenſitis correctiones neceſſarias tam ob deuiationem radii viſionis, quam quae parallaxi, refractioni et reductioni ad centrum aſtri debentur, iam eſſe, vt ſpatio parceretur, adplicatas.

I. Obſeruationes pro latitudine geographica oppidi Vfa.

Anno 1769. menſe Auguſti nov. ſtil.

	Altit. merid. ☉	Decl. bor. ☉	Eleuat. aequat.
d. 22.	46°. 58′. 42″	11°. 41′. 30″	35°. 17′. 12″
24.	46°. 17′. 33″	11°. 0′. 36″	35° 16′. 57″
25.	45°. 57′. 1″	10°. 39′. 51″	35°. 17′. 10″.

Menſe Septembris.

1.	43°. 27′. 40″	8°. 10′. 28″	35°. 17′. 12″
4.	42°. 21′. 39″	7°. 4′. 19″	35°. 17′. 20″
5.	41°. 59′. 1″	6°. 42′. 2″	35°. 16′. 59″
8.	40°. 52′. 8″	5°. 34′. 33″	35°. 17′. 35″
19.	36°. 38′. 4″.	1°. 20′. 54″.	35°. 17′. 10″.

Eodem menſe.

	α aquilae		
3.	43°. 33′. 59″	8°. 16′. 43″. B.	35°. 17′. 16″
	Aldebaran		
23.	51°. 19′. 20″.	16° 1′. 42″. B.	35°. 17′. 38″.

Vnde, ſumto medio arithmetico, colligitur
Altitudo aequatoris 35°. 17′. 15″
et latitudo borealis 54°. 42′. 45″.

II. Obſeruatio occultationis ſtellae τ Tauri ſub Luna 1769. d. 24. Aug. n. ſt. Vſae inſtituta.

Motus horologii, ad quod haec obſeruatio eſt inſtituta, altitudinibus Solis correſpondentibus adcurate exploratus ſe habere deprehenſus eſt, vti ſequens oſtendit tabula:

1769. menſe Aug. n. ſt.

	Merid. verus	Retardatio horologii	Retardatio temp. med.
d. 17.	0h. 13′. 18″. 7	3′. 13″. 6	12″ 9
18.	0h. 10′. 5″. 1	6′. 29″. 6	27″. 2
20.	0h. 3′. 35″ 5	3′. 14″. 2	14″. 4
21.	0h. 0′. 21″. 3	12′. 57″. 7	1′. 2″. 0
25.	11h. 47′. 23″. 6		

vnde

vnde concluditur retardatio diurna horologii ſuper tempus medium $3'. 0''$ et d. 24. Aug. meridies verus $11^h. 50'. 40''$.

Die 25. Aug. temp. ciuili, mane, monſtrante horologio $3^h. 39'. 15''$ obſeruaui immerſionem ſtellae τ ♉ ſub Luna, tubo praeſtanti *Dollondiano* 10. pedum, aëre tranquillo et puro. Licet eclipſis facta ſit ad limbum Lunae lucidum; tamen, cum fuerit fere inſtantanea, incertitudo momenti aſſignati vltra duo vel tria minuta ſecunda extendi non poteſt.

Huius itaque occultationis inuenitur pro meridiano oppidi Vfa tempus verum 1769. d. 24. Aug $15^h. 50'. 44''$; ſiue ob aequationem temporis $+ 1'. 48''$. tempus medium $15^h. 52'. 32''$.

Longitudo geographica oppidi Vfa ex hac obſeruatione deducta.

Stellae huius, quae eſt quintae magnitudinis et in fronte Tauri borea, ex ephemeridibus Cel. Dni *de la Caille* colligitur (*), habita ratione effectus nutationis et aberrationis, ſequens poſitio:

Aſcenſio recta	$67°. 6'. 54''$
Declinatio bor.	$22°. 29'. 46''$
Longitudo	$2^s. 8°. 56'. 24''$
Latitudo	$0°. 41'. 3''$

 quibus

(*) Conf. Introd. ad ephemerides pro anno 1765. pag. 68.

quibus conſtitutis, ex tabulis lunaribus Cel. *Maieri* concluditur pro meridiano Pariſino tempus medium coniunctionis verae ſtellae τ ♉ cum Luna 1769. d. 24. Aug. $13^h. 5'. 25''$.

Factis pluribus pro quaeſita meridianorum differentia hypotheſibus, quas hic adferre foret ſuperfluum, inueni veram huius loci longitudinem a Lutetiis Pariſiorum ſtatui debere $3^h. 34'. 14''$ verſus orientem; hac enim aſſumta, obſeruationi plene ſatisfit, vti ex ſequenti calculo patet:

Temp. med. obſeruat.	$15^h. 52'. 22''$
Differ. merid.	$3^h. 34'. 14''$
Temp. merid. Paris.	$12^h. 18'. 18''$
Longit. Lunae vera	$2^s. 8^\circ. 28'. 50''$
Latit. Lunae vera B. . . .	$1^\circ. 7'. 52''$
Parall. ☾ horiz. pro fig. Sphaeroid. terrae	$59'. 12''$
Semidiam. ☾ aucta in ratione altitud.	$16'. 24''$
Parallaxis ☾ in longit. . . .	$+ 14'. 21''$
in latit.	$- 36'. 32''$
Longit. ☾ appar.	$2^s\ 8^\circ. 43'\ 11''$
Latit. ☾ appar.	$0^\circ. 31'. 20''$
Differ. appar. long. τ ♉ et ☾	$13'. 13''$
- - - - latitud.	$9'\ 43''$
Diſtantia appar. centrorum . . .	$16'. 24''$.

Cum

Cum igitur computata in hac longitudinis geographicae hypotheſi diſtantia centrorum apparens prorſus congruat cum ſemidiametro Lunae apparente; ea hinc plene confirmatur, ſiquidem a tabularum erroribus animum abſtrahamus, quos ob defectum obſeruationis correſpondentis inueſtigare non licuit. Quare ſtatui poterit.

Longit. geograph. oppidi Vfa verſus orientem a Lutetiis Pariſiorum.

in tempore . . . $3^h. 34'. 14''$
in part. circuli $53°. 33'. 30''$.

III. Obſeruatio Cometae anni 1769. Vfae inſtituta.

Inſignem hunc Cometam, quamuis diuturna fuerit ipſius adparitio, tamen partim coelo, in iſtis regionibus eo anni tempore vtplurimum nubilo et pluuio, partim itineris inopino caſu impeditus non niſi vnica vice adcurate obſeruare potui; die nimirum 3. Sept. n. ſt. quo Cometa ad parallelum ſtellae γ Orionis prope acceſſit. Horologii mei conſueti, ſed de nouo ſuſpenſi, motum non niſi ad meridianam, quam quidem ſatis exactam noui, examinare licuit. Erat autem meridies verus:

d. 31. Aug. . . . $11^h. 58'. 19''\frac{1}{2}$
d. 4. Sept. . . . $11^h. 42'. 33''$.

ex quibus cum tempore medio collatis colligitur retardatio penduli diurna ſuper tempus medium $3'. 37''. 7$

vnde

vnde ſtatui poteſt d. 3. Septembr. merid. verus 11^h. 46$'$. 30$''$.

Quadrante, poſtquam filorum tubo inſertorum poſitionem probe exploraueram, in circulo aliquo verticali, ad cuius azimutum, calculo ex datis obſeruationis facile inueniendum, ob circuli azimutalis paruitatem non attendi, firmato, Cometam cum ſtella γ Orionis comparaui; notaui nempe

Temp. horol.	Temp. ver.	
12^h. 52$'$. 43$''$	13^h. 8$'$. 19$''$	appulſum Cometae ad filum verticale ſub altitudine 12°. 50$'$. 27$''$
12^h. 58$'$. 38$''$	13^h. 14$'$. 13$''$	appulſum ſtellae γ Orionis ad idem filum ſub altitudine 12°. 40$'$ 59$''$.

Ex ephemeridibus Cel. *de la Caille* inuenitur pro hoc tempore ſtellae γ Orionis

Aſcenſio recta . . . 78°. 11$'$. 52$''$
Declin. bor. . . . . 6°. 7$'$. 14$''$.

vnde, facto calculo, prodiit pro tempore

d. 3. Sept. n. ſt. 13^h. 8$'$. 19$''$. Temp. ver. ſub mer. Vſenſi
adeoque 9^h. 34$'$. 5$''$. Temp. ver. } Pariſino
et 9^h. 32$'$. 58$''$. Temp. med. }

Cometae.

Aſcenſ. rect. . . 76°. 37$'$. 39$''$	Longit. . . 2^s. 16°. 7$'$. 7$''$
Declin. bor. . . 6°. 15$'$. 0$''$	Latit. auſtr. 16°. 33$'$. 20$''$.

Calcu-

Calculus praecedentis obſeruationis ex elementis theoriae huius Cometae.

Qualiscunque haec ſit obſeruatio; iuuat tamen eam comparare cum theoria huius Cometae, quam a compluribus Aſtronomis inueſtigatam (*) accipimus. Eminet inprimis ea, quam in peculiari ſcripto: *Recherches et calculs ſur la vraie orbite de la Comete de l'année* 1769, noua methodo Illuſtr. *Eulerus* ſtabiliuit; quae igitur elementa, cum iſte liber Aſtronomorum latere neminem cenſendus ſit, hic ſuppono cognita. Vt vero ante omnia de obſeruationis meae vel defectu vel praeciſione eo procliuius eſſet iudicium; obſeruationes diebus 2, 3 et 4 Septembris in citato ſcripto pag. 4 recenſitas interpolando ſequentes elicui formulas generales: die 3. Sept. $12^h. 24'. 11'' + z^{hor.}$

$$\text{Longit. Cometae} = 2^s 16°34'56'' + 587,58.z'' + 0,93.zz''.$$

$$\text{Latitudo} \ldots = 16°37'48'' + 176,40.z'' + 0,25.zz''$$

Cum igitur propoſita obſeruatio praecedat hanc epocham interuallo $2^h. 51'. 13''$; erit $z = -2,8536$ quo valore ſubſtituto prodit Cometae longitudo 2^s $16°. 7'. 0''$; et latitudo $16°. 29'. 25''$; quarum ergo haec ab obſeruata $2' 55''$ illa vero nihil diſcrepat; ita, vt haec obſeruatio cum reliquis ſatis bene conſentire

(*) Conf. *Bernoulli*, Aſtron. Berol. Recueil pour les Aſtronom.

ſentire cenſenda ſit. Inſtituto itaque praeuio hoc obſeruationis examine; eiusdem calculus in hypotheſi traiectoriae ellipticae ex elementis *Eulerianis* ita ſe habet.

Obſeruatio praecedit tempus perihelii interuallo 34, 25323 dier. ex quo poſita Solis a terra diſtantia media = 1, concluditur Cometae.

Anomalia vera 140°.10'. 5"	Diſtantia a ☉le 1,04931.
Elong. a Nodo deſc. in orbita 9°. 0'.52"	Long. helioc. 0ˢ1°55'23"
in eclipt. 6°.50'.42"	Latit. helioc. 5°52'49"A.

Pro locis geocentricis colligitur ex tabulis Cel. *de la Caille* ad tempus propoſitae obſeruationis.

Longitudo ☉ = 5ˢ 11° 32' 47"; eiusque a terra diſtantia = 1, 00753 quibus poſitis, prodit.

Angulus commutationis 20°22'36"	Long. Com. geoc. 2ˢ16° 6'42"
Angulus elongationis 85°26' 5"	Latit. geoc. 16°25'35"

vbi quidem longitudo non niſi 25" ab obſeruata diſcrepat; latitudo vero computata cum obſeruatione non aeque feliciter congruit.

VI.

VI. Obſeruationes pro latitudine oppidi Siſran. 1770 d. 28. Martii n. ſt.

	Altit. merid.	Declinatio	Alt. aequat.
Sol.	39° 54′ 23″	3° 3′56″.B	36° 50′ 27″
α Leonis	49° 55′ 9″	13° 5′ 4″ —	36° 50′ 5″
δ	58° 36′ 56″	21° 46′ 53″ —	36° 50′ 3″
γ	57° 49′ 47″	20° 59′ 47″ —	36° 50′ 0″
α Hydrae	29° 9′ 47″	7° 40′ 22″.A	36° 50′ 9″
Polaris.	51° 14′ 52″	88° 4′ 36″.B	36° 49′ 44″
β. Caſſiop.	21° 2′ 36″	57° 52′ 45″ —	36° 50′ 9″
α	18° 26′ 14″	55° 16′ 16″ —	36° 50′ 2″
γ	22° 37′ 37″	59° 27′ 57″ —	36° 50′ 20″

Sumto medio . . . 36° 50′ 7″
Latit. bor. . . . . . 53° 9′ 53″.

Obſeruatio tranſitus Lunae ad ſtellam ζ Tauri 1770. d. 1. Apr. n. ſt. in oppido Siſran.

De horologii, quo vſus ſum, aſtronomici motu captis quamplurimis altitudinibus Solis correſpondentibus perfecte conſtitit; ex quibus prodiit

d. 29. Martii Merid. ver. 11^h 58′ 51″. 8
d. 30. - - - - - - 0^h 0′ 26″. 4
d. 3. Aprilis - - - 0^h 6′ 39″. 2

vnde concluditur acceleratio penduli diurna ſuper tempus medium 1 52″. 8 atque hinc d. 1. Aprilis merid. verus 0^h 3′ 35″. 2. Quamprimum per crepuſculum veſpertinum fieri potuit, ad Lunam obſer-

vandam me accinxi; et cum ſtellam non procul a Lunae limbo remotam ſatis diſtincte conſpicerem, tres ſequentes inſtitui obſeruationes. Quadrante nimirum, de cuius errore perfecte conſtitit, ad certum elevationis gradum firmato, eo ipſo momento, quo Lunae limbus filum medium immobile attigit, ſtellae ab iſto limbo diſtantiam micrometro ſum dimenſus; vnde pro eodem momento vtriusque ſideris altitudo innotuit.

Obſeruatio Prima.

Temp. horol.	Temp. ver	
$7^h\ 36'\ 50''$	$7^h\ 32'\ 45''$	Altit. limbi ☾ infer. $44°22'45''$
		Altit. ζ ♉ . . $44°\ 0'16''$
		Differ. appar. altit. $0°22'29''$
$7^h\ 37'\ 15''$	$7^h\ 33'\ 10''$	Stella in filo verticali
$7^h\ 37'\ 36''$	$7^h\ 33'\ 31''$	Limb. ☽ occid in eodem vertic.
		Differ. appulſuum $= 21''$.

Obſeruatio Secunda.

Temp. horol.	Temp. ver.	
$7^h\ 41'\ 40''$	$7^h\ 37'\ 35''$	ζ ♉ in filo verticali.
$7^h\ 41'\ 50''$	$7^h\ 37'\ 45''$	Altit. limbi ☽ infer. $43°42'44''$
		Altit. ζ ♉ . . . . $43°18'55''$
		Differ. appar. altit. $0°23'49''$
$7^h\ 42'\ 11''$	$7^h\ 38'\ 6''$	Limb. ☽ occid. in eodem vertic.
		Differ. appulſum $= 31''$.

Obſer-

Obſeruatio Tertia.

Temp. horol	Temp. ver	
$7^h\,46'\,0''$	$7^h\,41'\,55''$	♊︎♉︎ in filo verticali
$7^h\,46'\,40''$	$7^h\,42'\,35''$	Limb. ☽ occid. in eodem
		Differ. appulſuum = $40''$
$7^h\,47'\,4''$	$7^h\,42'\,59''$	Altit. limb. ☽ infer. $43°\,2'\,42''$
		Altit. ζ♉︎ . . . . $42°\,37'\,27''$
		Differ. appar. altit. $0°\,25'\,15''$

vbi notari conuenit, altitudines has per refractionem iam eſſe correctas.

Longitudo geographica oppidi Sisran ex obſeruatione praecedente deducta.

Elementa calculi ex tabulis aſtronomicis depromta ita ſe habent: 1770. Temp. Pariſino med. April. $1^d\,4^h\,0'\,0''$.

Stel ζ♉︎ aſc. R. appar.	$80°\,59'\,0''$	Mot. Lunae hor. in long.	$+\,35'\,32''$
Declinatio . .	$20°\,58'\,50''$	in latit.	$+\,3'\,5''$
Longitudo .	$2^s\,21°\,34'\,42''$	in declin.	$+\,4'\,3''$
Latit. auſtr.	$2°\,13'\,26''$	Parall. aequat.	$59'\,25''$
Lunae Long. ver.	$2^s\,22°\,21'\,38''$	Semidiameter	$16'\,12''$
Latit. auſtr.	$1°\,21'\,20''$	Par. horiz. pro ♁ ſphaeroid.	$59'\,14''$
Declinat. bor.	$21°\,53'\,47''$	Aequ. temp. ad temp. ver. add.	$3'\,48''$

ex quibus concluditur coniunctionis verae ſtellae ζ♉︎ cum Luna tempus Pariſinum medium 1770. d. 1. April $2^h\,40'\,45''$.

Conſtitutis his elementis, pro tribus iſtis momentis, quibus ſtella in filo verticali obſeruata eſt, differentias longitudinum et latitudinum ſtellae et Lunae ope angulorum parallacticorum indagaui. Huius calculi potiora elementa in ſequenti laterculo exhibentur; in figura vero 1: Tab. XXXI repraeſentet Z zenit loci propoſiti, P et Π polos aequatoris et eclipticae, S locum ſtellae, Λ et L locum Lunae apparentem et verum. Mora ſemidiametri ☽ per meridianum inuenta eſt 1′ 13″; per circulos autem iſtos verticales 1′ 29″.

Calculus obſeruationis.

	I^mae	II^dae	III^tiae
Temp. medio	7^h 36′ 58″	7^h 41′ 23″	7^h 45′ 43″
Diff. app. alt. centri ☽ et ſtellae	0° 38′ 59″	0° 40′ 9″	0° 41′ 21″
Parall. altitud. Λ L . .	42′ 11″	42′ 37″	43′ 0″
Differ. vera altitud . .	1° 21′ 10″	1° 22′ 46″	1° 24′ 21″
Differ. azimutalis appar. Λ λ	0° 20′ 4″	0° 21′ 51″	0° 23′ 29″
Ducatur L μ cum Z λ parall. eritque			
Λμ, a Λλ ſubtrahendum =	− 14″	− 14″	− 14″
Parall. azimutalis	+ 16″	+ 16″	+ 17″
Differ. azim. vera L *l* . .	0° 20′ 6″	0° 21′ 53″	0° 23′ 32″
Angul. diſtantiae Z S L . .	13° 54′ 32″	14° 48′ 36″	15° 36′ 3″
Diſtantia centr. vera S L	1° 23′ 37″	1° 25′ 36″	1° 27′ 33″
Angul. parall. Z S P . .	34° 49′ 32″	35° 14′ 20″	35° 37′ 20″
Ang. poſitionis P S Π . .	3° 34′ 50″	. . . .	. . . .
Hinc			
Ang. coniunctionis Π S L	52° 18′ 54″	53° 37′ 46″	54° 48′ 13″
Differentia latitud. S *m* . .	0° 51′ 7″	0° 50′ 46″	0° 50′ 28″
. . . . . longitud L *m*	1° 6′ 9″	1° 8′ 55″	1° 11′ 32″

vbi

vbi quidem arcus L *m* reductione ad eclipticam non indiget.

Ex inuentis his longitudinum differentiis, ope motus horarii Lunae in longitudinem = 35′. 32″, per ſingulas iſtas obſeruationes tempus medium coniunctionis verae definitur; ex quo cum tempore Pariſino, quod eſt 2ʰ. 40′. 45″, collato differentia meridianorum innoteſcit.

	Temp. med. coni. verae	Differ. meridian.
ex obſeru. I.	5ʰ. 45′. 16″	3ʰ. 4′. 31″
II.	5ʰ. 45′. 1″	3ʰ. 4′. 16″
III.	5ʰ. 44′. 56″	3ʰ. 4′. 11″.

Sumto itaque medio ſtatui poteſt Longitudo oppidi Sisran a Lutetiis Pariſiorum verſus orientem

in tempore . . . . . 3ʰ. 4′. 19″
vel in partibus circuli . . 46°. 4′. 45″.

VI. Obſeruatio Immerſionis II^di Satellitis Iovis ibidem inſtituta.

Horologio in hac obſeruatione eodem, quo in praecedente, vſus ſum; et quae ad motum eius diiudicandum pertinent, ibi iam ſunt recenſita. Die 29 Martii 1770. poſt mediam noctem, monſtrante horologio 2ʰ. 14′. 56″, per tubum *Dollondianum* achromaticum 10. pedum, II^dus Satelles Iouis in vmbram penitus immergi viſus eſt; quae ergo eclipſis accidit tempore vero ſub meridiano oppidi Sisran die 29. Martii 14ʰ. 15′. 9″.

Obſer-

Obſeruationem hanc pro exactiſſima non vendito, ſiquidem facta eſt aëre vaporibus pleno et Iouo vix ſex gradus ſupra horizontem eleuato. Operae tamen pretium eſt, eam comparari cum ſua correſpondente, quam in vrbe Tſcherkaski prope Maeotidem ſimili tubo et fauente coelo *Chriſtoph. Eulerus* inſtituit, vbi quidem haec immerſio contigit temp. vero d. 29. Martii $13^h. 40'. 30''$. Quamobrem inde concluditur differentia meridianorum

inter Sisran et Tſcherkaski . . . $0^h. 34'. 39''$

adeoque inter Tſcherkaski et Lutetias Pariſ. $2^h. 29'. 38''$

vel in partibus circuli . . . . $37°. 24'. 30''$.

ita, vt longitudo huius vrbis ab inſula Ferri ſtatuenda ſit $57°. 17'. 30''$; latitudo vero obſeruata eſt $47°. 13'. 40''$.

Obſeruatio haec pro Geographia haud contemnendi vſus eſt; liquet enim inde, in mappis etiam praeſtantiſſimis oſtium Tanais ſeu littus orientale Maeotidis ad tres vsque gradus nimis ad orientem eſſe poſitum; ex quo interuallum inter mare nigrum et Caſpicum totidem gradibus augendum eſt; ita, vt ſuſpicio, in quam dudum inciderunt Geographi, bina iſta maria nimis eſſe in mappis ſibi inuicem vicina, hac obſeruatione confirmata et extra dubium poſita eſſe cenſenda ſit.

VII.

VII. Obſeruatio Emerſionis I^mi Satellitis Iovis Kiouii inſtituta.

Ex obſeruationibus Solis correſpondentibus inveni

d. 13. Aug. 1770. merid. ver. $11^h. 57'. 21''. 3$
d. 15. . . . . $11^h. 56'. 25''.$

ex quo concluditur retardatio penduli diurna ſuper tempus medium $= 17''$; quam tamen exactius $20''$ ſtatui poſſe exiſtimo.

Die 14. Auguſti, aëre ſereno et tranquillo, ſed luce crepuſculari adhuc ſenſibili, monſtrante horologio $7^h. 45'. 51''$, I^mus Satelles Iouis, ex vmbra emergere tubo achromatico 10. ped. obſeruatus eſt; cuius emerſionis inuenitur

temp. ver. . . . . $7^h. 49'. 9''.$
Eadem Pariſiis ſec. ephem. contigit . . . $5^h. 53'. 59''.$

vnde prodit merid. different. in tempore $1^h. 55'. 10''.$
vel in part. circuli . . $28°. 47'. 30''.$

quae determinatio, cum ephemeridum pro iſto tempore cum coelo conſenſus ex aliis obſeruationibus huius ſatellitis confirmetur, a veritate multum diſcrepare non poteſt.

Eleuationem poli concluſi $50°. 30'$; quae vltra vnum minutum primum incerta non eſt; nihil enim in altitudinibus ☉ meridianis deſiderabatur, niſi quod eas per errorem quadrantis corrigere non

 licuit,

licuit, cuius verificationi neceſſitas inopina repentini ex iſta vrbe abitus obſtitit.

VIII. Declinatio acus magneticae.

Vſae ſub latitud. bor. 54° 53′ et 53° 33′ verſus orientem a Lutetiis Pariſiorum acus magnetica 5 poll. longa, die 29 Septembr. n. ſt. 1769 repetito ſollicite experimento, 1° 30′ a ſeptentrione verſus ortum declinare reperta eſt.

IX. Obſeruationes meteorologicae.

1769. d. 26. Septembr Vſae hora 8 veſpertina, Aurora borealis inuſitatae prorſus claritatis viſa eſt, fulgura quaquauerſum eiaculans vehementiſſima. Huius aurorae aſpectus, nunciantibus nouellis publicis, per omnem fere Germaniam patuit; eodem die in regionibus Rheni terra vehementi motu concuſſa refertur; huius phaenomeni apparitio tam late extenſa, vt nonnunquam eadem aurora bor. per totam Europam viſa fuerit, de ingenti materiae eam generantis altitudine dubitare non ſinit.

1770. d. 2. Apr. Anrora bor. inſignis claritatis in vrbe Sisran viſa.

1770. d. 12. Febr. tenue veſtigium luminis zodiacalis poſt ☉ occaſum; eadem apparitio etiam d. 27 obſeruata. d. 28 Martii lumen hoc Caſſinianum pulcerrimum viſum eſt inter horam 9 et 10, ab horizonte ad conſtellationem pleiadum vsque protenſum.

Halones

Halones circa Lunam viſi ſunt diebus 14 et 15 Februar, quorum poſterior notatu inprimis dignus. Taceo phaenomena halonum vſitata; id vnum annoto; exiguo ſupra halonem primarium interuallo viſus eſt arcus alius halonis ſecundarii, ſed inuerſi, Lunae conuexitatem obuertentis, qui pariter, ac primarius, colores, iridi aemulos, ſed ordine inuerſo oſtendebat. Dies praeceſſit ſubnubila. Thermom. *De l'Islianum* 178°. Halonis eiusmodi excentrici apparitio fallor, an cum Hugeniana horum phaenomenorum explicatione, a particulis glacialibus, in atmoſphaera pendulis petita, haud ita facile conciliari poteſt.

DETERMINATIO LONGITVDINIS GEOGRAPHICAE PLVRIMORVM LOCORVM, IN QVIBVS ECLIPSIS SOLIS A. 1769. OBSERVATA FVIT.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Inter methodos vulgo vſitatas, pro determinandis longitudinibus locorum ex inſtitutis obſeruationibus Eclipſium Solis, frequentiſſimo vſu apud Aſtronomos inualuit ea, qua ex Longitudine et altitudine Nonageſimi, Parallaxes Lunae tam in Longitudinem quam Latitudinem determinantur, indeque verum tempus coniunctionis Solis et Lunae eruitur. Quum igitur eodem fere tempore, quo ad praeſcriptum elegantiſſimae Methodi ab Illuſtr. *Eulero* inventae (quae in Part. II. Tom. XIV. horum Commentar. expoſita legitur), plurimarum obſeruationum ſuper Eclipſi Solari Anno 1769. factarum calculum inſtituiſſem; auidus eſſem ſcire, an Methodo Nonageſimi adhibita ad easdem pertingere liceret concluſiones; vt has obſeruationes, ſecundum praecepta quoque Methodi Nonageſimalis computarem, in animum induxi. Laborem autem hunc adgreſſus, inſignes

ſignes mihi ſtatim ſe obiecerunt difficultates, quippe quum inuenerim iſtam Methodum vti ab Aſtronomis communiter adhibetur, omnino operoſiſſimam eſſe et variis defectibus laborare, quorum in numero ſequentes praecipui mihi viſi ſunt: I°. Formulae quae pro computandis Parallaxibus tam Longitudinis quam Latitudinis, imprimis ſub hypotheſi figurae telluris Sphaeroidicae, in ſcriptis Aſtronomorum adferri ſolent, non ſolum quam maxime prolixae et intricatae ſunt, ſed etiam propter ſaepius repetendas approximationes ad calculum moleſtiſſimae. II°. Methodi vulgares definiendi correctiones Longitudinis et Latitudinis Lunae, omnino incertae ſunt et ſaepius in graues errores inducunt. III^{tio} Communiter reſpectus haberi non ſolet ad correctiones, quibus Parallaxis Lunae aut Diametri Solis vel Lunae indigere poſſint, et licet probabile ſit has correctiunculas fore quam minimas, eas tamen minime negligere licebit, donec ad eiusmodi peruentum fuerit concluſiones, ex quibus appareat id ſine ſenſibili errore fieri poſſe.

2. Dum itaque ob rationes modo allegatas Methodum vulgarem deſerere coactus fui, in aliam incidi ab ea in paucis diuerſam, ſed vt ſpero multo concinniorem et ad calculum ineundum accommodatiorem, ad cuius quoque praeſcriptum, plerasque obſeruationes Eclipſis Solis A. 1769. computaui, calculis his cum iis qui Tomo praecedenti inſerti ſunt egregie conſentientibus. Breuem igitur expoſi-

 tionem

tionem horum calculorum et concluſionum inde deductarum eo minus Aſtronomis diſplicituram confido, quod ſine exacta determinatione Longitudinum pro iis locis, vbi tranſitus Veneris obſeruatus fuit, obſeruationes poſterioris huius Phaenomeni inutiles euadant ad determinandam quantitatem Parallaxis Solaris, dum ea tamen loca excipienda ſunt, in quibus, tam ingreſſum quam egreſſum Veneris obſervare licuit. Congruum autem mihi viſum eſt, hanc tractatiunculam in tres dispertiri Articulos, quorum *primus* continebit delineationem nouae Methodi ex obſeruatis Eclipſibus Solaribus Longitudinem locorum determinandi, *ſecundus* breuem ſiſtet expoſitionem elementorum per calculum ex ſingulis obſeruationibus deductorum et *tertius* denique modum ex aequationibus finalibus, non ſolum correctiones elementorum Aſtronomicorum inueniendi, ſed etiam veras Longitudines locorum determinandi.

ARTICVLVS I.

Expoſitio Methodi ex obſeruationibus Eclipſium Solis, Longitudines locorum determinandi.

3. Quum in praeſenti disquiſitione verae figurae telluris rationem habere conſtituimus, e re quoque erit pro vnoquoque loco, in quo Eclipſis Solis obſeruata fuit, cognoſcere tum diſtantiam huius loci a centro telluris, cum etiam angulum quem recta ad centrum telluris ducta facit cum linea ad ſuper-

ſuperficiem telluris hoc in loco perpendiculari. Sit itaque A L B meridianus quidam terreſtris per datum terrae locum L tranſiens, qui aequatori occurrat in puncto A, Polo in B exiſtente, ſupponamus autem eius figuram eſſe ellipticam, quoniam huiusmodi figuram a vera non multum abludere poſſe conſtat, ductis igitur rectis A C et B C ad centrum telluris C, hae rectae axes ellipſeos conſtituent. Deinde ducatur etiam L O normalis ad ſuperficiem telluris in puncto L, quae quum in planum ACB incidat, occurrat rectae A C in puncto O et iungatur L C. Iam ſi productis C L et O L bina in coelo puncta *z* et Z reſpondere concipiantur; liquet poſterius id eſſe, quod communiter nomine zenith venire ſolet, nos vero idem zenith apparens appellabimus, vt diſtinguatur a puncto *z*, quod nobis zenith verum dicetur. Deinde euidens quoque eſt angulum L O A aequalem eſſe Latitudini loci L, quam littera L indigitabimus. T. XXXI. Fig. 2.

4. Vt autem nunc valores anguli O L C et rectae L C inueſtigentur, deſcribatur centro C radio C A circulus, cui recta LP ex L ad AC normaliter demiſſa occurrat in puncto M et iungatur CM, tum vero anguli A C L et A C M litteris N et M inſignientur. Quoniam igitur A L B ſupponitur eſſe ellipſis atque ratio axium A C et B C cognita aſſumitur, ſtatuamus A C : B C : : 1 : *n*, adeo vt ſit B C $= \frac{1}{n}$ A C, quum vero habeatur PL : PM : : AC : BC, erit Tang. M : Tang. N : : P L : P M : : 1 : *n*. Vlterius quum

quum ſit Tang. L : Tang. N :: PC : PO, per proprietatem ellipſis vero PC : PO :: ACq : BCq :: 1 : n^2 erit Tang. L : Tang. N :: 1 : n^2, vnde Tang. N = n^2 Tang. L, per quam itaque formulam ex dato angulo L invenitur N, hincque OLC = L − N. Porro ob n^2 Tang. M^2 = Tang. N^2 erit quoque Tang. M^2 Tang. L. Tang. N, hincque

$$\text{ſin. } M^2 \text{ coſ. L coſ. N} = \text{coſ. } M^2 \text{. ſin. L. ſin. N},$$

ex quo colligitur

$$\text{coſ. L. coſ. N} = \text{coſ. } M^2 \text{ coſ. (L − N)}, \text{ vnde}$$

$$\text{coſ. } M^2 : \text{coſ. } N^2 :: \text{coſ. L} : \text{coſ. N coſ. (L − N)}, \text{ eſt vero}$$

$$\text{L C } q : \text{M C } q :: \text{coſ. } M^2 : \text{coſ. } N^2, \text{ quapropter erit}$$

$$\text{L C } q : \text{A C } q :: \text{coſ. L} : \text{coſ. N coſ. (L − N) ſeu}$$

$$\text{L C} = \text{A C} \sqrt{\frac{\text{coſ. L}}{\text{coſ. N coſ. (L − N)}}}.$$

Formulae igitur pro angulo N et linea LC inueniendis ſequentes notari merentur:

$$\text{Tang. N} = n^2 \text{ Tang. L}; \quad \text{LC} = \text{AC} \sqrt{\frac{\text{coſ. L}}{\text{coſ. N coſ. (L − N)}}}$$

in poſteriori autem ob angulum L − N ſemper minimum, etiam termino coſ. (L − N) omiſſo, habetur $\text{LC} = \text{AC}\sqrt{\frac{\text{coſ. L}}{\text{coſ. N}}}$. Quoniam angulus ZLz = CLO, euidens iam eſt, modo detur ratio inter diametrum aequatoris et axem telluris, pro vnoquoque telluris loco facile inueniri poſſe diſtantiam inter Zenith verum et apparens et ea inuenta diſtantias corporum coeleſtium a Zenith vero ſine vlla difficultate computari poſſe.

5. Hiſce

5. Hiſce igitur praemonitis, repraeſentet P z M meridianum alicuius loci, in quo Eclipſis Solis obſeruata fuit, ſitque eius Zenith verum in z et Polus aequatoris in P. Pro dato tempore obſeruationis, ſcilicet aut initii vel finis obſeruati, aut Phaſeos alicuius, ſit M P Q angulus horarius, occurrat autem circulus declinationis P Q aequatori ♈ M Q in puncto Q, atque propter datos arcus M Q et ♈ Q, priorem ſcilicet angulo M P Q aequalem, poſteriorem aſcenſioni rectae Solis pro hoc tempore, dabitur quoque ♈ M $= \pm$ ♈ Q $\mp$ M Q, vbi iudicium haud difficile eſt, quaenam ſigna pro quouis caſu obtineant. Ad cognoſcendam vero aſcenſionem rectam Solis pro tempore obſeruationis, ſufficiet Longitudinem loci, in quo obſeruatio facta a vera non multum vltra aliquot minuta prima abludentem aſſumere. Quin etiam, ſi in aeſtimanda Longitudine grauior committeretur error, calculo ad finem perducto Longitudo loci ad veritatem multo propius accedens inueniri poteſt, cum qua calculum denuo inire licebit.

6. Deſignet iterum P z M meridianum, ♈ M T aequatorem et ♈ N ♋ eclipticam polo eius in Π exiſtente, ductis quadrantibus circulorum maximorum Π P ♋ et Π z N, prior erit colurus ſolſtitiorum qui aequatori occurrat in puncto T, poſterior vero in ecliptica definiet punctum N quod iam punctum Nonageſimi adpellare licebit, etſi a puncto Nonageſimi communiter ſic dicto diuerſum ſit, hoc Tab. XXXI Fig. 4.

enim definitur quadrante circuli maximi Π Z N′ per zenith apparens Z ducto, ambobus tamen punctis dum Π eſt in meridiano, plane coincidentibus. Situm vero iſtius puncti N calculo iam facile definire poterimus. In triangulo enim Sphaerico Π P z ob data latera Π P et P z nec non angulum interiacentem Π P $z = 180 - MT = 90 \pm$ ♈ M, dabitur per cognitas regulas Trigonometriae Sphaericae, tam latus Π z quam angulus P Π z = N ♋, vnde Nonageſimi non ſolum longitudo, ſed etiam diſtantia a zenith vero innoteſcet.

7. Priusquam ad inueſtigationem formularum pro parallaxibus Longitudinis et Latitudinis Lunae progrediamur, opus eſt, vt expreſſio pro parallaxi
Tab. XXXI diſtantiae ipſius a zenith vero inueſtigetur. Sit igitur
Fig. 5. L locus obſeruationis, S locus Lunae vel alius cuiuscunque aſtri, ſiue in ipſo meridiano ſeu extra eundem, ductis lineis CLz, CS et LS, patet diſtantiam aſtri a zenith vero z e centro telluris C viſam menſurari angulo LCS, parallaxin autem huius diſtantiae per angulum LSC exprimi. Quum iam ſit

zLS = LCS + LSC, erit ſin. zLS = ſin LCS coſ. LSC + coſ. LCS ſin. LSC,

quoniam autem habeatur

ſin. zLS : ſin. LSC : : CS : CL erit

$\frac{CS}{CL}$. ſin. LSC = ſin. LCS. coſ. LSC + coſ. LCS. ſin. LSC

ex

ex quo deducitur

$$\text{Tang. } LSC = \frac{\text{ſin. } LCS}{\frac{CS}{CL} - \text{coſ. } LCS}$$

Si iam parallaxis aequatorea Lunae horizontalis dicatur Π, erit $\Pi = \frac{AC}{CS}$, ideoque ſi ſtatuatur $CL = \varepsilon AC$ vbi valorem numeri ε per formulam § 4 datam definire licet, habebitur $\frac{CS}{CL} = \frac{CS}{\varepsilon AC} = \frac{1}{\varepsilon \Pi}$, hoc igitur valore in aequatione ſuperiori ſubſtituto, conſequemur $\text{Tang. } LSC = \frac{\varepsilon \Pi . \text{ſin. } LCS}{1 - \varepsilon \Pi . \text{coſ. } LCS}$. Quum pro noſtro inſtituto, non praeciſe opus ſit hanc parallaxin diſtantiae a zenith vero cognoſcere, quia ſtatim parallaxes Longitudinis et Latitudinis inueſtigare conſtituimus, huic formulae omnino pro vſu praeſenti acquieſcere poterimus, ceterum quoniam alioquin ſaepius eiusmodi occurrant caſus, vbi ipſam parallaxin diſtantiae a zenith noſſe iuuat, haud ſuperfluum exiſtimauimus, ſequentem expreſſionis modo allatae transformationem, vt videtur non inelegantem heic ſubiungere. In formula noſtra loco Π introducatur ſin. Π, quod eo magis facere licebit, quia exactius ſit $\frac{AC}{CS} = \text{ſin. } \Pi$ quam $= \Pi$, eritque

$$\text{Tang. } LSC = \frac{\varepsilon \,\text{ſin. } \Pi . \text{ſin. } LCS}{1 - \varepsilon \,\text{ſin. } \Pi . \text{coſ. } LCS},$$

ponatur igitur $\varepsilon \,\text{ſin. } \Pi = \text{ſin. } \Phi$, ex quo fiet

$$\text{Tang. } LSC = \frac{\text{ſin. } \Phi . \text{ſin. } LCS}{1 - \text{ſin. } \Phi . \text{coſ. } LCS}.$$

Hinc igitur deducitur

$$\text{ſin. } \Phi = \frac{\text{Tang. } LSC}{\text{ſin. } LCS + \text{Tang. } LSC . \text{coſ. } LCS},$$

indeque

$$\frac{1 + \text{ſin.}\,\varphi}{1 - \text{ſin.}\,\varphi} = \frac{\text{ſin. L C S} + 2\,\text{Tang. L S C. Coſ.}\,\tfrac{1}{2}\text{L C S}^2}{\text{ſin L C S} - 2\,\text{Tang. L C S ſin.}\,\tfrac{1}{2}\text{L C S}^2}$$

$$= \text{Cot.}\,\frac{\text{L C S}}{2}\left(\frac{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\text{L C S Coſ. L S C} + \text{Coſ}\,\tfrac{1}{2}\text{L C S. ſin L S C}}{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\text{L C S Coſ. L S C} - \text{Coſ}\,\tfrac{1}{2}\text{L C S ſin. L S C}}\right)$$

$$= \text{Cot.}\,\tfrac{\text{L C S}}{2}\,\text{Tang.}\,(\text{L S C} - \tfrac{\text{L C S}}{2}),$$

Eſt vero $\frac{1 + \text{ſin.}\,\Phi}{1 - \text{ſin.}\,\Phi} = \text{Tang.}\,(\frac{90 + \Phi}{2})^2$, proinde fiet

$$\text{Tang.}\,(\text{L S C} - \tfrac{\text{L C S}}{2}) = \text{Tang.}\,\tfrac{\text{L C S}}{2}\,\text{Tang.}\,(\tfrac{90 + \Phi}{2})^2.$$

T. XXXI. Fig. 6. 8. Sit iam Π Polus eclipticae, ♈ N P ecliptica, *z* zenith verum atque ducta quadrante Π *z* N, N punctum Nonageſimi, ſi locus Lunae a centro Telluris viſus fuerit in L, et ducto arcu circuli maximi *z* L λ capiatur L λ aequalis parallaxi diſtantiae a zenith, erit λ locus Lunae apparens pro obſeruatore, cuius zenith verum in *z*. Ducantur iam per Polum eclipticae quadrantes Π L P et Π λ *p* eclipticae in punctis P, *p* occurrentes; euidens eſt parallaxin Longitudinis Lunae exprimi angulo P Π *p* et parallaxin Latitudinis differentia arcuum Π L et Π λ. Si igitur ex λ in Π L demittatur perpendicularis λ *l*, coincidet ea proxime cum circulo minori polo Π per λ deſcripto, vnde parallaxis Latitudinis iam exprimetur per arculum L *l*, Longitudinis vero per P *p*. In triangulo vero L λ *l* habetur λ *l* = L λ ſin. λ L *l* et L *l* = L λ coſ. λ L *l*, quum igitur ſit

L λ =

$L\lambda = \frac{\varepsilon\Pi\ \text{ſin.}\ zL}{1-\varepsilon\Pi\ \text{coſ.}\ zL}$, erit $\lambda l = \frac{\varepsilon\Pi.\ \text{ſin.}\ zL.\ \text{ſin.}\ \lambda Ll}{1-\varepsilon\Pi\ \text{coſ.}\ zL}$ atque $Ll = \frac{\varepsilon\Pi\ \text{ſin.}\ zL.\ \text{coſ.}\ \lambda Ll}{1-\varepsilon\Pi.\ \text{coſ.}\ zL}$, deinde ob $Pp = \frac{\lambda l}{\text{coſ.}\ PL}$ fiet $Pp = \frac{\varepsilon\Pi\ \text{ſin.}\ zL.\ \text{ſin.}\ \lambda Ll}{\text{coſ.}\ PL(1-\varepsilon\Pi\ \text{coſ.}\ zL)}$.

9. Ducatur nunc per z in ΠL normalis arcus zK, eritque in triangulo rectangulo $z\Pi K$, ſin. zK = ſin. Πz ſin. $z\Pi K$ = ſin. Πz ſin. NP, at in triangulo rectangulo zLK, ſin. zK = ſin. zL ſin. zLK, ideoque ſin. zL. ſin. zLK = ſin. Πz. ſin. NP pro Parallaxi igitur longitudinis haec prodibit expreſſio:

$$\text{Par. Long.} = Pp = \frac{\varepsilon\Pi\ \text{ſin.}\ \Pi z.\ \text{ſin.}\ NP}{\text{coſ.}\ PL(1-\varepsilon\Pi\ \text{coſ.}\ zL)} = \frac{\varepsilon\Pi\ \text{ſin.}\ zK}{\text{coſ.}\ PL(1-\varepsilon\Pi\ \text{coſ.}\ zL)}.$$

Vlterius quum ſit Tang. ΠK = Tang. Πz coſ. NP, inuento ΠK habebitur $LK = 90° - \Pi K - LP$, tum vero erit coſ. λLl = coſ. $KLz = \frac{\text{Tang.}\ LK}{\text{Tang.}\ Lz}$, quare fiet Paral. Latit. $= \frac{\varepsilon\Pi\ \text{Tang.}\ LK\ \text{coſ.}\ zL}{1-\varepsilon\Pi\ \text{coſ.}\ zL}$.

Circa has expreſſiones parallaxium Longitudinis et Latitudinis notandum eſt, eas non quidem exacte veras eſſe, ſiquidem Ll non praeciſe ſit aequalis differentiae arcuum ΠL et $\Pi\lambda$, neque Pp exacte $= \frac{\lambda l}{\text{coſ.}\ PL}$, aberratio vero harum expreſſionum a veris valoribus tantilla erit, vt pro Luna nunquam ad vnum minutum ſecundum aſſurgat. Ceterum ſi quis has parallaxes accuratius inueſtigare voluerit, ſequenti modo res ipſi peragenda eſt. Inuento primum arcu $z\lambda$, ex datis iam Πz, ΠL, zL et $L\lambda$, quaerat $\Pi\lambda$ ope huius formulae

$$\text{coſ.}\ \Pi\lambda = \frac{\text{coſ.}\ \Pi L\ \text{ſin.}\ z\lambda - \text{coſ.}\ \Pi z.\ \text{ſin.}\ L\lambda}{\text{ſin.}\ zL},$$

 vel

vel etiam

$$\text{coſ. } \Pi\lambda = \text{coſ. } \Pi L . \text{coſ. } L\lambda - \text{ſin. } \Pi L \text{ ſin. } L\lambda \text{ coſ. } \Pi L z.$$

Differentia inter $\Pi\lambda$ et ΠL dabit parallaxin Latitudinis. Porro habetur ſin. $\lambda \Pi L = \frac{\text{ſin. } L\Pi z . \text{ſin. } L\lambda \text{ ſin. } \Pi z}{\text{ſin. } \Pi\lambda \text{ ſin. } Lz}$, vnde cognoſcetur angulus $\lambda \Pi L =$ parallaxi Longitudinis. In praeſenti autem negotio tantis ambagibus opus non eſt. Denique notari conuenit in formulis parallacticis, loco parallaxis Lunae horizontalis aequatoreae, in Π ſubſtituendam eſſe hanc parallaxin, parallaxi Solis mulctatam.

10. Quum in Tabulis plerumque aſſignari ſoleat, diameter Lunae horizontalis qualis ſub aequatore videtur, nunc neceſſum eſt, vt primum quaeratur menſura huius diametri ex centro telluris ſpectatae, erit vero, ſi diameter horizontalis ſub aequatore viſa dicatur D, ea quae e centro ſpectatur D coſ. Π, loco autem huius D coſ. Π, iam ſimpliciter ſcribamus D. Deinde vt valor diametri Lunae apparentis pro dato obſeruationis loco et tempore inueniatur, ſit iterum S locus Lunae apparens, atque ſi diameter Lunae apparens pro diſtantia apparente zLS a zenith vero dicatur Δ, erit $\Delta : D :: SC : LS$, quum igitur ſit

Tab. XXXI Fig. 5.

$$LS = \sqrt{(SCq + LCq - 2\, SC . LC . \text{coſ. } LCS)},$$

atque $\frac{LC}{SC} = \varepsilon\Pi$, prodibit

$$\Delta : D :: 1 : \sqrt{(1 + \varepsilon^2 \Pi^2 - 2\varepsilon\Pi \text{ coſ. } LCS)}$$

ex quo proxime fit $\Delta = \frac{D}{1 - \varepsilon\Pi \text{ coſ. } LCS}$

quae

quae expreſſio omnino tam prope ad veritatem accedit, vt abberratio pro nulla reputari queat.

11. Quum nunc cognita ſit diameter Lunae apparens, cum diametro Solis, dabitur diſtantia centrorum Solis et Lunae apparens ⊙ ☽, quippe quae pro obſeruato initio vel fine Eclipſis aequatur ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, ſi autem Phaſis quaedam obſeruata fuerit, ad ſemidiametrum Lunae apparentem addere oportet partem lucidam diſci Solis ex obſeruatione concluſam et ex ſumma ſubtrahere ſemidiametrum Solis, quo facto prodibit diſtantia centrorum apparens. Iam ſi ex ☽ in eclipticam demittatur perpendicularis ☽ B erit ea aequalis Latitudini Lunae apparenti, quae inuenitur ſi ex Latitudine Lunae geocentrica ſubtrahatur parallaxis Latitudinis, tum vero in triangulo rectangulo ☽ ⊙ B ex datis ⊙ ☽ et ☽ B habetur Tab. XXXI Fig. 7.

$$B\odot = \sqrt{}(\odot☽ q - ☽ B q) = \sqrt{}(\odot☽ + ☽ B)(\odot☽ - ☽ B),$$

quoniam ſiue vllo errore, hoc triangulum tamquam rectilineum ſpectari poteſt. Tum autem B⊙ ± Parallaxi Longitudinis Lunae, dabit differentiam longitudinum Solis et Lunae, quae ſi per motum horarium Lunae relatiuum in Ecliptica in tempus convertatur, atque quantitas temporis hinc oriunda ad datum tempus obſeruationis addatur vel ab eo ſubtrahatur, quemadmodum ex circumſtantiis facile diiudicare licebit; orietur tempus verum coniunctionis Solis et Lunae, ad meridianum loci in quo obſervatio facta eſt relatum. Quodſi igitur in pluribus

locis

locis obſeruationes Eclipſis Solis inſtitutae fuerint, pro omnibus ad praeſcriptum huius Methodi, tempora coniunctionis Solis et Lunae determinari poterunt, differentiae autem inter haec tempora, differentias quoque Meridianorum his locis reſpondentium, in tempore expreſſas, exhibebunt.

12. Hucusque a nobis ſuppoſitum fuit, omnia elementa Aſtronomica ex Tabulis deſumta, quibus calculus Eclipſis Solis ſuperſtruitur, veritati perfecte eſſe conſentanea, quum vero imprimis quod ad Longitudinem et Latitudinem Lunae attinet, Tabulis Aſtronomicis vix maior certitudo, quam quae intra vnum minutum primum continetur adſcribi queat; tum vero incertum ſit, an non parallaxis Lunae horizontalis aequatorea in Tabulis aſſignata, tantillam admittat correctionem, idque praecipue ob incertitudinem verae figurae Telluris; cum etiam probabile denique ſit ſemidiametros Solis et Lunae aliquam admittere poſſe correctiunculam ſiue realem, ſeu ex refractione atmoſphaerae Lunaris vel inflexione radiorum Solis prope limbum Lunae oriundam, neceſſum omnino eſt, vt inquiramus, quomodo concluſio noſtra pro tempore coniunctionis ob huiusmodi correctiones immutetur. Quod igitur primum attinet correctionem, qua Longitudo Lunae ex tabulis deſumta indiget, tenendum eſt vix opus eſſe, vllam eius hoc in negotio habere rationem, ſiquidem Parallaxes Longitudinis et Latitudinis, propter aliquantum immutatam Longitudinem Lunae ſenſibilem non

patian-

patiantur variationem. Si enim ponamus correctionem Longitudinis ad 1′ aſſurgere, atque arcum N P eſſe ſatis paruum, parallaxis Longitudinis inde 2″ vel ad ſummum 3″ immutabitur. Quamuis itaque correctionem Longitudinis in ſequentibus calculis plane praetermiſimus, pro iis tamen caſibus vbi N P paruus eſt, huius etiam correctiunculae pro parallaxi Longitudinis oriundae rationem habuimus conſ. §. 24. Vt vero ratio habeatur reliquarum correctionum ponamus eſſe correctionem latitudinis y, ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae δ, quoniam hic imprimis ad obſeruationes initii et finis Eclipſeos attendimus, denique correctionem parallaxeos Lunae horizontalis aequatoreae $= \pi$. Atque quum nunc inquirendum ſit, quam variationem ſubeat differentia apparens longitudinum Solis et Lunae, habebimus eam ſtatim $= d.$ B ☉ $\pm\, d.p$, vbi p parallaxin Longitudinis deſignat. Deinde quum ſit B ☉ cathetus trianguli rectanguli cuius hypothenuſa eſt ☉ ☽, alter vero cathetus ☽B aequalis Latitudini Lunae ipſa parallaxi Latitudinis mulctatae, haud difficile erit ex datis correctionibus ſummae ſemidiametrorum, latitudinis et Parallaxis, variationem ipſius B ☉ deducere.

13. Supponamus igitur primum ☉ ☽ conſtantem, at ☽ B particula quadam augeri debere, ſi itaque centro ☉ radio ☉ ☽ deſcribatur arcus circuli ☽ L et ducatur L b ita, vt ſit L b vera quantitas latitudinis Lunae apparentis, tum vero iungatur L☉ T. XXXI. Fig. 8.

et ducatur ☽ m parallela ipſi B ⊙, exprimet B b $=$ ☽ m diminutionem ipſius B ⊙ propter augmentum Latitudinis apparentis oriundam. Quum vero ſit △ ☽ L m ∾ ☽ ⊙ B erit ☽ m : L m : : ☽ B : B ⊙ ideoque B b $=$ ☽ m $=$ L m Tang. ☽ ⊙ B. Si iam dicatur parallaxis Latitudinis p', habebitur eius correctio ex correctione π deducenda $= \frac{p'\pi}{\Pi}$, vnde fiet L $m = y - \frac{p'\pi}{\Pi}$, conſequenter ſi angulus ☽ ⊙ B per Φ exprimatur erit B $b = (y - \frac{p'\pi}{\Pi})$ Tang. ☽ ⊙ B $= (y - \frac{p'\pi}{\Pi})$ Tang. Φ. Ponamus Latitudinem apparentem nulla indigere correctione, at ſummam ſemidiametrorum quantitate δ augeri debere, productis igitur recta ☽ m ipſi B ⊙ parallela et arcu ☽ L, ⊙ l ipſis ita occurrat in l et n, vt ſit $ln = \delta$, tumque demiſſa perpendiculari $l b'$, erit augmentum ipſius B ⊙ propter correctionem δ oriundum $=$ B b' ex ſimilitudine autem triang. l ☽ n et ☽ ⊙ B habetur B b' ($=$ ☽ l) : ln : : ⊙ ☽ : B ⊙, vnde B $b' = \frac{\delta}{\text{coſ.}\,\Phi}$ $= \delta$ Sec. Φ. Vtramque igitur correctionem ipſius B ⊙ colligendo fiet:

$$d.\mathrm{B}\odot = \mathrm{B}b' - \mathrm{B}b = \delta\,\mathrm{Sec.}\,\Phi - y.\,\mathrm{Tang.}\,\Phi + \frac{p'\pi}{\Pi}\,\mathrm{Tang.}\,\Phi.$$

Denique qnoniam habemus $dp = \frac{p\pi}{\Pi}$, tota correctio diſtantiae Solis et Lunae ſecundum longitudinem ſic erit expreſſa:

$$d.\mathrm{B}\odot \pm d.p = \delta\,\mathrm{Sec.}\,\Phi - y\,\mathrm{Tang.}\,\Phi + \frac{\pi}{\Pi}(p'\,\mathrm{Tang.}\,\Phi \pm p)$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperius valebit, dum parallaxis Longitudinis ad B ⊙ addi debet, inferius vero

vero ſi a B ☉ ſubtrahenda ſit. Si haec correctio nunc inuenta in tempus conuertatur et valor inde oriundus addatur ad expreſſionem ſupra inuentam temporis, quod differentiae longitudinum Solis et Lunae reſpondet, haecque noua temporis expreſſio correcta, ad tempus obſeruationis vel addatur, vel ab eo ſubtrahatur, quemadmodum circumſtantiae requirunt, obtinebitur verum momentum coniunctionis Solis et Lunae dato meridiano reſpondens.

14. Ex his igitur patet, ſi in vno eodemque loco, binae inſtitutae fuerint obſeruationes phaſium eiusdem Eclipſis, imprimis ſi tam initium quam finem obſeruare licuerit, duas inde pro tempore coniunctionis prodire expreſſiones, ex quibus inter ſe comparatis deduci poteſt aequatio, quae praeter numerum aliquem abſolutum tres incognitas δ, y et π inuoluit. Liquet enim, ſi pro initio Eclipſis obſeruato, tempus coniunctionis exprimatur per hanc formulam:

$$T + \alpha\delta + \beta y + \gamma\pi$$

pro fine vero per iſtam

$$T' + \varepsilon\delta + \zeta y + \eta\pi$$

tum vna harum expreſſionum ab altera ſubtracta prodire:

$$T - T' + (\alpha - \varepsilon)\delta + (\beta - \zeta)y + (\gamma - \eta)\pi = 0.$$

Simili ratione ſi pro duobus aliis terrae locis, eiusmodi aequationes inuentae fuerint, et in omnibus tribus, coefficientes incognitarum, δ, y et π inſigniter

ter diſcrepent, ex iisdem aequationibus veri valores correctionum δ, y et π elici poterunt, quibus valoribus rurſus in expreſſionibus temporum coniunctionis ſubſtitutis, vera momenta coniunctionum definientur. Elementis autem Aſtronomicis hac ratione certo determinatis, pro vnoquoque loco, vbi vnicam tantum obſeruationem inſtituere licuit, etiam verum momentum coniunctionis Solis et Lunae in tempore Meridiano iſtius loci reſpondente, exprimi poterit.

15. Vt de veris valoribus correctionum δ, y et π certi fieri queamus, praeprimis neceſſum erit, vt eiusmodi aequationes adhibeantur, in quibus coefficientes incognitarum δ, y et π inſigniter differunt, ſi enim differentia harum coefficientium ſit exigua, ipſae aequationes pro coincidentibus haberi debent ex quibus, omnino nihil concludi poterit. Eiusmodi autem aequationibus quales deſideramus obtentis, vnica quae circa correctionum inueſtigationem ſupereſt incertitudo, orietur ex incertitudine momentorum obſeruatorum, at vero hi errores tanto maiorem habebunt influxum, quanto minores fuerint coefficientes, quibus δ, y et π afficiuntur, ne igitur de his valoribus nimis praecipitanter quicquam ſtatuamus, conducet ad manus habere ſufficientem numerum aequationum etiam talium, in quibus coefficientes incognitarum haud multum differunt, vt deinde ex conuenientia vel diſcrepantia numerorum abſolutorum, de certitudine et praeſtantia obſeruationum iudicium ferre liceat. Pro iis vero caſibus

ſibus vbi ⊙ B proxime = ☽ B adeoque ang. Φ non parum a 90° differt, noſtra methodus inueniendi correctiones non amplius cum vſu adhiberi poteſt, quum correctiones ipſius B ⊙, tum non amplius, vt minimae reſpectu ipſius B ⊙ conſiderari poſſint. Cum autem tales occurrunt caſus, valorem approximatum correctionum aliunde concluſum ſtatim adhibere licebit, indeque nouum deducere valorem anguli Φ, nec non ſi placuerit correctionum huic angulo reſpondentium.

16. Quoniam Longitudines et Latitudines Lunae, quales in noſtris calculis adhibentur, non ſolum eo reſpectu erroneae ſunt, quatenus Tabulae Aſtronomicae ex quibus deſumtae fuerunt a veritate deficiunt; ſed etiam quatenus in aeſtimanda Longitudine loci pro qua obſeruationem aliquam computavimus, a veritate aberrauimus; videri poſſet etiam correctionum ad poſterioris generis errores deſtruendos neceſſariarum in noſtris calculis haberi debuiſſe rationem. Verum de Longitudine Lunae iam ſupra monuimus, etiam grauiores errores in ea aeſtimanda commiſſos, parallaxes Longitudinis et Latitudinis inuentas non multum immutare. Motus autem horarius Lunae in latitudinem quum exiguus ſit, facile liquet, etiam ſenſibiles errores in longitudine loci aeſtimanda commiſſos, determinationem latitudinis non multum incertam reddere. De reliquo calculis ad finem perductis, imprimis ſi pro eodem loco adfuerint obſeruationes initii et finis, ex inuentis

tis momentis temporum coniunctionum, Longitudo loci a vera certe non vltra 30″ deficiens definiri poterit, cum qua deinde omnes calculos denuo inſtituere licebit.

ARTICVLVS II.

Recenſio elementorum per calculum ex ſingulis obſeruationibus deductorum.

17. Quoniam nimis longum atque etiam ſuperfluum foret, ſingulos calculos arithmeticos obſeruationum a nobis computatarum heic exponere, ſufficiet binis tantum exemplis illuſtraſſe, quomodo huiusmodi calculus, tam pro obſeruato initio, quam fine Eclipſis inſtitui debeat, quibus exemplis deinde ſubiungamus Tabellam repraeſentantem ea elementa, quae pro determinando tempore vero coniunctionis Solis et Lunae ex ſingulis obſeruationibus deducta ſunt. In anteceſſum autem monuiſſe iuuabit, elementis Aſtronomicis ex Tabulis *Mayerianis* depromtis, nos vſos fuiſſe iisdem, quibus calculi ad praeſcriptum Methodi *Eulerianae* inſtituti ſuperſtruuntur, vid. Tom. XIV. Nov. Comment. P. II. pag. 350. Quum vero pro calculo exactiſſime inſtituendo, etiam minimarum variationum, quae Parallaxis Lunae aequatorea eiusque Diameter horizontalis aequatorea ſubeunt, rationem habere vtile duximus; hinc Elementa Aſtronomica non ſolum pro ipſo tempore coniunctionis, ſed etiam pro binis horis ante coniunctio-

iunctionem, atque vna hora poſt coniunctionem elicere conſtitui, quoniam intra hoc temporis interuallum, omnes obſeruationes ſuper hac Eclipſi inſtitutas cadere deprehendi. Haec autem elementa ſequenti laterculo ob oculos ponam, vt vnicuique de exactitudine calculorum iudicium ferre, integrum ſit.

18. Elementa Aſtronomica ex Tab. deſumta.

Temp. med. Par. A. 1769. 3. Iun.	18h. 30′	19h. 30′	20h. 30′	21′. 30″
Aſcen. ☉ recta	72°. 24′. 40″	72°. 27′. 14″	72°. 29′. 49″	72°. 32′. 23″
Semid. ☉	15′. 47″			
Parallax. ☉ hor.	8″			
Longit. ☽ vera	2s.12°.35′.54″,4	2s.13°.13′.49″,4	2s.13°.51′.44″,3	2s.14°.29′ 39″,1
Latit. ☽ Bor.	1. 2. 41, 2	59. 14, 7	55. 48, 0	52. 21, 1
Paral. ☽ aequat.	61. 22, 8	61. 22, 2	61. 21, 7	61. 21, 2
Paral. reducta Π	61. 14, 8	61. 14, 2	61. 13, 7	61. 13, 2
Diamet. ☽ hor. aequatorea	33. 28, 8	33. 28, 5	33. 28, 2	33. 27, 9
Diamet. ☽ a centr. terrae viſa	33. 28, 5	33. 28, 2	33. 27, 9	33. 27, 6
Logarithmi pro mot. horar.				
☽ in Longit	9, 8006789	. . . .	. . . . .	9, 8006407
in latitut.	8, 7586176	8. 7590380		8, 7594580
L. Π =	3, 5652337	3, 5651628	3, 5650919	3, 5650446
L. D =	3, 3028718	3, 3028070	3, 3027421	3, 3026772
pro reduct ſpatii in tempus	0, 2275550	. . . . .	. . . . .	0, 2275564

Calcu-

Calculus pro obſeruationibus Eclipſis Solaris, Grenouici inſtitutis.

19. Quum eleuatio Poli obſeruatorii Grenovicenſis exacte determinata ſit $51°.28'.40''$, habebitur ſub hypotheſi figurae telluris ſphaeroidicae, qua ratio axis ad diametrum aequatoris aſſumitur vt $200:201$, diſtantia inter zenith verum et zenith apparens $= 16'.44''$, vnde fiet $Pz = 38°.48'.4''$, tum vero quoque habebitur $\text{Log.}\ \varepsilon = 9,9986814$.

T. XXXI. Fig. 3. Initium huius Eclipſis obſeruatum eſt a Celeb. *Maskelyne* Tempore vero $18^h.38'.54''$ ex quo fiet ang. $MPQ = 80°.16'.30''$, quum autem differentia meridianorum inter obſeruatorium Grenouicenſe et Pariſinum ſit $9'.16''$, erit tempus Pariſinum verum huius obſeruationis $18^h.48'.10''$ et medium $18^h.46'1''$, quo tempore habetur aſcenſio Solis recta $72°.25'.21''$, vnde deducitur arcus $♈M = MP - ♈Q = 7°.51'.9''$ et $zP♋ = 97°.51'.9''$. (*a*).

Calculus pro reſolutione trianguli Sphaerici $zP\Pi$.

Fig. 4. Vbi $Pz = 38°.48'.4''$, $\Pi P = 23°.28'.9''$ et ang. $zP\Pi = 82°.8'.51''$. Demiſſo ex z in ΠP arcu zR perpendiculari erit:

Log.

(*a*) Notandum eſt, figuram a nobis allatam huic exemplo non eſſe accommodatam, quiuis autem facile perſpicit, pro hoc caſu punctum ♈ cadere inter M et T, ſic enim angulus $zP♋$ certe fiet obtuſus.

Log. ſin. Pz = 9.7970035	Log. Tang. Pz = 9.9052844
L. ſin. zPΠ = 9.9959084	Log. coſ. zPΠ = 9.1355249
L. ſin. zR = 9 7929119	L. Tang. PR = 9.0408093
zR = 38°. 22′. 13″	PR = 6°. 16′. 8″
	PΠ = 23. 28. 9
	ΠR ≐ 17. 12. 1

Log. coſ. zR = 9.8943247	L. Tang. zR = 9.8985858
Log. coſ. ΠR = 9.9801296	L. ſin. ΠR = 9.4708699
Log. coſ. Πz = 9.8744543	L. Ta. ♋N = 10.4277159
Πz = 41°.30′.1″	♋N = 69°.31′.11″
	♈N = 0ˢ. 20.28.49
	Long ☽ = 2. 12.46. 2
	NP = 52.17.13.

Calculus pro reſolutione trianguli ΠzL: Fig. 6.

L. ſin. Πz = 9.8212670	L. Tang. Πz = 9.9468126
L. ſin. NP = 9.8982227	L. coſ. NP = 9.7865491
L. ſin. Kz = 9.7194897	L. Tang. ΠK = 9.7333617
Kz = 31°.36′.50″	ΠK = 28°.25′.21″
	PL = 1. 1. 46,1
	29. 27. 7
	LK = 60. 32. 53.

Calculus pro denominatore formularum Parallacticarum:

Log.coſ.Kz = 9.9302356	
L. coſ. L K = 9.6916944	in part. rad.
L. coſ. L z = 9.6219300	εΠ coſ z L = 0,0074374
L. εΠ = 3.5639151	1 − εΠ coſ. z L = 0,9925626
L. Conſt. = 4.6855749	
L.εΠcoſ.zL = 7.8714200	

Calculus pro parallaxi tam Longitudinis, quam Latitudinis atque diametro apparente

L(1-εΠcoſ.zL) = 9.9967579	L.εΠCompl. = 3.5671572
L. compl. = 0.0032421	L.Tang.LK = 10.2482083
L. εΠ = 3.5639151	L. coſ. L z = 9.6219300
3.5671572	L. Par. Lat. = 3.4372955
L. ſin. K z = 9.7194897	Par. Lat. = 2737″, 1
3.2866469	L. D = 3.3028718
L. coſ. P L = 9.9999299	L. Compl. = 0.0032421
Log. Par. Long. = 3.2867170	L. Δ = 3.3061139
Par. Long. = 1935″, 2	Δ = 2023, 5

Fig. 7. Calculus pro reſolutione trianguli ☽ ⊙ B et tempore coniunctionis:

Δ = 2023, 5	L. Summae = 3.4665266
d = 1894, 0	L. Differ. = 2.9955036
3917, 5	L. B ⊙² = 6.4620302
	L. B ⊙ = 3.2310151
⊙ ☽ = 1958, 7	B ⊙ = 1702, 2
☽ B = 969, 0	P. Long. = 1935, 2
Summa = 2927, 7	3637, 4
Differ. = 989, 7	
	L. 3637,

L. 3637,4 = 3.5607911   6143″ = 1ʰ.42′.23″
L red. temp. = 0.2275550 + Temp.obſ. = 18. 38. 54
L. 6143″ = 3.7883461 Temp. coni. = 20. 21. 17

Calculus pro correctionibus temporis coniunctionis:

L. ☽ B = 2.98632
L. B ☉ = 3.23101
L. Tang. Φ = 9.75531
L. red. in temp. = 0. 22755
L Tang. Φ = 9. 98286
L. $\frac{p'}{\pi}$ = 9. 87206
L. $\frac{p'}{\pi}$ Tang. Φ = 9. 85492

L. Sec Φ = 0.06096
L red. in temp. = 0.22755
L. Sec. Φ = 0.28851

L. $\frac{p}{\pi}$ = 9.72148
L. red. in temp. = 0.22755
L. $\frac{p}{\pi}$ = 9.94903
in temp.
$\frac{p'}{\pi}$ Tang. Φ = 0, 72
$\frac{p}{\pi}$ = 0, 89
Summa = 1, 61.

Hinc ergo deducitur verum tempus coniunctionis:

$$20^h.\ 21'.\ 17'' + 1,94.\ \delta - 0,96.\ y + 1,61\ \pi.$$

20. Finis Eclipſis ibidem a Celeb. *Maskelyne* obſeruatus eſt Temp. vero 20ʰ. 23′. 30″, ex quo habetur ang. M P Q = 54°. 7′. 30″. Tempus vero Pariſinum verum huius obſeruationis erit 20ʰ.32′.46″

et medium $20^h. 30'. 38''$, quo tempore erat aſcenſio Solis recta $72°. 29'. 50''$, ideoque ♈ M $= 18°. 22'. 20''$ et zP♋ $= 71°. 37'. 40''$.

Calculus pro reſolutione trianguli Sphaerici z P Π.

L. ſin. Pz = 9.7970035	L. Tang. Pz = 9.9052844
L. ſin zPΠ = 9.9772795	L. coſ. zPΠ = 9.4985710
L. ſin. zR = 9.7742830	L. Tang PR = 9.4038554
zR = $36°. 29'. 23''$	PR = $14°. 13'. 16''$
	PΠ = 23. 28. 9
	ΠR = 37. 41. 25
L. coſ. zR = 9.9052363	L. Tang. zR = 9.8690459
L. coſ. ΠR = 9.8983562	L ſin. ΠR = 9.7863203
L. coſ. Πz = 9.8035925	L. Tang. ♋N = 10.0827256
Πz = $50°. 29'. 28''$	♋N = $50°. 25'. 27''$
	♈ N = 1^s. 9. 34. 33
	Long. ☽ = 2. 13. 52. 8
	NP = 34. 17. 35

Calculus pro reſolutione trianguli Π z L:

L. ſin. Π z = 9.8873505	L. Tang. Πz = 10.0837582
L. ſin. N P = 9.7508368	L. coſ N P = 9.9170676
L. ſin. K z = 9.6381873	L. Tang. Π K = 10.0008258
K z = $25°. 55'. 58''$	Π K = $45°. 3'. 16''$
	PL = 55. 45, 8
	45 59. 2
	LK = 44. 0. 58

Calcu-

Calculus pro denominatore formularum parallacticarum:

L. coſ. K z = 9.9545204		
L. coſ. L K = 9.8568162		
L. coſ. L z = 9.8113366		in part. rad.
L. ε Π = 3.5637733		ε Π coſ. L z = 0,011500
L. conſt. = 4.6855749		1 − ε Π coſ. L z = 0,988500.
L. ε Π coſ. L z = 8.0606848		

Calculus pro Parallaxibus et Diametro apparente:

L.(1 − ε Π coſ. L z) = 9.9949767	L. ε Π Compl = 3.5687966
L. Compl. = 0.0050233	L. Tang. L K = 9.9850816
L. ε Π = 3.5637733	L. coſ. L z = 9.8113366
3.5687966	L. Par. Lat. = 3.3652148
L. ſin. K z = 9 6381873	Par. Lat. = 2318, 6
3.2069839	L. D = 3,3027421
L. coſ. P L = 9.9999429	L. Compl. = 0.0050233
L. Par. Long. = 3 2070410	L. Δ = 3.3077654
Par. Long. = 1610, 8	Δ = 2031, 3

Calculus pro reſolutione trianguli ☽ ☉ B et tempore coniunctionis:

 Δ =

$\Delta = 2031,3$
$d = 1894,0$
$3925,3$

☉☽ $= 1962,6$
☽B $= 1027,2$
Summa $= 2989,8$
Differ. $= 935,4$
L. $61,5 = 1.7888751$
L. red. $= 0.2275564$
L. $104'' = 2.0164315$

Log. Summae $= 3.4756421$
L. Differ. $= 2.9709974$
L. B☉$^2 = 6.4466395$
L. B☉ $= 3.2233197$
B☉ $= 1672,3$
P. Long. $= 1610,8$
$61,5$

$104'' = 1'.44''$
Sub. a Temp. obſ. $= 20^h.23'.30''$
Temp. coni. $= 20^h.21'.46''$

Calculus pro correctionibus temporis coniunctionis.

L. ☽B $= 3.01165$
L. B☉ $= 3.22332$
L. Tang. $\Phi = 9.78833$
L. red. $= 0.22755$
in temp.
L. Tang. $\Phi = 10.01588$
L $\frac{p'}{\pi} = 9.80013$
in temp.
L. $\frac{p'}{\pi}$ T. $\Phi = 9.81601$

Log. Sec. $\Phi = 0.06952$
L. $\frac{p}{\pi} = 9.64194$
L. red. $= 0.22755$
in temp.
Log. Sec. $\Phi = 0.29707$
L. $\frac{p}{\pi} = 9.86949$
$\frac{p'}{\pi}$ Tang. $\Phi = -0,655$
$\frac{p}{\pi} = +0,741$
Corr. III. $= +0,086$

Hinc

Hinc habetur verum tempus coniunctionis:

$$20^h.\ 21'.\ 46'' - 1,98.\delta + 1,04.y + 0,09.\pi$$

at quum pro initio eſſet

$$20.\ 21.\ 17 + 1,94.\delta - 0,96.y + 1,61.\pi$$

habebitur ſubtrahendo hanc expreſſionem ab illa, ſequens aequatio:

$$29 - 3,92\,\delta + 2,00.y - 1,52.\pi = 0.$$

Denique et notari meretur, quod ſi vtraque expreſſio addatur et ſumma per 2 diuidatur, prodeat haec expreſſio pro tempore coniunctionis:

$$20^h.\ 21'.\ 32'' - 0,02.\delta + 0,04.y + 0,085.\pi$$

ſeu neglectis plane correctionibus δ et y, quorum coefficientes ſunt quam minimi, $20^h.21'.32'' + 0,85\,\pi$, ideoque ſi certe conſtaret π eſſe $= 0$, ſine ſenſibili errore ſtatui poſſet verum tempus coniunctionis Grenouicenſe $20^h.\ 21'.\ 32''$.

21. Quum exempla iam allata abunde ſatisfacere poſſint, ad praxin calculi noſtri illuſtrandam, reliquum eſt, vt elementa pro calculo coniunctionis verae ex ſingulis obſeruationibus a nobis computatis deducta exponamus, vbi quidem quum pro correctionibus δ, y et π inueniendis neceſſum ſit, obſeruationes tam initii, quam finis Eclipſeos in iisdem locis inſtitutas adhibere, has obſeruationes a reliquis diſtinguamus easque numeris maioribus I. II. III. etc. indigitemus, quibus dein totidem reſpondebunt aequationes correctionibus inueſtigandis inſeruientes.

Elemen-

Elementa calculi coniunctionnm

	I.	II.	III.
Locus obſeruationis	Lezardi prom.	Grenouicum	Lutetia Pariſ.
Nomen obſeru.	Bradley.	Maskelyne	Meſſier.
Tempus obſeruat.	$18^h. 14'. 54''$	$18^h. 38'. 54''$	$18^h. 47'. 13''$
P z =	40°. 19. 24	38. 48. 4	41. 26. 45
L. ε =	9. 9987382	9, 9986814	9, 9987817
z P ♋ =	103°. 51'. 15''	97°. 51'. 9''	95°. 46'. 26''
♈ N =	0^s. 14°. 24'. 58''	0. 20°. 28'. 49''	0^s. 19°. 49'. 37''
Long. ☽ =	2. 12. 44. 29	2. 12. 46. 2	2. 12. 45. 24
N P =	58. 19. 31	52. 17. 13	52. 55. 47
Π z =	40. 26. 48	41. 30. 1	44. 25. 52
Lat. ☽ =	1. 1. 54,5	1. 1. 46,1	1. 1. 49,5
L K =	64. 51. 21	60. 32. 53	58. 23. 20
K z =	33. 30. 34	31. 36. 50	33. 57. 25
Par. Long. =	2036'', 0	1935'', 2	2063'', 1
Par. Lat. =	2783, 1	2737, 1	2608, 7
Δ =	2021, 2	2023, 5	2023, 9
B ⊙ =	1721, 8	1702, 2	1620, 3
Temp. coni. =	$20^h. 0'. 30''$	$20^h. 21'. 17''$	$20^h. 30'. 51''$
an. Φ =	28°. 24. 40	29. 39. 10	34, 11. 30

ex obſeruato initio Eclipſis deducta.

IV.	V	VI.	VII.
Bononia Zanotti	Cajaneburgum Planman	Petropolis Stahl	Wardhus Hell
$19^h. 28'. 14''$	$21^h. 0'. 53''$	$21^h. 10'. 24''$	$21^h. 22'. 42''$
$45. 47. 32$	$25^\circ. 59'. 58$	$30^\circ. 18. 31$	$19^\circ. 48. 18$
9, 9989467	9, 9982486	9, 9983857	9, 9980826
$85^\circ. 30' 59''$	$62^\circ 20'. 3''$	$59^\circ. 57'. 22''$	$56^\circ. 52'. 28''$
$0^s.24^\circ.43'.35''$	$1^s.24^\circ.31'. 3''$	$1^s.22^\circ.48'. 9''$	$2^s. 2^\circ.28'.35''$
2. 12. 48. 33	2. 13. 5. 46	2. 13. 5. 8	2. 13. 10. 57
48. 4 58	18. 34. 43	20. 16. 59	10 42. 22
51. 43. 0	41. 58. 46	46. 16. 9	37. 52. 55
1. 1. 32,4	59. 58,6	1. 0. 2,1	59. 30,4
48. 33. 37	48. 32. 26	44. 33. 49	51. 36. 46
35 50. 2	12. 18. 15	14. 30. 24	6. 33. 0
$2167''$, 1	789, 1	928, 4	421, 9
2249, 5	2711, 0	2517, 6	2880, 1
2027, 8	2031, 8	2033, 1	2030, 4
1327, 7	1750, 7	1636, 9	1836, 7
$21^h. 6'. 36''$	$22^h. 12'. 22''$	$22^h. 22'. 36''$	$22^h. 26'. 16''$
$47^\circ. 23. 0$	$26^\circ. 53. 10$	$33^\circ. 31. 40$	$20^\circ. 36. 0$

Elementa calculi coniunctionum

	VII.	IX.	X.
Locus obſeruationis	Vmba	Gurjet	Orenburgum
Nomen obſeruat.	Pictet	Lowits	Krafft
Tempus obſeruat.	$21^h.33'.43''$	$23^h.29'.45''$	$23^h.30'.22''$
P z =	23°.27. 29	43°. 9'.58''	38°. 30. 40
L. ε =	9,9981661	9,9988454	9,9986717
z P ♋ =	54°. 7'. 16''	25°. 4'. 51''	24°. 56'. 7''
♈ N =	2^s. 0°.53'.36''	2^s.11°.20' 31''	2^s.12°.26'.24''
Long. ☽ =	2. 13. 10. 11	2. 13. 38. 25	2. 13. 31. 2
N P =	12. 16. 35	2. 17. 54	1. 4 38
Π z =	41. 32. 7	65. 1. 18	60. 28. 8
Lat. ☽ =	59. 34,5	57. 0,5	57. 40,9
L K =	48. 7. 44	24. 2. 44	28. 34. 27
z K =	8. 6. 18	2. 5. 0	0. 56 14
Par. Long. =	522, 0	135, 3	60, 9
Par. Lat. =	2729, 2	1516, 5	1779, 5
Δ =	2032, 0	2041, 0	2040, 0
B ⊙ =	1771, 6	495, 8	1020, 7
Temp. coni. =	$22^h.38'.16''$	$23^h.47'.31''$	$24^h. 0'.49''$
ang. Φ =	25°. 30. 30	75°. 24. 10	58°. 44. 20

ex obſeruato initio Eclipſis deducta.

XI.

Iakutsk Islenieff	Caua Maſon
29^h. 5'. 52''	18^h. 11'. 1''
28°. 12. 30	35°. 24. 23
9, 9983475	9, 9985588
58°. 58'. 0''	104°. 49'. 17''
4^s. 5° 11'. 5''	0^s. 18°. 36'. 54''
2. 13 54. 31	2. 12. 47. 38
51. 16. 34	54. 10. 44
44. 39 37	36. 13. 45
55. 32,9	1. 1. 37,3
57. 21. 0	65. 45. 48
33. 15 22	28 38. 5
2023, 3	1766, 8
2597, 5	2950, 2
2024, 1	2021, 4
1815, 8	1809, 5
29^h. 0'. 2''	19^h. 51'. 50''
22°. 2. 50	22°. 26. 0

Elementa calculi coniunctionis

	I.	II.	III.
Locus obſeruationis	vt ante	. . . . .	. . . . .
Nomen obſeruat.	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Tempus obſeruat.	$19^h.57'.17''$	$20^h.23'.30''$	$20^h.27'.24''$
P z =	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Log. ε =	. . . . .	. . . . .	. . . . .
z P ♋ =	$78°.11'.7''$	$71°.37'.40''$	$70°.39'.24''$
♈ N =	$1^s.3°.52'.18''$	$1^s.9°.34'.33''$	$1^s.8°.39'.35''$
Long. ☽ =	2. 13.49. 12	2. 13. 52. 8	2. 13. 48. 43
N P =	39. 56. 54	34. 17. 35	35. 9. 8
Π z =	49. 43. 0	50. 29. 28	53. 6. 42
Lat. ☽ =	56. 1,9	55. 45,8	56. 4,4
L K =	46. 56. 12	44. 0. 58	41. 36. 52
K z =	29. 19. 45	25. 45. 58	27. 25. 7
Par. Long. =	1813, 6	1610, 8	1707, 3
Par. Lat. =	2358, 0	2318, 6	2185, 3
Δ =	2029, 3	2031, 3	2031, 6
B ⊙ =	1685, 3	1672, 3	1569, 2
Temp. coni. =	$20^h.0'.54''$	$20^h.21'.46''$	$20^h.31'.15''$
ang. Φ =	30°.46.50	31°.33.40	36°.55.20

ex obſeruato fine Eclipſis deducta.

IV.	V.	VI.	VII.
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	Mayer	. . . . .
20^h. 54$'$. 11$''$	23^h. 0$'$. 0$''$	23^h. 6$'$. 14$''$	23^h. 22$'$. 36$''$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
63°. 58$'$. 3$''$	32°. 28$'$. 12$''$	30°. 54$'$. 54$''$	26°. 48$'$. 49$''$
1^s. 11°. 19$'$. 16$''$	2^s. 11°. 20$'$. 52$''$	2^s. 10°. 42$'$. 52$''$	2^s. 16°. 48$'$. 32$''$
2. 13. 42. 52	2. 14. 21. 2	2. 14. 18. 20	2. 14. 26. 43
32. 23. 36	3. 0. 10	3. 35. 28	2. 21. 49
59. 2. 59	47. 22. 42	51. 43. 21	42. 2. 51
56. 36,3	53. 8,1	53. 22,8	52. 37,0
34. 26. 20	41. 46. 31	37. 26. 33	47. 5. 59
27. 21. 6	2. 12. 33	2. 49. 6	1. 34. 58
1706, 3	142$''$, 9	182$''$, 5	102$''$, 2
1865, 1	2468, 1	2253, 9	2710, 6
2034, 4	2034, 5	2036, 2	2032, 1
1230, 2	1827, 5	1720, 8	1911, 6
21^h. 7$'$. 35$''$	22^h. 12$'$. 35$''$	22^h. 22$'$. 56$''$	22^h. 25$'$. 55$''$
51°. 13. 10	21°. 30$'$. 20$''$	28°. 52$'$. 20$''$	13°. 8$'$. 40$''$

Elementa calculi coniunctionis

	VIII.	IX.	X.
Locus obſeruationis	vt ſupra	. . . . .	. . . . .
Nomen obſeruat.	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Tempus obſeruat.	$23^h.34'.8''$	$24^h.26'.48''$	$25^h.2'.43''$
P z =	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Log. ε =	. . . . .	. . . . .	. . . . .
z P ♋ =	$23°.55'.51''$	$10°.46'.39''$	$1°.46'.55''$
♈ N =	$2^s.16°.59'.39''$	$2^s.21°.58'.16''$	$2^s.28°.44'.35''$
Long. ☽ =	2. 14. 26. 17	2. 14. 14. 29	2. 14. 29. 23
N P =	2. 33. 22	7. 43. 47	14. 15. 12
Π z =	45. 50. 56	66. 20. 6	61. 58. 22
Lat. ☽ =	52. 39,5	53. 43,8	52. 22,6
L K =	43. 18. 8	22. 57. 44	27. 54. 13
K z =	1. 50. 1	7. 4. 34	12. 33. 9
Par Long. =	$118''$, 6	$458''$, 8	$808''$, 3
Par. Lat. =	2540, 0	1441, 7	1698, 8
Δ =	2033, 8	2040, 7	2038, 8
B ☉ =	1863, 6	833, 3	1335, 0
Temp. coni. =	$22^h.38'.21''$	$23^h.50'.26''$	$24^h.0'.24''$
ang. Φ =	$18°.23'.10''$	$64°.56'.20''$	$47°.14'.40''$

ex obſeruato fine Eclipſis deducta.

XI.

. . . .	Hafnia	Windobona	Stockholmia
. . . .	Horrebow	Sambach	Wargentin
30^h.52'.37''	21^h.30'.55''	21^h.28'.50''	22^h. 4'.53''
. . . .	34°.35.15	42. 4.31	30°.54'.35''
. . . .	9,9985293	9,9988048	9.9984028
85°.43'.48''	54°.45'.42''	55°.17'.40''	46°. 5'.40''
4^s.20°.53'.16	1^s.23°.34'.31''	1^s.19°.31'.31''	2^s. 0°.55'.26''
2.15. 1.59	2.14. 2.46	2.13.52. 4	2.14.10.38''
65.51.17	20.28.15	24.20.33	13.15.12
37.24.39	51.20.20	58. 4. 4	49.47.32
49.24,8	54.47,9	55.46,2	54. 5,0
71.48.12	39.34.58	33.26.39	40. 4.14
33.40. 3	15.50.53	20.28.34	10. 5. 1
2037,9	1013,3	1299,7	649'',6
2906,2	2274,1	1918,1	2351,2
2016,6	2034,6	2036,2	2035,1
1954,4	1682,5	1349,9	1749,4
29^h. 0'.15''	21^h.12'. 5''	21^h.27'.25''	21^h.33'.57''
1°.43. 0	31°. 4.20	46°.36.30	27°. 3'.50''

Ele-

Elementa calculi coniunctionis ex fine Eclipſis deducta

Locus obſeruationis	Pello	Kola	Ponoi
Nomen obſeruat	Mallet	Rumovsky	Mallet
Tempus obſeruat.	$22^h.45'.36''$	$23^h.30'.18''$	$24^h.\ 7'.55''$
P z =	$23^\circ\ 24.\ 28$	$21^\circ.19.\ 4$	$23^\circ.\ 7.51$
Log. ε =	9.9981736	9 9981189	9. 9981661
z P ♋ =	$36^\circ.\ 9.\ 10$	$24^\circ.53'.19''$	$15^\circ.29'.50''$
♈ N =	$2^s.10^\circ.26'.33''$	$2^s.17^\circ.12'.\ 4''$	$2^s.21^\circ.37'.52''$
Long. ☽ =	2. 14 21. 6	2. 14. 26. 42	2. 14. 30. 9
N P =	3. 54. 33	2. 45. 22	7. 7. 43
Π z =	44. 26. 9	43. 40. 58	46. 8. 59
Lat. ☽ =	53. 7,8	52. 37,3	52. 18,4
L K =	44. 44. 43	45. 28. 24	43. 12. 2
K z =	2. 44. 9	1. 54. 11	5. 8. 4
Par. Long. =	$176'',8$	$123'',0$	$331'',6$
Par. Lat. =	2604, 8	2638, 7	2526, 4
Δ =	2033, 2	2032, 8	2033, 8
B ☉ =	1875, 1	1893, 7	1866, 1
Temp. Coni. =	$21^h.57'.48''$	$22^h.33'.33''$	$23^h.\ 6'.\ 4''$
Ang. Φ =	$17^\circ.16.\ 20$	$15^\circ.19.\ 0$	$18^\circ.\ 9.\ 30$

22. De-

22. Determinata igitur quantitate anguli Φ valores correcti pro temporibus coniunctionis facile inueniuntur, ex quibus deinceps pro iis locis, vbi tam initium, quam finem obſeruare licuit, aequationes pro correctionibus δ y et π definiendis, deducuntur. Tempora autem coniunctionis hinc inventa, ita erunt expreſſa:

Pro Promontorio Lezardi Tempus coniunctionis.

ex initio	$20^h.0'.30'' + 1,92.\delta - 0,91.y + 1,63.\pi$
ex fine	$20.\ 0.\ 54 - 1,96.\delta + 1,01.y + 0,19.\pi$
hinc aequat. I.	$24 - 3,88.\delta + 1,92.y - 1,44.\pi = 0.$

Pro Grenouico.

ex initio	$20^h.21'.17'' + 1,94.\delta - 0,96.y + 1,61.\pi$
ex fine	$20.\ 21.\ 46 - 1,98.\delta + 1,04.y + 0,09.\pi$
aequat. II.	$29 - 3,92.\delta + 2,00.y - 1,52.\pi = 0.$

Pro Lutetia Paris.

ex initio	$20^h.30'.51'' + 2,04.\delta - 1,15.y + 1,76.\pi$
ex fine	$20.\ 31.\ 15 - 2,11.\delta + 1,27.y + 0,03.\pi$
aequat. III.	$24 - 4.15.\delta + 2,42.y - 1,73.\pi = 0.$

Pro Bononia.

ex initio	$21^h.6'.36'' + 2,49.\delta - 1,84.y + 2,12.\pi$
ex fine	$21.\ 7.\ 35 - 2,70.\delta + 2,10.y - 0,28.\pi$
aequat. IV.	$59 - 5,19.\delta + 3,94.y - 2,40.\pi = 0.$

Pro Caianeburgo.

ex initio $22^h.12'.22''+1,89.\delta-0,86.y+0,99.\pi$
ex fine $22.\ 12.\ 35\ -1,81.\delta+0,66.y-0,38.\pi$
aequat. V. $13\ -3,70.\delta+1,52.y-1,37.\pi=0.$

Pro Petropoli.

ex initio $22^h.22'.36''+2,03.\delta-1,12.y+1,19.\pi$
ex fine $22.\ 22.\ 56\ -1,93\ \delta+0,93.y-0,49.\pi$
aequat. VI. $20\ -3,96.\delta+2,05.y-1,68.\pi=0.$

Pro Wardhus.

ex initio $22^h.26'.16''+1,80.\delta-0,64.y+0,69.\pi$
ex fine $22.\ 25.\ 55\ -1,74.\delta+0,39.y-0,25.\pi$
aequat. VII. $21\ +3,54.\delta-1,03.y+0,94.\pi=0.$

Pro Vmba.

ex initio $22^h.38'.16''+1,87.\delta-0,81.y+0,84\ \pi$
ex fine $22.\ 38.\ 21\ -1,78.\delta+0,56.y-0,44.\pi$
aequat. VIII. $5\ -3,65.\delta+1,37.y-1,28.\pi=0.$

Pro Gurjef.

ex initio $23^h.47'.31''+6,70.\delta-6,48.y+2,74.\pi$
ex fine $23.\ 50.26\ -3,99.\delta+3,61.y-1,63.\pi$
aequat. IX. $175-10,69.\delta+10.09.y-4,37.\pi=0.$

Pro Orenburgo.

ex initio $24^h.\ 0'.49''+3,25.\delta-2,78.y+1,38.\pi$
ex fine $24.\ 2.24\ -2,49\ \delta+1,83.y-1,22.\pi$
aequat. X. $95\ -5,74.\delta+4,61.y-2,60.\pi=0.$

Pro

Pro Iakutsk.

ex initio $29^h. 0'. 2'' + 1,82.\delta - 0,68.y - 0,45.\pi$
ex fine $29. 0.15 - 1,69.\delta + 0,05.y - 1,08.\pi$
aequat. XI. $13 - 3,51.\delta + 0,73.y - 0,63.\pi = 0.$

Pro Caua.

ex initio $19^h.51'.50'' + 1,83.\delta - 0,70.y + 1,37.\pi$

Pro Hafnia.

ex fine $21^h.12'. 5'' - 1,97.\delta + 1,02.y - 0,16.\pi$

Pro Windobona.

ex fine $21^h.27'.25'' - 2,46.\delta + 1,79.y - 0,33.\pi$

Pro Stockholmia.

ex fine $21^h.33'.57'' - 1,90.\delta + 0,86.y - 0,25.\pi$

Pro Pello.

ex fine $21^h.57'.48'' - 1,77.\delta + 0,53.y - 0,29.\pi$

Pro Kola.

ex fine $22^h.23'.33'' - 1,75.\delta + 0,46.y - 0,39.\pi$

Pro Ponoi.

ex fine $23^h. 6'. 4'' - 1,78.\delta + 0,54.y - 0,53.\pi.$

23. Praeter obſeruationes ſupra recenſitas, nonnullas quoque alias computaui, quas tamen praetermittere coactus fui, quum pro locis vbi inſtitutae

 fuerunt,

fuerunt, eiusmodi praebeant Longitudines, quae a Longitudinibus eorundem locorum antea ſatis exacte determinatis inſigniter differunt. Sic finis Eclipſis *Goettingae* obſeruatus $21^h.12'.16''$, praebet tempus coniunctionis $21^h.\ 4'.\ 38''$, quod ſi conferatur cum tempore coniunctionis *Grenouicenſi* etiam ex fine elicito $20^h.\ 21'.\ 46''$, habebitur differentia Meridianorum inter *Grenouicum* et *Goettingam* $42'.\ 52''$, hoc eſt plus quam $3'$ maiorem, quam ex accuratiſſimis obſeruationibus B: MAYERI deducitur. Neque praetexatur fieri poſſe, vt haec differentia ob correctiones δ, y et π oriatur; neceſſum enim eſt, vt in expreſſionibus temporis coniunctionis ex vtraque obſeruatione deductis, coefficientes haud multum inter ſe ſint diverſi. Obſeruationes initii et finis Eclipſis *Lundae* in Scania inſtitutae vix quoque inter ſe conciliari poſſunt, videtur autem maiorem obtineri conſenſum, ſi ſupponatur in allegando tempore initii Eclipſis errorem integri minuti primi fuiſſe commiſſum, adeo vt habeatur initium Eclipſis $19^h.\ 43'.\ 58''$. Quicquid autem de initio ſit, notaſſe ſufficiet finem $21^h.33'.50''$ vt videtur exacte obſeruatum, praebere pro tempore coniunctionis hunc valorem:

$$21^h.\ 14'.\ 30'' - 1,97.\ \delta + 1,02.\ y - 0,17.\ \pi.$$

Simili ratione finis Eclipſis *Gryphiswaldiae* $21^h.\ 30'.\ 52''$ obſeruatus, dat tempus coniunctionis:

$$21^h.\ 16'.\ 42'' - 2,05.\ \delta + 1.\ 16 y - 0,17\ \pi.$$

ARTI-

ARTICVLVS III.

Determinatio correctionum δ, y et π, vt et Longitudinum Geographicarum pro locis, vbi obſeruationes ſupra allatae inſtitutae fuerunt.

24. Priusquam ipſam inueſtigationem correctionum δ, y et π adgrediamur, haud abs re erit, quaedam de modo inueniendi correctiones Tabularum Lunarium ex obſeruatis Eclipſibus Solis praemonere. Primum igitur ſi correctiones δ, y et π plane euaneſcant, neceſſum erit, vt valores inuenti pro temporibus coniunctionis veritati proxime ſint conſentanei, quum omnis diſcrepantia, quae amplius ſupereſſe poterit, ab incertitudine obſeruationum originem ducat. At vero ex aequationibus noſtris imprimis IV, IX et X conſtat, valores qui pro temporibus coniunctionis ex obſeruato initio et fine Eclipſis deducuntur, nullo modo inter ſe conciliari poſſe, ſi ſupponatur valores ipſorum δ, y et π ſimul euaneſcere. Faciles quidem largimur, momenta obſeruati initii Eclipſis ſemper multo eſſe incertiora momentis obſeruati finis, hoc tamen initium ad praeciſionem $10''$ obſeruari poſſe exiſtimamus, errores autem in hoc momento aſſignando ad $2'$ vel $3'$ aſſurgentes, ab Aſtronomis exercitatis commiſſos fuiſſe, nemo facile ſuſpicari poterit. Magnam igitur committunt fallaciam, qui aſſumtis temporibus coniunctionis ex obſeruato fine deductis pro veris,

ris, inde correctionem Longitudinis Lunae deducunt, poſtea vero ope argumenti Latitudinis correcti, ipſam Latitudinis correctionem quaerere conantur; ea enim quae iam monuimus, euidenter oſtendunt, valores correctionum δ, y et π primum eſſe quaerendos, tumque his correctionibus ita determinatis, vt tam ex initio quam fine Eclipſis idem proxime prodeat tempus coniunctionis, Longitudinis correctionem ſponte innoteſcere. Tanto magis autem mirum videbitur Rev. P. Hell in Diſſertatione *de Tranſitu Veneris ante diſcum Solis Wardoehuſii obſeruato*, in hunc errorem illapſum fuiſſe; quanto certius demonſtrari poteſt, ſi correctiones δ et π plane negliguntur, quemadmodum ab ipſo factum eſt, correctionem Latitudinis multo tamen prodire maiorem, quam quae ab ipſo inuenta
T. XXXI. Fig. 7. eſt. Grenouici enim Cel. Maskelyne Temp. vero $19^h.30'.14''$ inuenit partem lucidam $15'.14'',5$, pro quo tempore ex Tabulis habetur Latit. Lunae $58'.49'',4$, deinde per calculum deducitur Parall. Latit. $= 2529'',5$ et ſemidiameter Lunae apparens $1013,7$, vnde fit ☉☽ $= 982,2$ et ☽B $= 999,9$, quod certe fieri nequit niſi ☽B, ſeu latitudo $18''$ diminuatur. Petropoli Cel. P. Mayer Temp. vero $22^h.8'.47''$ inuenit partem lucidam $15'.46'',0$, pro quo tempore quum ex Tab. ſit Latitudo Lunae $56'.40'',9$, calculus autem det Parall. Lat. $2367'',6$ et Semidiametrum Lunae apparentem $1017'',5$ erit in triangulo ☽☉B, latus ☉☽ $= 1016,8$ latus vero ☽B $= 1033,3$ quae inter ſe conciliari nequeunt,

queunt, niſi ☽ B ad minimum 17″ diminuatur. Neque error praeſertim in priori obſeruatione 2″ ſuperare poterit, vt ex menſuris partium lucidarum ante et poſt inſtitutis, euidenter patet. Quodſi vero diameter Solis 4″ augeatur, vt conueniat cum ea quam P. Hell adhibuit, tamen certo affirmare licebit, correctionem Latitudinis ad minimum 16″ ſtatui debere. Denique obſeruari meretur ad inueniendam correctionem Latitudinis nequaquam ſufficere, vt verum argumentum Latitudinis innoteſcat, quis enim affirmare audebit, in Tabulis Mayerianis, pro Latitudine Lunae nullos alios errores posſibiles eſſe, quam qui ex argumentis Latitudinis perperam aeſtimatis originem ducunt.

25. Quum dubium videri poſſet, an non correctio Longitudinis Lunae in temporibus coniunctionum inuentis ſenſibilem producat mutationem? pro iis obſeruationibus vbi N P (Fig. 5.) exiguus eſt, inquiſiui quomodo ob correctionem Longitudinis ad 1′ aſſurgentem, parallaxes Longitudinis indeque tempora coniunctionis immutentur, inueni autem tempora coniunctionis deducta ex obſeruato fine Petropoli, Caianeburgi, Wardhuſii, Vmbae, Kolae et in Pello 2″, in Ponoi vero 1″ prorogari, ſimiliter quoque temporibus coniunctionis ex obſeruato initio, Gurjefii 2″ et Orenburgi 3″ addi debere. Porro quum in aequatione IX coefficientes correctionum δ, y et π ſint praemagni, adeoque numerus abſolutus huius aequationis, correctionibus in ipſarum coeffi-

coefficientes ductis, non praeciſe aeſtimari queat aequalis, vt ad veritatem propius accederem, ſtatim ſuppoſui correctionem Latitudinis $y = -10''$ atque ſub ea hypotheſi vera momenta temporum coniunctionis pro Gurjef inueni ſequentia:

ex initio $23^h.48'.35'' + 6,25.\delta - 6,00.y + 2,54.\pi$

ex fine $23.\ 49.\ 51 - 3,89.\delta + 3,50.y - 1,59.\pi$

hinc aequatio IX. $76 - 10,14.\delta + 9,50.y - 4,13.\pi$

Quantum ad reliquas aequationes attinet facile quivis perſpiciet, ex ſuppoſitione $y = -10$, coefficientes litterarum δ, y et π non ſenſibiliter mutari, quamobrem ſufficiet in vnaquaque earum pro y, -10 ſubſtituere atque ſic XI noſtrae aequationes correctionibus determinandis inſeruientes erunt:

I. $5 - 3,88\,\delta + 1,92.y - 1,44.\pi = 0$

II. $9 - 3,92.\delta + 2,00.y - 1,52.\pi = 0$

III. $0 - 4,15.\delta + 2,42.y - 1,73.\pi = 0$

IV. $20 - 5,19.\delta + 3,94.y - 2,40.\pi = 0$

V. $0 - 3,70.\delta + 1,52.y - 1,37.\pi = 0$

VI. $2 - 3,96.\delta + 2,05.y - 1,68.\pi = 0$

VII. $-29 - 3,54.\delta + 1,03.y - 0,94.\pi = 0$

VIII. $-7 - 3,65.\delta + 1,37.y - 1,28.\pi = 0$

IX. $76 - 10,14.\delta + 9,50.y - 4,13\,\pi = 0$

X. $46 - 5,74.\delta + 4,61.y - 2,60.\pi = 0$

XI. $6 - 3,51.\delta + 0,73.y - 0,63.\pi = 0.$

26.

26. Qui has aequationes attente conſiderauerit, facile inueniet inter easdem aliqualem adeſſe diſſenſum, vix tamen maiorem, quam qui ex modicis erroribus in ipſis obſeruationibus commiſſis deduci poteſt, vnica tamen excepta aequatione VII^{ma}, quae certe cum reliquis conſiſtere nequit. Quum igitur numeri abſoluti harum aequationum ad minimum erroribus $15''$ obnoxii eſſe poſſint, valores correctionum δ, y et π maxime ſaltem probabiles inueniſſe erimus cenſendi, ſi hae correctiones ita comparatae fuerint, vt errores obſeruationum quantum fieri poſſit deprimantur. Quod autem primum correctionem Parallaxis attinet, quum accuratiſſimis obſeruationibus Parallaxis Lunae iam definita ſit, iſta correctio aut omnino pro nulla haberi poterit, aut certe quam minima erit. Quoniam igitur Parallaxis Lunae a nobis heic adhibita talis eſt, quae ex modo dictis obſeruationibus ſequitur, ſi ſtatuatur ratio axis telluris ad ſemidiametrum aequatoris, vt 177 : 178; pro ea vero ratione, quam nos ſupra adhibuimus, parallaxis circiter $3''$ minor prodiret; exiſtimauimus absque ſenſibili errore in aequationibus noſtris poni poſſe $\pi = -3$, quo facto eaedem in has transformantur:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 9,3 - 3,88.\delta + 1,92.y = 0 \\ \text{II.} & 13,6 - 3,92.\delta + 2,00.y = 0 \\ \text{III.} & 5,2 - 4,15.\delta + 2,42.y = 0 \\ \text{IV.} & 27,2 - 5,19.\delta + 3,94.y = 0 \\ \text{V.} & 4,1 - 3,70.\delta + 1,52.y = 0 \\ \text{VI.} & 7,0 - 3,96.\delta + 2,05.y = 0 \end{array}$$

$$\text{VII.} -27,8 - 3,54.\delta + 1,03.y = 0$$
$$\text{VIII.} -3,2 - 3,65.\delta + 1,37.y = 0$$
$$\text{IX.}\ 88,4 - 10,14.\delta + 9,50.y = 0$$
$$\text{X}\ 53,8 - 5,74.\delta + 4,61.y = 0$$
$$\text{XI.}\ 7,9 - 3,51.\delta + 0,73.y = 0.$$

27. Vt nunc valores approximatos correctionum δ et y inueniamus, comparemus inter ſe aequationes II et IX, idque eam imprimis ob rationem, quod numerus abſolutus aequationis II non multum eſſe poſſit dubius, quia obſeruatio Eclipſis Solis Grenouici a pluribus obſeruatoribus egregie inter ſe conuenientibus inſtituta fuit, in aequatione vero IX ob coefficientes ipſorum δ et y magnos, aliquantillus error in numero abſoluto commiſſus, minorem omnino producet variationem, quam in reliquis aequationibus. Ex aequatione igitur II deducitur:

$y = -6,8 + 1,96.\delta$ et ex aequ: IX $y = -9,3 + 1,07\ \delta$ ex quibus fiet $0 = 2,5 + 0,89.\delta$, ſeu $\delta = -2,8$ et $y = -12$. Si ponamus numerum abſolutum aequationis II $5''$ augeri debere, orietur $y = -9,3$ et $\delta = 0$, vnde propter ineuitabiles errores obſervationum tantisper ſtatuamus $\delta = -2$ et $y = -11$. Vt autem valores pro δ et y conſequamur etiam reliquis obſeruationibus ſatisfacientes, danda opera eſt vt numeri abſoluti noſtrarum aequationum quantum fieri licet deſtruantur, quod ſequenti modo adgreſſi ſumus:

I.

		$y = -11$		$\delta = -2$		$y = -1$		$\delta = -1$	
I.	+ 9,3	− 21,1	−11,8	+ 7,8	− 4,0	−1,9	− 5,9	+ 3,9	− 2,0
II.	+13,6	− 22,0	− 8,4	+ 7,8	− 0,6	−2,0	− 2,6	+ 3,9	+ 1,3
III.	+ 5,2	− 26,6	−21,4	+ 8,3	−13,1	−2,4	−15,5	+ 4,1	−11,1
IV.	+27,2	− 43,3	−16,1	+10,4	− 5,7	−3,9	− 9,6	+ 5,2	− 4,4
V.	+ 4,1	− 16,7	−12,6	+ 7,4	− 5,2	−1,5	− 6,7	+ 3,7	− 3,0
VI.	+ 7,0	− 22,5	−15,5	+ 7,9	− 7,6	−2,0	− 9,6	+ 4,0	− 5,6
VII	−27,8	− 11,3	−38,4	+ 7,1	−31,3	−1,0	−32,3	+ 3,5	−28,8
VIII.	− 3,2	− 15,1	−18,3	+ 7,3	−11,0	−1,4	−12,4	+ 3,6	− 8,8
IX.	+88,4	−104,5	−16,1	+20,3	+ 4,2	−9,5	− 5,3	+10,1	+ 4,8
X.	+53,8	− 50,7	+ 3,1	+11,5	+14,6	−4,6	+10,0	+ 5,7	+15,7
XI.	+ 7,9	− 8,0	− 0,1	+ 7,0	+ 6,9	−0,7	+ 6,2	+ 3,5	+ 9,7

Ex his igitur iam concludere poterimus, valores correctionum y et δ ſequentes aſſumi poſſe $y = -12$ et $\delta = -3$, adeo vt totus valor correctus ipſius y ſit $= -22$.

29. His valoribus ipſorum δ, y et π adhibitis facillimum iam euadet, non ſolum correctionem Longitudinis Lunae, ſed etiam veros valores pro tempore coniunctionis ex ſingulis obſeruationibus deductos aſſignare. Quum igitur ex obſeruationibus Grenouicenſibus inuentum fuerit tempus coniunctionis verum Solis et Lunae

$$20^h.\,21'.\,32'' - 0,02.\,\delta + 0,04.\,y + 0,85.\,\pi$$

ſubſtitutis pro δ, y et π valoribus, fiet id tempus $20^h.21'.30''$, at quum Tabulae Lunares *Mayeri* praebeant $20^h.\,23'.\,19''$, patet errorem Tabularum pro momento coniunctionis aequari $1'.\,49''$, quibus re-

 ſpon-

ſpondet motus Lunae relatiuus in longitudinem $1'.4''$ qui igitur correctionem Longitudinis Lunae exprimit. Simili modo obſeruationes Bononienſes praebent Tempus coni. $= 21^h. 7'. 5'' - 0,10.\delta + 0,13.y + 0.92\pi$ quae expreſſio in hanc abit $21^h. 7'. 0''$ at quum ex Tab. eſſe deberet Tempus coniunctionis $21^h. 8'. 40''$ deducitur hinc correctio Longitudinis $59''$, ideoque ſine ſenſibili errore haec correctio $1'. 2''$ aſſumi poterit. Tempora autem coniunctionis ex ſingulis obſeruationibus concluſa iam ſe habebunt vti ſequens Tabula refert.

Tempus coniunctionis verae Solis et Lunae.

	ex initio Eclipſeos	ex fine Eclipſeos
in Caua	$19^h.51'.56''$	. . . . . .
Promont. Lezard	20. 0. 39	$20^h. 0'. 37''$
Grenouico	20. 21. 28	20. 21. 29
Lutetia Paris.	20. 31. 5	20. 30. 54
Bononia	21. 7. 3	21. 6. 58
Caianeburgo	22. 12. 32	22. 12. 29
Petropoli	22. 22. 51	22. 22. 45
Wardhus	22. 26. 23	22. 25. 55
Vmba	22. 38. 26	22. 38. 18
Gurief	23. 49. 21	23. 49. 25
Orenburg	24. 1. 39	24. 1. 54
Iakutsk	29. 0. 12	29. 0. 21
Hafnia	. . . . . .	21. 11. 49
Windobona	. . . . . .	21. 26. 54

Stock-

		ex fine Eclipſeos
Stockholmia		$21^h.33'.45''$
Lunda		21. 14. 14
Gryphiswaldia		21. 16. 23
Pello		21. 57. 42
Kola		22. 33. 31
Ponoi		23. 6. 0

29. Vt nunc verae Longitudines eorum locorum, quorum ſitus Geographicus vel hucusque incognitus fuit, vel minus certe determinatus, hinc determinari poſſint, fundamenti loco ſubſternamus momenta coniunctionum pro iis locis inuenta, quorum Longitudines a meridiano Pariſino iam antea ſatis exacte determinatae ſunt, qualia igitur erunt, quae ex obſeruationibus Grenouicenſibus, Bononienſibus, Petropolitanis, Windobonenſi et Stockholmienſi deducuntur, haec autem momenta ſtatim ad Meridianum Pariſinum reducamus, atque ſic habebimus pro tempore vero coniunctionis Solis et Lunae ad meridianum Pariſinum ſequentes valores:

ex initio eclipſis	ex fine eclipſis
$20^h.30'.44''$	$20^h.30'.45''$
20. 31. 5	20. 30. 54
20. 30. 58	20. 30. 53
20. 30. 51	20. 30. 45
. . . .	20. 30. 44
. . . .	20. 30. 50.

Liquet autem momentum coniunctionis ex initio Eclipſis Pariſiis obſeruato deductum, incertius eſſe, quam vt cum caeteris in computum duci queat, vnde illud excludendum eſſe videtur.

30. Si igitur momenta coniunctionis pro reliquis locis inuenta, comparentur cum ſingulis momentis Pariſinis, atque concluſionum inde deductarum ſumatur medium, prodibunt Longitudines eorum locorum a meridiano Pariſino ſequentes:

Promontorium Lezardi	0^h.	30$'$.	11$''$	Occid.
Caianeburg	1.	41.	41	Orient.
Wardhus	1.	55.	34	... ex obſeruato initio
	1.	55.	6	ex obſeru. fine
Vmba ...	2.	7.	33	
Gurjef ..	3.	18.	34	med ex omnibus
	3.	18.	37	ex fine cum momentis pro fine
Orenburg .	3.	30.	50	ex initio
	3.	31.	5	ex fine
Iakutsk ..	8.	29.	28	med. ex omnibus
	8.	29.	34	... ex fine
Caua	0.	38.	43.	Occid.
Hafnia	0.	41.	0.	Orient.
Lunda	0.	43.	25.	....
Gryphiswaldia	0.	45.	34.	....
Pello	1.	26.	53.	....
Kola	2.	2.	42.	....
Ponoi	2.	35.	11.	....

31.

31. Quo melius perſpiciatur, qua praeciſione differentiae Meridianorum modo aſſignatae gaudeant, placet pro nonnullis horum locorum Longitudines ex aliis obſeruationibus deductas breuiter recenſere. In Promontorio Lezard Emerſio I. Satellitis Iouis obſeruata eſt d. 8. Iunii 1769. temp. vero $9^h. 20'. 14''$, eadem Emerſio Stockholmiae obſeruata fuit $10^h. 53'. 15''$, Vpſaliae autem $10^h. 51'. 45''$, hinc ſi differentia Longitudinis inter Pariſios et Stockholmiam ponatur $1^h. 2'. 55''$, inter Vpſaliam vero et Pariſios $1^h. 1'. 15''$, prodibit ex comparatione obſeruationis in Promontorio Lezard factae, cum Stockholmienſi et Vpſalienſi, Longitudo huius promontorii a Meridiano Pariſino $0^h. 30'. 6''$ vel $0^h. 30'. 16''$, adeoque medium ſumendo $0^h. 30'. 11''$ praeciſe vt modo invenimus. Longitudo Caianeburgi per ſaepius obſervatas Eclipſes Satellitum Iouis inuenta eſt a Stockholmia $0^h. 38'. 40''$ adeoque a Meridiano Pariſino $1^h. 41'. 35''$, quae tantum $6''$ a noſtra concluſione differt. Pro Gurjef obſeruationes Satellitum Iouis cum Tabulis comparatae, proximae eandem praebent huius loci Longitudinem, cum ea, quam ex fine Eclipſis ibi obſeruato deduximus. Vid. Part. II. Tom. XIV. Comment. p. 169. et ſequu. Obſeruationes Satellitum Iouis a Cl. *Islenieff* in Iakutsk inſtitutae, praebent Longitudinem huius loci a Meridiano Pariſino $8^h. 29' 35''$, quae tantum vnico ſecundo differt a noſtra concluſione ex fine Eclipſis deducta. Conf. P. II. Tom. XIV. Comm. p. 308. Immerſionem I^{mi} Satellitis Iouis Cel. *Maſon* in Cava

va obſeruauit 1769. d. 5. Aprilis $13^h. 49'. 35''$, quae ſi conferatur cum obſeruatione eiusdem immerſionis Stockholmiae inſtituta $15^h. 32'. 30''$, dat differentiam meridianorum inter Cauam et Pariſios $40'. 0''$ adeoque integro minuto primo maiorem ea, quam inuenimus, at ex obſeruatione ingreſſus Veneris ibidem inſtituta liquet, noſtram determinationem non multum vltra $30''$ eſſe erroneam, et probabile quoque eſt momentum inchoatae Eclipſis minus exacte aſſignatum fuiſſe. Praeterea noſtrae determinationes Longitudinum pro Hafnia et Lunda, circiter $30''$ ab antea cognitis differunt, per obſeruationes enim Satellitum Iouis concluſa eſt Longitudo Lundae a Pariſiis $43'. 50''$, differentia Longitudinis inter Lundam et Hafniam exiſtente $2'. 28''$, ceu ex menſuris a *Picardo* inſtitutis conſtat. Quum tamen obſeruationes Hafnienſes et Lundenſes pro fine Eclipſis egregie inter ſe conſentiant, vix quidem dubito, quin Longitudines horum locorum a nobis allatae, ad veritatem propius accedant, quam eae quae ex obſeruationibus Satellitum antea deductae ſunt. Si igitur ſupponatur Obſeruatorium Hafnienſe a Pariſino $41'. 0''$ verſus Orientem diſtare, quum Vranieburgum celebris iſte locus Obſeruatorii *Tychonis de Brahe* ab Hafnia $29''$ verſus Orientem diſtet, erit Longitudo Obſeruatorii Tychonici a Pariſiis $41'. 29''$ adeoque $40''$ minor, quam *Cel. la Lande* in ſuis ephemeridibus *Connoiſſance des temps* eam ſtatuere ſolet. Denique per obſeruationes Satellitum Iouis conſtat Longitudinem loci Pello in Lapponia a meridiano

Pariſino

Pariſino eſſe circiter $1^h. 27'. 3''$, quae egregie conuenit cum ea, quam ſupra inuenimus.

32. Quamuis itaque determinationes Longitudinum a nobis modo allatae, ita eſſe videntur comparatae, vt ad veritatem quam proxime accedant, haud tamen negare volumus, etiam eas, quae exactiſſimae nobis videntur correctionem $5''$ admittere poſſe, imprimis quum in determinandis valoribus correctionum δ, y et π rigorem Geometricum ſequi non liceat. Hoc tamen pro certo affirmare audemus, etiam neglectis correctionibus δ et π, Latitudinis correctionem certe duplo fore maiorem ea, quam Rev. *P. Hell* inuenerat, quum tamen ſi nos eius ratiocinandi modum ſecuti fuiſſemus, eandem vel ſaltem non multum diuerſam a ſua correctionem Latitudinis inueniſſemus.

33. Denique haud ſuperfluum erit, de gradu certitudinis, quem obſeruationes Eclipſium Solis circa determinandas Longitudines locorum ſibi vindicant, quaedam adiicere. Vt autem diſtincte agamus, in genere obſeruare licet, omnem incertitudinem, qua concluſiones hinc deductae afficiuntur, ex duplici promanare fonte, ſcilicet vel ex ipſis erroribus obſeruationum, vel ex defectu Theoriae et calculi. Non quidem diffitemur obſeruationes initii eclipſis erroribus ad $10''$ et vltra aſſurgentibus eſſe poſſe obnoxias, finem autem ad praeciſionem $5''$ ſecundorum obſeruari poſſe, omnes nobis largientur

Aſtronomi. Quis autem Aſtronomorum affirmare audebit, ſe de immerſione vel emerſione alicuius Satellitum Iouis intra 4 aut 5'' certum eſſe? Quae de Theoriae defectibus in computo Eclipſium Solis a nonnullis etiam magni nominis Aſtronomis adferuntur, certe non eius ſunt momenti, vt certitudinem concluſionum ex obſeruatis Eclipſibus Solis deductarum infringere valeant. Quod enim I°. incertitudinem verae figurae telluris attinet, ea adeo exiguum in calculos parallacticos habet influxum, vt maximae variationes, quae hinc in Parallaxibus Longitudinis et Latitudinis oriantur certe non duo aut tria ſecunda ſuperent. Si autem quis pro computandis parallaxibus eiusmodi adhibuerit formulas, quae vltra 15'' a veritate deuiant, hic defectus certe pro inſigni haberi meretur, qui autem non Theoriae ſed calculatori vitio verti debet. II°. Vera quantitas diametrorum Solis et Lunae pro exacte cognita non quidem haberi poteſt, huic autem incommodo facilis adfertur medela, ſi ipſa correctio, aut ſemiſummae, aut ſemidifferentiae diametrorum in computum introducatur. Quin etiam ſi has diametros exacte cognoſcere non liceat, ſola in vſum vocata correctione Latitudinis, longitudines locorum absque errore 10'' definiri poterunt. Sic ſi pro noſtro caſu ponatur tam δ quam $\pi = 0$, habebitur valor ipſius y proxime $= -18''$, ex quo fiet tempus coniunctionis Grenouicenſe $= 20^h. 21'. 31''$ et Gurjefuenſe ex obſeruato fine Eclipſis $23^h. 49' 26''$ vnde prodiret differentia meridianorum inter Grenovicum

vicum et Gurjef $3^h. 27'. 52''$, quae a ſuperius inventa vix differt. Obſeruatio finis Eclipſis in Wardhus, praebet ſub hac hypotheſi, tempus coniunctionis $= 22^h. 25'. 48''$, vnde prodibit Longitudo Wardhuſii a Grenouico $2^h. 4'. 17''$, quae cum ſuperius inuenta bene conſentit. Quod III°. ad Parallaxin Lunae ſpectat, videtur quidem eam iam adeo accurate eſſe definitam, vt vix dubium $5''$ ſupereſſe poſſit, obſeruationibus omnibus hunc in finem inſtitutis, pulcre inter ſe conſentientibus. Quicquid autem ſit ex neglecta quoque correctione Parallaxis, nullum plane incommodum eſſe metuendum exempla modo allegata manifeſto oſtendunt. Quamuis igitur correctiones δ, y et π exacte non ſint definitae, id tamen certitudinem concluſionum pro Longitudinibus Geographicis non multum turbat, modo hae correctiones ita definiantur, vt iis ſatisfaciant aequationibus, in quibus earum coefficientes ſunt praemagni. Inexſpectatum autem nemini occurrere debebit, ſi quis dum veram Longitudinem oppidi Gurjef determinare conaretur, eamque ex momento coniunctionis pro fine Eclipſis concluſo $23^h. 50'. 26''$, omni Latitudinis correctione omiſſa, concluderet eſſe $3^h. 19'. 11''$ a meridiano Pariſino, in errorem $30''$ incideret. Si vero idem perſpiceret initium Eclipſis praebere Longitudinem huius loci a Meridiano Pariſio $3^h. 16'. 44''$, certe huiusmodi diſſenſum nulla cum veriſimilitudine, vel ex errore obſeruationum, vel ex defectu Theoriae deriuare poterit. Methodum itaque determinandi lon-

 gitu-

gitudines locorum ex Eclipſibus Solis pro certiſſima habere non dubitamus, atque omne dubium, quod concluſionibus ex ea deductis ineſt, incertitudini obſeruationum tantum adſcribendum eſſe, quae tamen obſeruationes dum a peritis Aſtronomis inſtituuntur, pro fine Eclipſis non multum vltra 5″ dubiae eſſe poſſunt. Vtrum ex vnica vel binis obſeruatis Eclipſibus Satellitum Iouis, Longitudo alicuius loci ad praeciſionem 10 ne dicam 5 ſec. determinari queat (niſi id forte caſu fortuito contingat) vehementer dubito; pluribus ſaltem exemplis oſtendi poteſt, ex obſeruationibus per aliquot decennia ſuper Eclipſibus Satellitum inſtitutis, Longitudines locorum vix cum praeciſione 5″ ſtabiliri potuiſſe.

LON-

LONGITVDO OBSERVATORII PETROPOLITANI EX OBSERVATIONE ECLIPSIS SOLIS A. 1769. DETERMINATA.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Praeter initium et finem huius Eclipſis, vti ſupra vidimus Petropoli ſatis exacte obſeruatos, Cel. Prof. *Mayer* micrometro obiectiuo ad Tubum Achromaticum *Dollondi* 7 pedum applicato, plurimas inſtituit menſuras partium lucidarum limbi Solis; quum igitur pleraſque harum obſeruationum computauerim, quaenam ex iis deduci queant concluſiones pro determinanda Longitudine obſeruatorii Petropolitani, breuiter heic exponere conſtitui. In vſum autem meum eas imprimis ſelegi obſeruationes, pro quibus diſtantiae apparentes centrorum Solis et Lunae ſeu rectae haec centra iungentes, ante et poſt coniunctionem apparentem Solis et Lunae, ad Eclipticam videbantur aeque inclinatae, quae enim ex binis quibuscunque huiusmodi obſeruationibus deducuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis, ita ſunt comparatae, vt dum inuicem addantur, correctiones ex erroribus Latitudinis et diſtan-

tiae centrorum Solis et Lunae oriturae ſe mutuo deſtruant, paruula remanente particula ex correctione parallaxis oriunda, quae autem quum de Parallaxi non multum ſimus dubii, quoque plane negligi poterit. Repraeſentet igitur M ⊙ N eclipticam, A B orbitam Lunae apparentem Petropoli viſam, A et B duo quaecunque loca Lunae in orbita apparenti, prior A ante coniunctionem apparentem, alter B vero poſt eandem, ſintque haec loca ita diſpoſita vt fiat angulus A ⊙ M = B ⊙ N. Hoc facto ſi correctiones Latitudinis et parallaxis vt antea indigitentur per y et π, correctio autem diſtantiae apparentis centrorum per δ, vbi δ ob ⊙ A et ⊙ B proxime aequales pro vtraque obſeruatione eundem habebit valorem, angulus denique A ⊙ M = B ⊙ N exprimatur per Φ, atque nunc ex iis quae in Diſſertat. praecedenti §. 14. monuimus, ſequitur expreſſionem pro tempore coniunctionis ex loco Lunae apparenti in A deductam, ita repraeſentari poſſe:

T. XXXI. Fig. 9.

$$T + \alpha\delta \text{ Sec.} \Phi - \alpha y \text{ Tang.} \Phi + \frac{\alpha\pi}{\Pi}(p' \text{ Tang.} \Phi + p)$$

vbi p' et p eosdem habent ſignificatus ac ante, α vero denotat numerum per quem aliquod ſpatium multiplicari debet, vt tempus inueniatur, quod Luna motu ſuo relatiuo huic ſpatio percurrendo impendit. Simili vero modo ex loco Lunae in B obſeruato tempus coniunctionis ita elicietur expreſſum:

$$T' - \alpha\delta \text{ Sec.} \Phi + \alpha y \text{ Tang.} \Phi - \frac{\alpha\pi}{\Pi}(p' \mp p)$$

nunc

nunc autem probe notandum eſt, valores litterarum p' et p, non amplius eosdem eſſe ac in formula praecedenti. Additis vero duabus his expreſſionibus et ex ſumma earum medio ſumto, orietur pro tempore coniunctionis ſimplex huiusmodi expreſſio: $\frac{1}{2}(T+T')+\beta\pi$ vbi vt ſupra diximus, quantitas minima $\beta\pi$, absque metu ſenſibilis erroris omitti poterit.

2. Methodus iam expoſita, inueniendi vera momenta temporis coniunctionis, tanto ſane maiorem meretur attentionem, quanto euidentius patet, etiam inſignes errores Tabularum Lunarium, certitudinem concluſionum vix infringere, adeo vt vnicum dubium quo determinationes hinc elicitae premuntur ex ipſa incertitudine obſeruationum oriatur. Negare autem non poſſumus quin huiusmodi obſeruationibus etiam ſumma induſtria et exactitudine inſtitutis ſaepius errores plurium ſecundorum ineſſe poſſint, qui errores tanto maiorem in determinationem pro tempore coniunctionis habebunt influxum, quanto propius loca A, et B diſtant a coniunctione Solis et Lunae apparenti. At vero quo propiora A et B ſunt ad momentum coniunctionis apparentis, eo minus erit errandi periculum, propter diſtantiam apparentem centrorum Solis et Lunae, circa haec loca tardius decreſcentem vel increſcentem. Ex aduerſo autem commode fit, vt licet pro locis A et B a coniunctione apparente magis remotis, ob motum Lunae velociorem facilius ſit in errores illabi, hi tamen errores in tempore coniunctionis aſſignando non nimis

nimis magnam producant mutationem. Quamuis vero quoque mediocres errores in menſuris partium lucidarum ſupponantur commiſſi, modo pro binis obſeruationibus in eundem ſenſum cadant et haud multum ſint inaequales, pro tempore coniunctionis tamen inuenietur expreſſio haud multum a veritate abludens.

3. Ex praecedenti diſſertatione conſtat momenta initii et finis Eclipſeos Grenouici obſeruata pro tempore coniunctionis has praebuiſſe expreſſiones.

ex initio $20^h.21'.17'' + 1,94.\delta - 0,96.y + 1,61.\pi$

ex fine $20.21.46 - 1,98.\delta + 1,04.y - 0,09.\pi$

ex quibus medium ſumendo prodibit tempus coniunctionis

$$20^h.21'.32'' - 0,02.\delta + 0,04.y + 0,85.\pi$$

vbi quum coefficientes correctionum δ et y ſint quam minimi, hos terminos tuto negligere poterimus, adeo vt iam ſit Tempus coniunctionis verum Solis et Lunae pro Meridiano Grenouicenſi $20^h.21'.32'' + 0,85.\pi$. Quo autem certior euaderem de certitudine huius concluſionis, ex obſeruationibus a Celeb. *Maskelyne* circa partes lucidas inſtitutis, valores pro tempore coniunctionis elicere conſtitui. Hunc in finem imprimis ſelegi binas ſequentes obſeruationes:

Temp. Grenou. ver.	Pars lucida
$19^h.22'.13''$	$15'.40'',5$
37. 56	15. 49, 1

Calcu-

Calculo autem ſubducto pro his temporibus ſequentia inueni elementa.

Temp. ver.	Semid. Lunae apparens	Latit. Lunae	Paral. Latit.	Paral. Longit.
$19^h.22'.13''$	$1013'',4$	$59'.\ 7'',0$	2561, 8	1851, 9
37.56	1014, 0	58. 12, 9	2498, 5	1803, 5

vbi notaſſe ſufficiat Latitudinem Lunae e Tabulis depromtam, $10''$ a nobis diminutam eſſe, quod hoc in negotio nullam producit mutationem.

Hinc ex priori obſeruatione deducitur tempus coniunctionis

$$20^h.20'.19''+8,00.\delta-7,82.y+6,30.\pi$$

ex poſteriori vero

$$20^h.22'.45''-8,15.\delta+7,97.y-4,59.\pi$$

ideoque medium ſumendo

$$20^h.21'.32''-0,07.\delta+0,07.y+0,85.\pi$$

vel reiectis correctionibus ex δ et y profluentibus: $20^h.21'.32''+0,85.\pi$ prorſus vt ante. Videtur ergo hanc expreſſionem pro tempore coniunctionis Grenouicenſi, maxime indubitatam eſſe, vnde cum ea ſimiles expreſſiones pro eodem tempore ad meridianum Petropolitanum computato, tuto conferre licebit.

4. Inter obſeruationes a Celeb. *Mayero* inſtitutas, non niſi 14 inueniuntur eſſe correſpondentes, ſeu tales, vt binis quibusque idem reſpondeat angulus Φ, has autem obſeruationes, vna cum reliquis elementis ex calculo deductis, ſequenti Tabella ob oculos ponere, viſum eſt.

Temp. Petrop. ver. ante coni. appar.		Pars. Luc.	Diam. ☽ appar.	Latit. ☽	Par. Lat.	Par. Long
I.	$21^{h}.18'.51''$	$28'.\ 6'',2$	$1016'',7$	$59'.32'',9$	$2494'',1$	$882'',6$
II.	25. 32	25. 18, 2	1016, 9	59. 9, 9	2476, 0	845, 0
III.	30. 50	23. 25, 0	1017, 0	58. 51, 6	2461, 9	814, 8
IV.	34. 30	22. 8, 3	1017, 1	58. 39, 1	2452, 3	793, 3
V.	43. 19	19. 21, 1	1017, 2	58. 8, 6	2429, 7	740, 9
VI.	45. 48	18. 42, 3	1017, 3	58. 0, 1	2423, 4	726, 0
VII.	51. 45	17. 22, 8	1017, 4	57. 39, 5	2408, 3	688, 9
poſt. coni. appar.						
VII.	22. 18. 28	16. 40, 5	1017, 7	56. 5, 8	2344, 8	513, 6
VI.	24. 51	17. 47, 6	1017, 7	55. 45, 6	2332, 4	473, 7
V.	28. 30	18. 35, 6	1017, 8	55. 33, 0	2324, 5	449, 1
IV.	37. 25	21. 3, 0	1018, 0	55. 2, 2	2306, 4	387, 8
III.	40. 38	22. 6, 2	1018, 1	54. 51, 2	2300, 6	365, 3
II.	43. 25	22. 54, 4	1018, 1	54. 41, 6	2294, 7	345, 9
I.	53. 34	26. 35, 6	1018, 2	54. 6, 1	2275, 9	274, 0

Monuiſſe autem heic ſufficiat, calculo inſtituto partibus lucidis quoque paruulam additam eſſe correctionem, propter effectum refractionis, quo fit vt hae partes viſui minores offerantur, quam reuera ſunt, quamuis hanc quoque correctiunculam ob rationes § 2 allegatas tuto negligere licuiſſet.

5. Ex hiſce elementis ſequentes iam deducuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis, in quibus recenſendis eas, quae ex obſeruationibus correſpondentibus deducuntur, ſemper coniunctim adferemus:

Tempus

Tempus coniunctionis ex ſingulis obſeruationibus concluſum.

I. $22^h.22'.33''+2,12.\delta-1,29.y+1,27.\pi$ }
$22.\ 23.\ 12-2,03.\delta+1,21.y-0,62.\pi$ }

II. $22.\ 22.\ 16+2,31.\delta-1,57.y+1,45.\pi$ }
$22.\ 23\ \ 25-2,31.\delta+1,58.y-0,83.\pi$ }

III. $22.\ 22.\ 21+2,45.\delta-1,78.y+1,57.\pi$ }
$22.\ 23\ \ 10-2,39.\delta+1,70.y-0,89.\pi$ }

IV. $22.\ 22.\ 19+2,61.\delta-1,99.y+1,69.\pi$ }
$22.\ 23.\ 19-2,54.\delta+1,89.y-1,01.\pi$ }

V. $22.\ 21.\ 54+3,30.\delta-2,83.y+2,22.\pi$ }
$22.\ 23.\ 50-3,21.\delta+2,73.y-1,52.\pi$ }

VI. $22.\ 21.\ 49+3,64.\delta-3,22.y+2,46.\pi$ }
$22.\ 23.\ 33-3,69.\delta+3,29\ y-1,71.\pi$ }

VII. $22.\ 21.\ 43+5,02.\delta-4,73.y+3,42.\pi$ }
$22.\ 23.\ 28-5,12.\delta+4,82.y-2,84.\pi$ }

Tempus coniunctionis quod medium ſumendo prodit.

I. $22^h.22'.52''+0,04.\delta-0,04.y+0,34.\pi$

II. $22.\ 22.\ 50-0,00.\delta+0,00.y+0,31.\pi$

III. $22.\ 22.\ 45+0,03.\delta-0,04.y+0,34.\pi$

IV. $22^h. 22'. 49'' + 0,04.\delta - 0,05.y + 0,34.\pi$
V. $22. 22. 52 + 0,04.\delta - 0,05.y + 0,35.\pi$
VI. $22. 22. 41 - 0,03.\delta + 0,03.y + 0,37.\pi$
VII. $22. 22. 35 - 0,05.\delta + 0,05.y + 0,29.\pi$

Hinc autem per medium colligitur tempus verum coniunctionis Solis et Lunae ad meridianum Petropolitanum

$$22^h. 21'. 47'' + 0,01.\delta - 0,01.y + 0,33.\pi$$

ſeu reiectis δ et y $22^h. 21'. 47'' + 0,33\,\pi$, at pro meridiano Grenonicenſi inuenimus $20^h. 21'. 32'' + 0,85.\pi$ ex quo habebitur differentia Meridianorum inter Grenouicum et Petropolin $2^h. 1'. 15'' - 0,52.\pi$, ideoque ſi π ſtatuatur $= -3$ erit Longitudo Obſeruatorii Petropolitani a meridiano Pariſino $1^h. 52'. 1''$ ſin autem π aſſumatur $= 0$ prodibit ea $1^h. 51'. 59''$. Ceterum ſi in expreſſionibus pro tempore coniunctionis Grenouicenſi, loco y eius valor ſubſtituatur, prodibit hoc tempus $20^h. 21'. 31'' + 0,85.\pi$, vnde Longitudo obſeruatorii Petropolitani vno ſecundo augebitur. Deinde quum concluſio ſeptima a reliquis aliquantum differat, ſi ea excluſa ex reliquis medium ſumatur, erit tempus coniunctionis Petropolitanum: $22^h. 22'. 48'' + 0,34.\pi$ hincque differentia meridianorum inter obſeruatorium Grenouicenſe et Petropolitanum $2^h. 1'. 17'' - 0,51.\pi$, quae poſito $\pi = -3$, dat Longitudinem Petropolis a meridiano Pariſino $1^h. 52'. 3''$, at ſumto $\pi = 0$ eandem praebet $1^h. 52'. 1''$, quae a communiter recepta non differt.

6. Circa

6. Circa ſignificatum litterae δ heic obſeruari meretur, quod is plane diuerſus ſit ab eo, quem huic litterae in praecedenti diſſertatione tribuimus, ibi enim δ ſignificabat correctionem ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, heic vero δ generaliter denotat correctionem cuiuscunque diſtantiae apparentis centrorum Solis et Lunae, quae igitur cum de Phaſi aliqua obſeruata quaeſtio eſt, inuoluere putanda eſt non modo correctionem ſemidifferentiae diametrorum Solis et Lunae, ſed etiam partis lucidae menſuratae, ſi igitur correctio ſemidiametri Lunaris exprimatur per a, ſemidiametri vero Solaris per b, et pars lucida menſurata dicatur P, habebitur pro huiusmodi caſu $\delta = a - b(1 - \frac{P}{d})$ ſignificante d ſemidiametrum Solis. Quodſi igitur de valore ipſius δ ex praecedenti Diſſertatione ſatis eſſemus certi, tamen inde minime ſequeretur, hunc valorem quantitati δ heic adhibitae competere. Ex obſeruationibus autem modo allatis valorem quantitatis δ eruere vellae, res ſane foret difficillima ob ineuitabiles errores obſeruationum, id tamen notaſſe iuuabit, ſi hunc valorem exacte determinare liceret, tum correctiones ſemidiametri tam Solis, quam Lunae ſeorſim aſſignari poſſe.

7 Quamquam ſitus obſeruatorii Petropolitani ex obſeruatis Eclipſibus Satellitum Iouis iam antea ſatis exacte definitus ſit, noſtra tamen opera in computandis obſeruationibus memoratis eo minus erit ſuperflua, quod hoc imprimis argumento euictum

 ſit,

ſit, Longitudines locorum ex Eclipſibus Solis ſaltem ad praeciſionem 5$''$ definiri poſſe, etiamſi vel maxime omnes correctiones Elementorum Aſtronomicorum plane negligantur. Maximus quidem disſenſus, qui in expreſſionibus noſtris pro tempore coniunctionis occurrit, ad 17$''$ aſſurgit, qui tamen reiecta VII concluſione ad 11$''$ reducitur, iam vero vnicuique diiudicandum relinquo, an non pro inveſtiganda Longitudine locorum ex Eclipſibus Satellitum Iouis, dum 12 obſeruationes inter ſe comparantur, diſſenſus ad 10$''$ et vltra aſſurgentes nunquam non prodire ſoleant? Hoc ipſo autem nihil methodo vulgo receptae, longitudines locorum per Eclipſes Satellitum definiendi, detrahere volo; ſed eorum tantum refellere opinionem, qui Eclipſibus Solaribus ad determinandas Longitudines locorum etiam deliquia Lunae praeferre non dubitant, dum omnes concluſiones, quae ex prioribus deducuntur pro incertiſſimis habent.

EX-

EXPOSITIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM A. 1770. IN VRBE ZARICIN INSTITVTARVM.

a

PETRO INOCHODSOW.

I.

Verificatio Quadrantis ad horizontem.

Notatis in baculo duabus metis centro tubi immobilis, in vtroque Quadrantis ſitu recto et inverſo reſpondentibus, hocque baculo ad diſtantiam $\frac{2}{3}$ Werſtarum defixo, cepi altitudines harum metarum.

In ſitu quadrantis recto altitudo metae ſuperioris	0°.	11′.	36″
In ſitu inuerſo, altitudo inferioris	0.	9.	26, 7
Differentia		2.	9, 3
Vnde error Quadrantis		1.	4, 6.

Haec operatio inſtituta fuit die Aprilis 6to, vet. ſtyl. Barometro ante operationem monſtrante 28 Dig. $\frac{2}{3}$ Lin. poſt operationem 28 Dig. $\frac{1}{2}$ Lin.

Die 17mo Aprilis in diſtantia 300 perticarum collocaui aſſerem, factis in ipſo vt ante duabus metis, atque reperi altitudinem

in

in ſitu recto metae ſuperioris 0°. 54′. 3″ aëre
in ſitu inuerſo metae inferioris 0. 52. 5 vndulante
vnde error Quadr. 0′. 59″.

Barometrum monſtrabat ante operationem 28 Dig. $3\frac{3}{4}$ Lin., poſt operationem 28 Dig. $3\frac{1}{8}$ Lin.

Die 2 Maii cepi altitudines earundem metarum

in ſitu recto 0°. 53′. 50″
in ſitu inuerſo 0. 51. 36
vnde error Quadrantis 1′. 7.

Altitudo Barometri ante operat. 27 Dig. $10\frac{2}{3}$ Lin., poſt operationem 27 Dig. $10\frac{1}{8}$ Lin.

Die 8. Maii eorundem ſignorum inueni altitudines

in ſitu recto 0°. 54′. 9″
in ſitu inuerſo 0. 51. 59
Ex quibus prodit error 1. 5.

Altit. Barometri ante operat. 28 Dig. $1\frac{7}{8}$ Lin. poſt 28 Dig. $1\frac{5}{8}$ Lin.

Die 18. Maii Earundem metarum altitudines

in ſitu recto 0°. 54′. 5″, 8
in ſitu inuerſo 0. 52. 1, 7
vnde error Quadrantis 1. 2.

Barometrum monſtrabat ante operationem 27 Dig. $11\frac{2}{3}$ Lin. poſt operationem 27 Dig. $11\frac{1}{3}$ Lin.

Ex his quinque operationibus error quadrantis medius erit — 1′. 3″, 5, vel reiiciendo ſecundam opera-

operationem, quae propter vndulationem aëris eſt ſubdubia, prodibit error Quadrantis — 1′. 4″, 6.

Verificatio Quadrantis ad Zenit.

Altitudo	Limbo ad Occid. G.	M.	S.	Limbo ad Orient. G.	M.	S.	Error
δ Vrſae maioris	80.	35.	21	99.	47.	3	11′. 12″
ε	81.	41.	1	98.	41.	17	11. 9
ζ	82.	45.	40	97.	36.	31	11. 5½
η	88.	45.	42	91.	56.	38	11. 10.

Ex his ſumendo medium Arithmeticum erit error 11′. 9″, 1. Nunc ſi ſubtrahantur 10 minuta prima, quae in limbo Quadrantis deficiunt, ideoque hac quantitate indicatas altitudines augent, erit error ex hac verificatione — 1′. 9″, 1; erat autem ex verificatione ad horizontem — 1′. 4″, 6 repertus, conſequenter ex vtraque rectificatione 1′. 6″, 8, qui ex captis altitudinibus eſt auferendus, ſed poſt 78° et 50′, 11′. 6″, 8 ſubtrahenda erunt.

Craſſitiem fili micrometri etiam diuerſam inveni, ſed ex multis et repetitis obſeruationibus prodiit ea 13″.

II. Determinatio Latitudinis vrbis Zaricin.

Ex ingenti numero obſeruationum ſuper altitudines meridianas Solis et fixarum inſtitutarum, quaedam tantum ſelectae fuerunt, ad inueniendam huius loci Latitudinem. Et quum concluſiones ex iis deductae egregie inter ſe conueniant, confidimus de-

terminationem Latitudinis ex ipſis petitam, quam proxime ad veritatem accedere. Primum itaque quum diebus a 21. Maii vet. St. ad 2. Iunii obſervatae fuerint altitudines limbi Solis inferioris, conſiderandum eſt veras altitudines centri Solis inueniri ſi ex valore ſemidiametri Solaris pro hoc tempore, ſubtrahatur tum correctio inſtrumenti, cum refractio parallaxi Solari minuta, atque differentia ad obſervatam altitudinem limbi inferioris addatur. Inuenitur autem quantitatem addendam pro his diebus ſore 14'. 17'', quare iam facillimum erit ex obſeruatis his altitudinibus, Latitudinem loci deriuare, quod ſequenti Schemate exhibetur, vbi notaſſe iuuabit pro computanda Declinatione Solis ſuppoſitam fuiſſe Longitudinem Zaricini a Pariſiis 2^h. 48'.

	Altit. limbi inf. obſeru.	Altit. vera centri Solis	Decl. ☉lis	Eleuatio Poli
Maii 21.	63°. 8'. 40''	63°. 22'. 57''	22°. 5'. 24''	48°. 42'. 27''
25.	63. 38. 16	63. 52. 33	22. 34. 46	48. 42. 13
27.	63. 50. 40	64. 4. 57	22. 47. 6	48. 42. 9
28.	63. 56. 9	64. 10. 26	22. 52. 40	48. 42. 14
Iunii 2.	64. 18. 4	64. 32. 21	23. 14. 28	48. 42. 7
			Medium	48. 42. 14.

Sequentibus diebus a 2. Iunii vsque ad 26. captae fuerunt altitudines limbi Solis ſuperioris, vt igitur ex iis verae altitudines centri deducantur, obſeruaſſe ſufficiat ex altitudinibus obſeruatis conſtanter ſubtrahi debere 17'. 16'', binis diebus 25 et 26. Iunii exceptis, pro quibus 17'. 17'' ſubtrahenda erunt.

Iunii

	Altit. limbi Sup.	Altit. centri ☉lis	Declin. ☉lis	Eleuatio Poli
Iunii 3	64°. 52′. 35″	64°. 35′. 19″	23°. 17′. 36″	48°. 42′. 17″
6	64. 59. 18	64. 42. 2	23. 24. 33	48. 42. 31
7	65. 1. 4	64. 43. 48	23. 26. 4	48. 42. 16
8	65. 1. 55	64. 44. 39	23. 27. 9	48. 42. 30
9	65. 2. 40	64. 45. 24	23. 27. 49	48. 42. 25
10	65. 2. 58	64. 45. 42	23. 28. 6	48. 42. 24
13	65. 1. 9	64. 43. 53	23. 26. 21	48. 42. 28
14	64. 59. 30	64. 42. 14	23. 24. 56	48. 42. 42
16	64. 55. 29	64. 38. 13	23. 20. 52	48. 42. 39
18	64. 49. 48	64. 32. 32	23. 15. 14	48. 42. 42
19	64. 46. 23	64. 29. 7	23. 11. 46	48. 42. 39
22	64. 33. 37	64. 16. 21	22. 59. 1	48. 42. 40
24	64. 23. 26	64. 6. 10	22. 48. 29	48. 42. 19
25	64. 17. 32	64. 0. 15	22. 42. 37	48. 42. 22
26	64. 11. 17	63. 54. 0	22. 36. 22	48. 42. 22
			Medium	48. 42. 29

Si igitur ex omnibus his viginti obſeruationibus altitudinum Solis medium ſumatur, prodibit eleuatio Poli Zaricini 48°. 42′. 25″. Progrediamur vero nunc ad ſtellas fixas, quarum altitudines obſeruatae ſunt, in earum autem numero primum occurrit Regulus, cuius Declinatio quum ineunte anno 1770 fuerit 13°. 5′. 8″, pro die vero 10 Aprilis inueniatur eius Deuiatio – 7″, 3, Praeceſſio – 4,9 et Aberratio — 3″, 1, ſimilique ratione pro die 24, deuiatio – 7, 3, praeceſſio – 4, 9 et aberratio – 3, 1; nunc ex eius obſeruatis altitudinibus, determinationes latitudinis loci facile peti poſſunt.

 d. 10.

	Altit. obſeruata	Altit. vera	Decl. app. Reguli	Eleuat. Poli
d. 10. Apr.	54°. 24′. 37″, 5	54°. 22′. 50″	13°. 4′. 53″	48°. 42′. 3″
d. 17.	54. 24. 40	54. 22. 53	13. 4. 53	48. 42. 0
20.	54. 24. 39	54. 22. 52	13. 4. 54	48. 42. 2
21.	54. 24. 37	54. 22. 50	13. 4. 54	48. 42. 4
24.	54. 24. 33	54. 22. 46	13. 4. 54	48. 42. 8
			medium	48°. 42′. 3″.

Regulum excipiat Arcturus, cuius declinatio pro Anno 1770. fuit 20°. 23′. 13″, ad diem vero 1 Maii habetur eius deuiatio − 3, 6; Praec. − 6, 5; Aberratio + 4″, 3; porro pro die 9 Iunii deuiatio − 3″, 3; praeceſſio − 9, 0 et aberratio + 10, 6, quibus obſeruatis determinatio Latitudinis loci ita ſe habebit.

	Altit. obſeruata	Altit. vera	Declin. app.	Latitudo loci
d. 1. Maii	61°. 42′. 39″	61°. 41′. 1″	20°. 23′. 7″	48°. 42′. 6″
4.	61. 42. 41	61. 41. 3	20. 23. 8	48. 42. 5
7.	61. 42. 49	61. 41. 11	20. 23. 8	48. 41 57
12.	61. 42. 47	61. 41. 9	20. 23. 9	48. 42. 0
13.	61. 42. 44	61. 41. 6	20. 23. 9	48. 42. 3
24.	61. 42. 45	61. 41. 7	20. 23. 10	48. 42. 3
26.	61. 42. 37	61. 40. 59	20. 23. 11	48. 42. 12
2. Iunii	61. 42. 45	61. 41. 7	20. 23. 11	48. 42. 4
3.	61. 42. 46	61. 41. 8	20. 23. 11	48. 42. 3
8.	61. 42. 44	61. 41. 6	20. 23. 12	48. 42. 6
9.	61. 42. 47	61. 41. 9	20. 23. 12	48. 42. 3
			Medium	48. 42. 4

Pro

Pro calculo Latitudinis ex obſeruationibus ε Bootis ineundo obſeruamus fuiſſe A. 1770. eius Declinationem 28°. 3′. 19″ Bor., porro vero ad diem 1. Maii Deuiat. - 2, 6, Praec. - 5, 3 et Aberr. - 1, 8 atque ad diem 9. Iunii Deuiat. - 2, 4, Praec. - 7, 7 et Aberr. + 7, 0.

	Altit. obſeru.	Altit. vera	Declin. app.	Latit. loci
d. 1. Maii	69°. 22′. 20″	69°. 20′. 52″	28°. 3′. 9″	48°. 42′. 17″
4.	69. 22. 14	69. 20. 46	28. 3. 10	48. 42. 24
20.	69. 22. 20	69. 20. 52	28. 3. 13	48. 42. 21
1. Iunii	69. 22. 19	69. 20. 51	28. 3. 15	48. 42. 24
2.	69. 22. 24	69. 20. 56	28. 3. 15	48. 42. 19
6.	69. 22. 33	69. 21. 5	28. 3. 15	48. 42. 10
9.	69. 22. 27	69. 20. 59	28. 3. 16	48. 42. 17
			Medium	48. 42. 19

Pro α Coronae Borealis habetur Declinatio ineunte A. 1770 27°. 30′. 9″ Bor., pro die autem 16 Maii Deuiat — 0, 9, Praec. — 4, 9 et aberr. — 0, 3, ſimiliter pro die 6 Iunii deuiat. — 0, 7 Praeces. — 5, 8 et Aberr. + 4, 9.

	Altit. obſeru.	Altit. vera	Decl. app.	Latitudo loci
16 Maii	68°. 49′. 25″, ½	68°. 47′. 57″	27°. 30′. 3″	48°. 42′. 6″
24	68. 49. 19	68. 47. 50	27. 30. 5	48. 42. 15
29.	68. 49. 26	68. 47. 57	27. 30. 6	48. 42. 9
1 Iunii	68. 49. 30	68. 48. 1	27. 30. 7	48. 42. 6
3.	68. 49. 30	68. 48. 1	27. 30. 7	48. 42. 6
5.	68. 49. 24	68. 47. 55	27. 30. 8	48. 42. 13
6.	68. 49. 22½	68. 47. 54	27. 30. 8	48. 42. 14.
			medium	48. 42. 10

Adiiciamus denique quasdam altitudines ζ Bootis, pro qua erat Decl. A. 1770. 14°.43′.39″ Bor, ad diem vero 2 Iunii deuiat. — 2, 5, Praec. — 7, 1 et aberrat. + 2, 4 ſimiliterque pro die 9 Iunii, Deuiat. vt ante, Praeces — 7,4 et Aberratio + 3,7.

	Alt. obſeru.	Altit. vera	Decl. app.	Eleuatio Poli
d. 2 Iunii	56°.2′.50″	56°.1′. 5″	14°.43′.32″	48°.42′.27″
3	56. 2. 45	56. 1. 0	14. 43. 32	48. 42. 32
5	56. 2. 41	56. 0. 56	14. 43. 33	48. 42. 37
6	56. 2. 52	56. 1. 7	14. 43. 33	48. 42. 26
8	56. 2. 55	56. 1. 10	14. 43. 33	48. 42. 23
9	56. 2. 56	56. 1. 11	14. 43. 33	48. 42. 22
			medium	48. 42. 28

Si igitur ex omnibus his determinationibus, quas ex altitudinibus fixarum deduximus, medium ſumatur prodibit Eleuatio Poli pro Zaricino 48°.42′. 14″, quum vero obſeruationes altitudinum Solis dediſſent 48°.42′. 25″, medium ex his ſumendo, ſine ſenſibili errore ea ſtatui poſſe videtur 48°. 42′. 20″, praeſertim quum plures aliae obſeruationes fixarum confirment eam aliquanto eſſe maiorem, quam quae ex obſeruationibus Arcturi et Reguli ſequeretur.

III. Obſeruationes pro Longitudine vrbis Zaricin determinanda inſtitutae.

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{18}{29}$ Martii meridies medius ex altit. Solis correſp	0ʰ. 0′ 20″,9	
Correctio meridiei	— 17, 1	
Meridies verus.	0ʰ. 0′. 3″,8	

Die

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{20}{31}$ Martii meridies ex altit. correſp.	$0^h. 0'.25'',1$	
Correctio merid.	$-17,2$	
Meridies verus.	$0. 0. 7,9$	
Die $\frac{18}{29}$ Martii *Imm. II. Sat. Iouis* obſeruata Teleſcopio Gregoriano duorum circiter pedum.	13. 57. 26	$13^h.57'.21''$
Tempore obſeruationis aer erat tranquillus, ſed circa horizontem vaporoſus, vt nullum plane faſciarum veſtigium videre licuerit. Minutis primis 7 elapſis, Iouis altitudo 8°. $37'\frac{1}{2}$.		
Die $\frac{25 \text{ Martii}}{5 \text{ April}}$ meridies ex ex altit. correſp.	0. 0. 24, 3	
Correctio meridiei	$-17,1$	
Meridies verus	0. 0. 7, 2	
Die $\frac{26 \text{ Martii}}{6 \text{ April}}$ meridies ex altit. correſp.	0. 0. 17, 9	
Correctio meridiei	$-16,3$	
Meridies verus	0. 0. 1, 6	
Die $\frac{25 \text{ Martii}}{5 \text{ April}}$ *Imm. II. Sat.* Satelles ſplendorem ſuum		
amittit	16. 35. 17	16. 35. 14
occultatur	35. 49	35. 46
extra omne dubium immerſus	16. 36. 2	35. 59

Obſer-

Obſeruatio inſtituta Teleſcopio Gregoriano. Faſciae Iouis confuſe videbantur. Tempore obſeruationis aer erat tranquillus, ſed circa horizontem, vti hic ſemper fere fieri ſolet, vaporibus aſcendendibus ex *Volga* et lacubus trans *Volgam* ſitis, inſpiſſatus; nihilominus haec obſeruatio videtur bona.

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{5}{16}$ Aprilis meridies ex altit. correſp.	$0^h. 0'.21'',1$	
Correctio meridiei	− 14, 2	
Meridies verus	0. 0. 6, 9	
Die $\frac{7}{18}$ Aprilis meridies ex altit. correſp.	0. 0. 20, 5	
Correctio meridiei	− 16, 2	
Meridies verus	0. 0. 4, 3	
Die $\frac{6}{17}$ Aprilis *Imm. I. Satellitis Iouis*		
Imminutio lucis ſenſibilis	16. 37. 58	16. 37. 53
Satelles immergi videtur.	38. 28	38. 23
Extra omne dubium immerſus.	38. 34	38. 29
Obſeruatio inſtituta Teleſcopio Gregoriano, altitudo Iouis poſt obſeruationem 17°. 38′.		
Die $\frac{11}{22}$ Aprilis meridies ex altit correſp.	0. 0. 28, 9	
Correctio meridiei	− 13. 7	
Meridies verus	0. 0. 15, 2	

Die

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{12}{23}$ Aprilis meridies ex altitud. correſp.	$0^h. 0'. 30'',8$	
Correctio Meridiei	$-12, 8$	
Meridies verus	0. 0. 18, 0	
Die $\frac{11}{22}$ *Imm. III. Sat. Iouis*		
Decrementum lucis ſenſibile	13. 59. 30	13. 59. 13
Immergi videtur	14. 0. 26	14. 0. 9
Iterum apparet	14. 0. 30	14. 0. 13
Immerſio perfecta	14. 0. 36	14. 0. 19

Tempore obſeruationis aer tranquillus. Altitudo Iouis poſt obſeruationem 16°. 12'. Emerſionem obſeruare non licuit.

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{15}{26}$ Aprilis meridies ex altit. correſp.	$0^h. 0'.47'',0$	
Correctio meridiei	$-12, 3$	
Meridies verus	0. 0. 34, 7	
Die $\frac{16}{27}$ Aprilis meridies ex altit. correſp.	0. 0. 50, 2	
Correctio meridiei	$-12, 7$	
Meridies verus	0. 0. 37. 5	
Die $\frac{15}{26}$ Aprilis *Imm. I. Satellitis Iouis* Tubo *Dollondiano* 12 ped. obſeruata	$13^h. 1'. 43''$	$13^h. 1'. 7''$
Tempore obſeruationis aer circa horizontem erat vapo-		

 roſus

	Temp. Pend.	Temp. ver.
roſus. Altitudo Iouis poſt obſeruationem erat $13\frac{1}{2}^{\circ}$.		
Die $\frac{19}{30}$ Aprilis meridies ex altit. correſp.	$0^h. 1'.12'',7$	
Correctio meridiei	$-12,8$	
Meridies verus	0. 0. 59, 9	
Die $\frac{20}{1}$ $\frac{Aprilis}{Maii}$ merid. ex altit. correſp.	0. 1. 23, 2	
Correctio meridiei	11, 6	
Meridies verus	0. 1. 11, 6	
Die $\frac{19}{29}$ Aprilis Occultatio ſtellae fixae a Luna	$8^h.39'.28''$	$8^h.38'.33''$
Haec obſeruatio dubia eſt, ob nubeculam per eam diſci Lunaris partem, vbi occultatio obſeruata propulſam.		
Die $\frac{19}{29}$ Aprilis *Imm. II. Satellitis Iouis*		
Satelles immergi videtur	13. 43. 40	13. 42. 33
Immerſio certe contigit	43. 51	42. 44
Altitudo Iouis poſt obſervationem $17^{\circ}. 8'$. Aer tranquillus, ſed ad horizontem vaporoſus.		
Die $\frac{21}{1}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ meridies ex altit correſp.	0. 5. 55, 6	
Correctio meridiei	$-5,6$	
Meridies verus	0. 5. 50, 0	

Die

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{23}{3}\frac{Maii}{Iunii}$ meridies ex altit. correſp.	$0^h. 6'. 43'',5$	
Correctio meridiei	$-4, 9$	
Meridies verus	0. 6. 38, 6	
Die $\frac{22}{2}\frac{Maii}{Iunii}$ Occultatio fixae a Luna obſeruata	$9^h.17'.45''$	$9^h.11'.22''$
Dubium adeſt $6''$ in exceſſu.		
Die $\frac{8}{19}$ Iunii meridies ex altit. correſp.	0. 13. 55, 3	
Correctio meridiei	$-0, 6$	
Meridies verus	0. 13. 54, 7	
Die $\frac{9}{20}$ Iunii meridies ex altit. correſp.	0. 14. 22, 7	
Correctio meridiei	$-0, 3$	
Meridies verus	0. 14. 22, 4	
Die $\frac{10}{21}$ Iunii meridies ex altit. correſp.	0. 14. 48, 5	
Die $\frac{8}{19}$ Iunii *Emerſio II. Satellitis Iouis*		
Emerſionis initium	10. 23. 40	10. 9. 33
Satelles diſtincte videtur	10. 24. 26	10. 10. 19
Obſeruatio facta Tubo Dollondiano. Tempore obſervationis aer erat tranquillus. Altitudo Iouis poſt obſervationem 17°.53'. Tres faſciae in diſco Iouis videbantur, ſed non ſatis diſtincte.		

	Temp. Pend	Temp. ver.
Die $\frac{9}{20}$ Iunii *Emerſio I. Satellitis Iouis.*		
Emerſio incipit	12^h. 8$'$. 27$''$	11^h.53$'$.51$''$
Satellitem video diſtincte.	9. 12	54. 36
Altitudo Iouis poſt obſervationem 17°. 46$'$, faſciae vt praecedenti die videbantur.		
Die $\frac{16}{27}$ Iunii meridies ex altit. correſp.	0. 17. 20, 0	
Correctio meridiei	+ 1, 2	
Meridies verus	0. 17. 21, 2	
Die $\frac{22}{3}$ $\frac{Iunii}{Iulii}$ meridies ex altit. correſp.	0. 19. 51, 0	
Correctio meridiei	+ 2, 8	
Meridies verus	0. 19. 53, 8	
Die $\frac{26}{7}$ $\frac{Iunii}{Iulii}$ meridies ex altit. correſp.	0. 21. 27, 2	
Correctio meridiei	+ 3, 7	
Meridies verus	0. 21. 30, 9	
Die $\frac{18}{29}$ *Emerſio I. Sat. Iouis* obſeruata.	8. 34. 33	8. 16. 11
Haec obſeruatio dubia, ſatelles enim iam ſatis diſtincte oculis repraeſentabatur, cum hoc momentum ſignatum fuit.		
Die $\frac{25}{6}$ $\frac{Iunii}{Iulii}$ *Emerſio I. Sat. Iouis.*		

Initium

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Initium emerſionis	$10^h. 31'. 12''$	$10^h. 9'. 55''$
Satellitem diſtincte video	32. 8	10. 10. 51
Obſeruatio inſtituta Tubo Dollondiano. Quinque faſciae in Ioue videbantur, ſed non ſatis diſtincte. Altitudo Iouis 18°. 54'.		
Die $\frac{9}{20}$ Iulii meridies ex altit. correſp.	0. 0. 39, 1	
Correctio meridiei	+ 6, 9	
Meridies verus	0. 0. 46, 0	
Die $\frac{12}{23}$ Iulii meridies ex altit. correſp.	0. 0. 31	
Correctio meridiei	+ 7, 3	
Meridies verus	0. 0. 38, 3	
Die $\frac{11}{22}$ Iulii *Emerſio I. Satellitis Iouis*		
Initium emerſionis	8. 28. 13	8. 27 33
Satelles diſtincte videtur	28. 53	28. 13
Obſeruatio inſtituta Tubo *Dollondiano*, tempore obſeruationis ad plagas horizontis Septentrionales et Orientales nubes atrae, tonitru et fulgur aere vaporoſo exiſtente. Altitudo *I*ouis 19°. 3'. Quinque faſciae confuſe videbantur.		

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{17}{28}$ Iulii meridies ex altit. correſp.	$0^h. 0'. 9''$	
Correctio meridiei	+ 8, 2	
Meridies verus	0. 0. 17, 2	
Die $\frac{20}{31}$ Iulii meridies ex altit. correſp.	11. 59. 47, 6	
Correctio meridiei	+ 9, 4	
Meridies verus	11. 59. 57, 0	
Die $\frac{18}{29}$ Iulii *Emerſio I. Satellitis Iouis.*		
Emerſio incipit	10. 22. 48	$10^h.22'.40''$
Satelles diſtincte ſplendet	23. 40	23. 32

Obſeruatio facta Teleſcopio Gregoriano. Altitudo Iouis 13°. 14'. Aere poſt pluuiam admodum vaporoſo.

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{11}{22}$ Auguſti meridies ex altit. correſp.	$11^h.54'.34'',3$	
Correctio meridiei	+ 14, 5	
Meridies verus	11. 54. 48, 8	
Die $\frac{12}{23}$ Auguſti meridies ex altit. correſp.	11. 54. 11, 8	
Correct. meridiei	+ 13, 6	
Meridies verus	11. 54. 25, 4	
Die $\frac{11}{22}$ Auguſti *Emerſio II. Satellitis Iouis.*		
Emerſio incipit	9. 16. 50	$9^h.22'.10''$
Satelles bene ſplendet	17. 26	22. 46

Immer-

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Immerſio III. Satellitis		
Satelles abſconditur	$9^h.26'.40''$	$9^h.32'.1''$
Sine omni dubio immerſus	26.58	32.19
Obſeruationes hae inſtitutae Teleſcopio Gregoriano, aer erat tranquillus, tres faſciae in diſco Iouis videbantur.		

Vt ex his obſeruationibus vera longitudo vrbis Zaricin determinetur, easdem partim cum Tabulis Cel. *Wargentin*, partim etiam cum aliis obſeruationibus correſpondentibus ab eodem viro Celeb. nobis communicatis comparauimus, vnde ſequentes deductae ſunt concluſiones:

Die $\frac{6}{17}$. Aprilis Immerſio I. Satellitis Iouis.				
Pariſiis ex calculo	13^h.	$50'$.	$29''$	
Zaricini obſeruata	16.	38.	23	
Differ. merid. inter Pariſios et Zaricin	2.	47.	54	
Die $\frac{15}{26}$. Apr. Imm. I. Pariſiis	10.	14.	3	ex calc.
Zaricini obſeru.	13.	1.	7	
Differ. Meridian.	2.	47.	4	
Die $\frac{9}{20}$. Iunii Emerſio I. Holmiae	10.	8.	30	
Zaricini	11.	53.	51	
Differ. Merid.	1.	45.	21	
inter Holm. et Pariſios	1.	2.	55	
Differ. Mer. int. Par. et Zar.	2.	48.	16	

Die

Die $\frac{9}{20}$. Iunii Em. I. Holm.	10^h.	$8'$.	$30''$
add. temp. 5. reuol. 8^D.	20.	21.	41
Temp. Em. die $\frac{18}{29}$. Iunii	6.	30.	11
Haec Emerſio in Zaricin	8.	16.	11
	1.	46.	0
	1.	2.	55
Longit. a Pariſiis	2.	48.	55
Die $\frac{2}{13}$. Iulii Em. I. Berolini	9.	59.	15
Subtr. Temp. 4 reuol. 7^D.	1.	54.	2
T. Em. I. Berolin. $\frac{25.\ Iun.}{6.\ Iul.}$	8.	5.	13
Zaricini obſeruata	10.	9.	55
	2.	4.	42
Longit. Berol. a Pariſ.		44.	25
Longit. Zaricin a Pariſ.	2.	49.	7
Die $\frac{18}{29}$. Iulii Em. I. Tyrnavii	8.	34.	19
Subtr. temp. 4. reuol. 7^D.	1.	55.	23
T. Em. I. d. $\frac{11}{22}$. Iulii Tyrnav	6.	38.	56
Zaricini obſeruata	8.	27.	33
	1.	48.	37
Longit Tyrnaw a Pariſiis	1.	0.	55
Longit. Zaricin a Pariſiis	2.	49.	32

Die $\frac{18}{29}$. Iulii Em. I. Tyrnav	8^h.	$34'$.	$19''$
Zaricini obſeruat.	10.	22.	40
	1.	48.	21
	1.	0.	55
Longit. Zaricini a Pariſiis	2.	49.	16
Die $\frac{25.\ Martii}{5.\ April}$ Imm. II. Berolin.	14.	32.	7
Subtr. temp. 2. reuol. 7^D.	2.	37.	6
T. Imm. II. Berol. $\frac{18}{29}$. Mart.	11.	55.	1
in Zaricin obſeruat.	13	57.	21
	2.	2.	20
		44	25
Longit. Zaricin a Pariſiis	2.	46.	45
Die $\frac{25.\ Martii}{5.\ April}$ Imm. II. Berol.	14.	32.	7
Zaricini	16.	35.	46
	2.	3.	39
		44.	25
Longit. Zaric. a Pariſ.	2.	48.	4
Die $\frac{19}{30}$. April. Imm. II. Tyrnauii	11.	55.	8
Zaricini	13.	42.	44
	1.	47.	36
	1.	0.	55
Longit. Zaricini a Pariſiis	2.	48.	31

Die $\frac{8}{19}$. Iunii Em. II. Tyrnauii	$8^h.23'.37''$	
Zaricini	10. 9. 33	
	1. 45. 56	
	1. 0. 55	
Longit. Zaricin a Pariſiis	2. 46. 51	
Die $\frac{11}{22}$. Aug. Em. II. Pariſiis	6. 33. 36	ex calc.
Zaricini	9. 22. 10	
Differ. Meridian.	2. 48. 34.	

Si iam omnium harum concluſionum ſumatur medium habebitur Longitudo Zaricini a Pariſiis $2^h.48'.14''$, dum medium ex immerſionibus dat $2^h.47'.39''$ et ex emerſionibus $2^h.48'.39''$. Inter immerſiones vero reiecta ea *Secundi*, quae $\frac{18}{29}$. Mart. obſeruata fuit, Longitudinum ex reliquis deductarum medium eſt $2^h.47'.53''$. Similiter ſi ex numero emerſionum excludantur Emerſio I. die $\frac{11}{22}$. Iulii et Emerſio II^{di} die $\frac{8}{19}$. Iunii, quippe quum obſeruatio Tyrnauienſis cum qua haec comparata eſt, omnino dubia videatur, reliquae praebebunt medium ſumendo Longitudinem vrbis Zaricin a Pariſiis $2^h.48'.49''$. Vnde ſi denuo ex melioris notae obſeruationibus medium ſumatur, prodibit quaeſita differentia Meridianorum inter Zaricin et Pariſios $2^h.48'.24''$, quam igitur numero rotundo ſtatuere licebit $2^h.48'.30''$, ſeu in grad. $42°.7'.30''$.

IV.

IV. Declinatio Acus Magneticae.

Die 24. Aprilis ducta linea meridiana methodo conſueta, declinationem acus repetitis vicibus inueni $4^{\circ}.\frac{3}{4}$ ad Occid. Die 25. Aprilis Declinationem acus inueni modo $4^{\circ}\frac{3}{4}$ modo 5° verſus Occid.

Die 16. Maii iterum duxi Lineam meridianam atque Declinationem acus inueni 5° verſus Occid. Longitudo acus erat $8\frac{1}{2}$ pollic. Angl.

EPITOME OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI A. MDCCLXX. ST. VET. INSTITVTARVM.

Auctore

IOAN. ALBERTO EVLER.

Iisdem monitis quae de ſtatu inſtrumentorum adhibitorum et methodo mea obſeruationes ipſas annotandi, anno praeterito praedicatus ſum, progrediar iam ſtatim ad Summarium obſeruationum per ſingulos menſes huius anni MDCCLXX. inſtitutarum, quas eodem ordine hic exponam quem praeterita vice ſecutus ſum, et quidem quo melius eae vno quaſi intuitu cognoſci poſſint, ſingulas claſſes forma tabularum exhibebo.

I.
Barometrum.

Scala diuiſa eſt in pollices et partes centeſimas pollicis ſeu partis duodecimae pedis Pariſini: cyphrae duae priores autem denotant pollices integros, et binae poſteriores partes centeſimas. Barometrum ſuſpenſum erat ad altitudinem 20 pedum ſupra ſuperficiem mediam fluminis Neuae in diſtantia 6000 pedum ab eius oſtio.

denotat autem d. *die*; h. *hora*; a. m. *ante meridiem* et p. m. *poſt meridiem.*

Menſe	Altitudo maxima	Altitudo minima	Differentia	Medium	Altitudo media	Altitudo frequentiſſ.
Ianuar.	28. 51 d. 15. h. 8. a. m.	26. 90 d. 24. med. noct.	1. 61	27. 71	27. 89	28. 00
Febr.	28. 48 d. 14. h. 2 p. m.	27. 20 d. 7. h. 11. p. m.	1. 28	27. 84	27. 95	27. 85
Mart.	28. 32 d. 6. h. 9. a. m.	27. 45 d. 27. h. 5. a. m.	0. 87	27. 88	27. 88	27. 92
April.	28. 46 d. 16. h. 11. a. m.	27. 61 d. 24 h. 9 a. m.	0. 85	28. 03	28. 06	27. 92
Mai.	28. 43 d. 5. meridie	27. 56 d. 20. h. 6. p. m.	0. 87	28. 00	28. 03	27. 96
Iun.	28. 16 d. 15. h. 2. p. m.	27. 55 d. 3. h. 2. p. m.	0. 61	27. 85	27. 82	27. 83
Iul.	28. 38 d. 11. h. 9. a. m.	27. 71 d. 31. h. 6. p. m.	0. 67	28. 05	28. 10	28. 11
Aug.	28 21 d. 24. h. 1-10. p. m.	27. 68 d. 3. meridie	0. 53	27. 94	27. 97	28. 02
Sept.	28. 30 d. 6. h. 9. p. m.	27 08 d. 17. h. 2. p. m.	1. 22	27. 69	27. 86	27. 82 et 28. 05
Octobr.	28. 48 d. 9. h. 6. a. m.	27. 52 d. 25. h. 4. p. m.	0. 96	28. 00	28. 02	27. 98
Nouemb.	28. 63 d. 20. h. 10 p. m.	27. 08 d. 5. h. 2. p. m.	1. 55	27. 85	27. 81	27. 70 et 27. 80
Decembr.	28. 22 d. 14. h. 6. . a m.	26. 76 d. 27. h. 8. p. m.	1. 46	27. 49	27. 62	27. 57
per totum annum	28. 63 Nouembr.	26. 76 Decembr.	1. 87	27. 70	27. 92	27. 97

 II.

II.

Thermometrum.

Thermometrum eſt deslislianum : aqua communis ebullit in puncto o, et congelat in puncto 150.

Menſe	Altitudo maxima	Altitudo minima	Differentia
Ianuar.	146 d. 4. h. 2. p. m.	185 d. 29. h. 8. a. m.	39
Februar.	141 d. 8. h. 9. p. m.	184½ d. 14. h. 7. a. m.	43½
Mart.	129 d. 31. h 2. p.m	186 d. 6. h. 7. a. m.	57
April.	117 d. 15. h. 11. a. m.	153 d. 3. h. 5. a. m.	36
Maii	117 d. 3. h. 2. p. m.	152 d. 20. h. 10. a. m.	35
Iunii	115 d. 12. h. 2. p. m.	135 d. 30. h. 5. a. m.	20
Iul.	106 d. 10 h. 2. p. m.	134 d. 20. h. 5. a. m.	28
Auguſt.	103 d. 11. h. 2. p.m.	137 d. 29. h. 5. a. m.	34
Septemb.	116 d. 1. h. 2. p. m	148 d. 16. h 7. a. m.	32
Octobr.	129 d. 3. meridie	150 d. 9. h. 6. a. m.	21
Nouemb.	136 d. 1. h. 2. p. m.	173 d. 10. h. 7. a. m.	37
Decemb.	145 d. 24. h. 9. p. m.	176 d. 31. h. 9. p. m.	31
per totum annum.	103 Auguſt.	186 Mart.	83

III.

III.

Frigus et calor.

Quouis die altitudinem et minimam et maximam Thermometri ſeorſim annotaui, quarum prima huius diei gradum frigoris, ſecunda vero caloris gradum indicat. Tum elapſo menſe, ſingulos eius dies hoc reſpectu in claſſes diſtribui: vnde deinceps haec ſequens Tabula nata eſt.

Menſe.	Dies frigidiores gradibus.						Dies calidiores gradibus.					
	180	170	160	150	140	130	110	120	130	140	150	160
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar.	1	9	19	30	31	31					4	29
Febr.	2	12	21	24	28	28					7	16
Mart.	1	8	20	28	31	31			1	3	13	22
April.				4	20	30		2	17	30	30	30
Mai.				1	17	31		3	20	28	31	31
Iun.						20		7	27	30	30	30
Iul.						12	5	20	31	31	31	31
Aug.						14	3	17	31	31	31	31
Sept.					13	28		1	11	27	30	30
Octob.					21	30			1	23	31	31
Nou.		1	15	24	29	30				2	11	21
Decemb.		4	8	26	31	31					12	28
per totum annum.	4	34	83	138	220	316	8	50	139	205	261	310

IV.

Ventus.

Menſe	Malacia	Ventus lenis	Ventus fortis	Ventus procelloſus
	dies	dies	dies	dies
Ian.		13	10	8
Febr.		18	6	4
Mart.		9	14	8
April		10	17	3
Mai		0	19	6
Iun.		8	17	5
Iul	7	2	18	4
Aug.	5	7	14	5
Sept.		7	17	6
Oct.	1	7	20	3
Nou.		17	9	4
Dec.		6	14	11
per totum annum	13	110	175	67

V.

V.

Directio venti.

Menſe	N	NO	O	S O	S	S W	W	N W	variabilis
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ian.	3	9	4	1	4	4	2	4	
Febr.	7	12	1	2		1	2		3
Mart.	3	19	3		1			3	2
April.	2	13	9	2	1		1	1	1
Mai.	7	11	1	1				10	1
Iun.	6	10	4			2		7	1
Iul.	10	10	2			1	1	5	2
Aug.	5	9	7	1	2			4	3
Sept.	5	4	2	3	5	1	3	6	1
Oct.	2	2	5	5	7	6		1	3
Nou.	5	8	7	5	2	2			1
Dec.	3	2	4	3	6	3		7	3
per totum annum	58	109	49	23	28	20	9	48	21

VI.

Status coeli.

Menſe	ſere-num	nebu-loſum	Pluuia parca	Pluuia copioſa	Nix parc.	Nix cop.	Grando
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ian.	5	4	2		15		
Feb.	12	10	1		10	1	
Mart.	4	8	2	2	8	4	
April.	9	5	7	6			
Mai.	11		10	2	2	2	
Iun.	11		10	4			
Iul.	14	4	10	5			1
Aug.	7	6	9	11			
Sept.	2	5	15	10			
Oct.	4	2	15	6			
Nou.	4	3	3		13	3	1
Dec.	4	4	7		15	4	1
per totum anuum	87	51	91	46	63	14	3

VII.

VII.

Alia Phaenomena.

Menſe	Phaenomena
Ian.	
Febr.	Quinque aurorae boreales die 2. 14. 16. 17 et 19 Paraſelena ſplend. d. 20.
Mart.	Duae aurorae boreales die 12 et 16.
April.	Ters aurorae boreales die 1. 2. et 4. Tres tonnit. die 21. 27 et 28. Glacies fluminis Neuae ſoluta eſt die 12
Mai.	
Iun.	Tonuit ſemel die ſcilicet 9.
Iul.	Tonuit bis. die 12 et 31.
Aug.	Tonuit quater. die 6. 8. 13 et 14.
Sept.	
Oct.	Aurora borealis die 15.
Nou.	Duae aurorae boreales die 13 et 15 Die 9na flumen Neuae trudere incoepit glaciem et penitus tectum fuit glacie die 11.
Dec.	
per totum annum	Aurorae boreales XII. Tonitrua X.

Fig. 2.

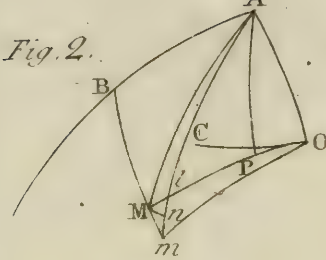
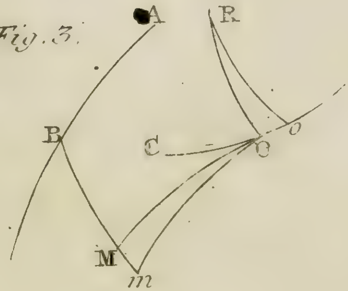


Fig. 3.



g. 4.

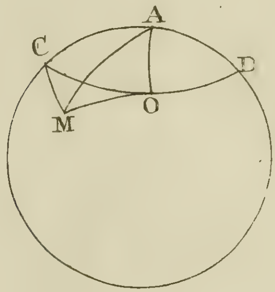


Fig. 5.

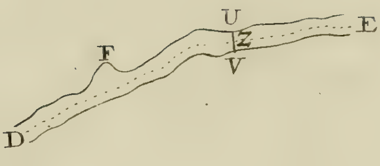
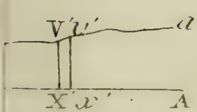
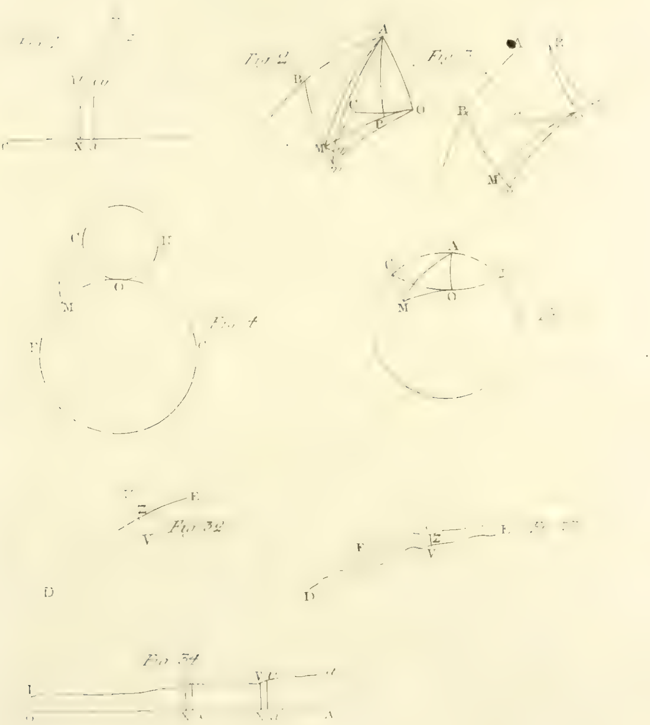
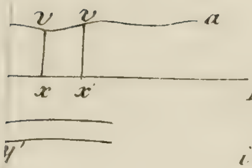


Fig. 33.




Fig 2
A
B
C
O
P
M
A
B
M
A
C
O
M
Fig 4
A
C
O
M
E
Fig 32
V
D
F
E
V
D
Fig 34
L
V
A



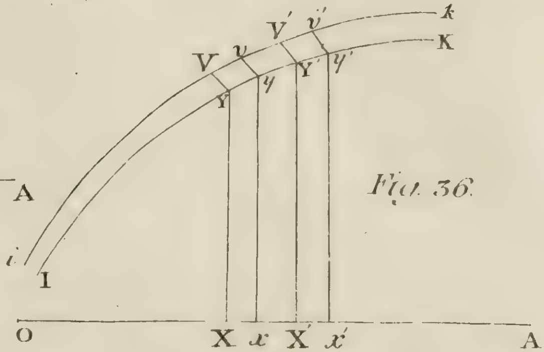
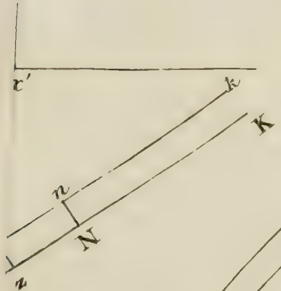


Fig. 36.

Fig. 37.



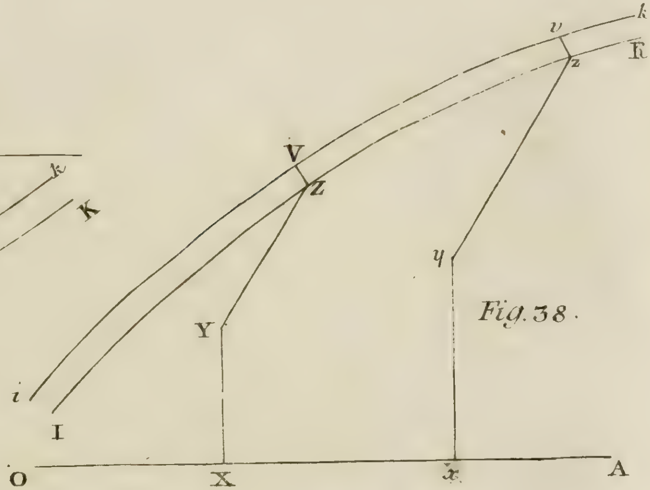
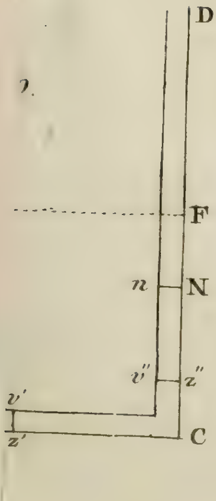


Fig. 38.



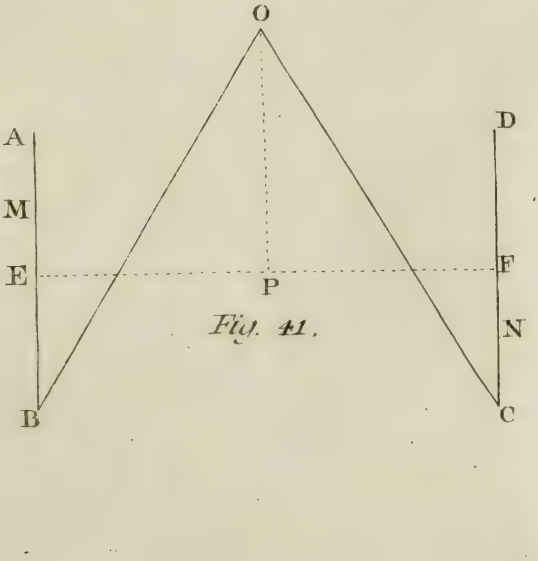
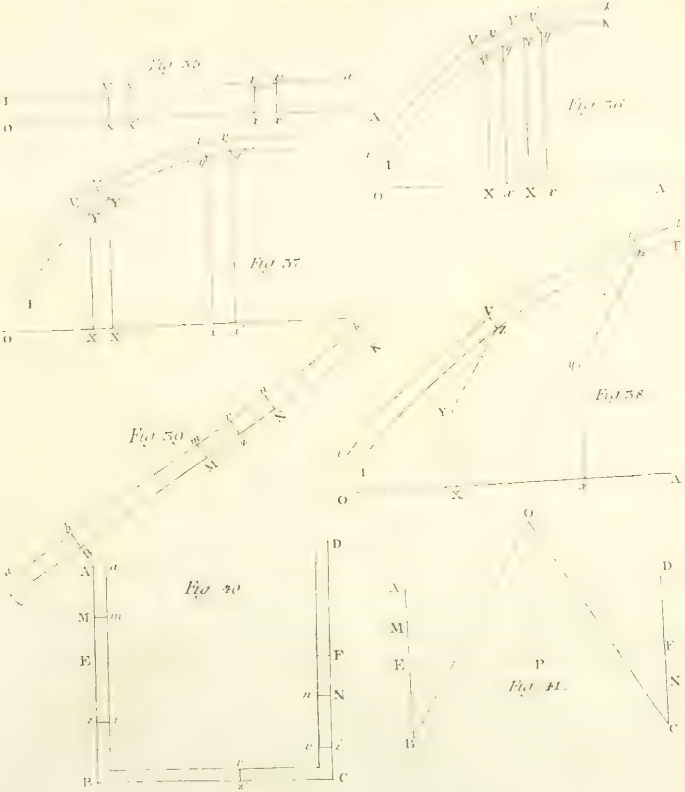


Fig. 41.


Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41

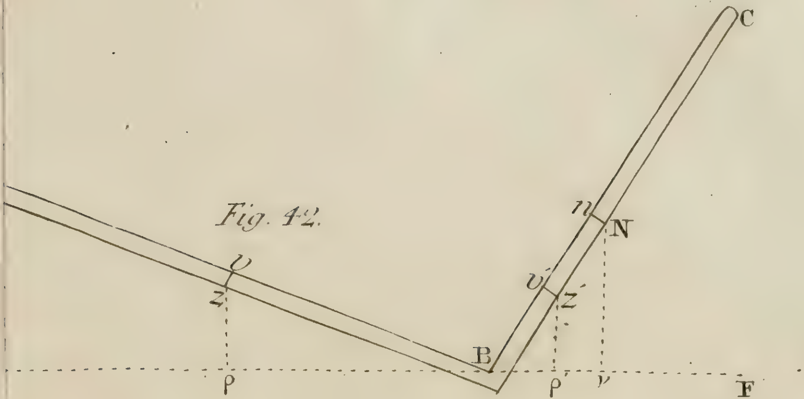
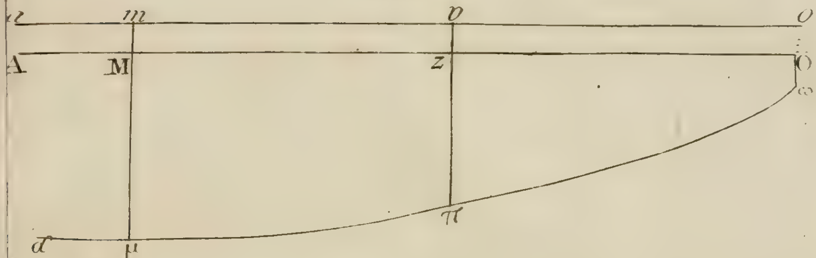


Fig. 42.

Fig. 45.



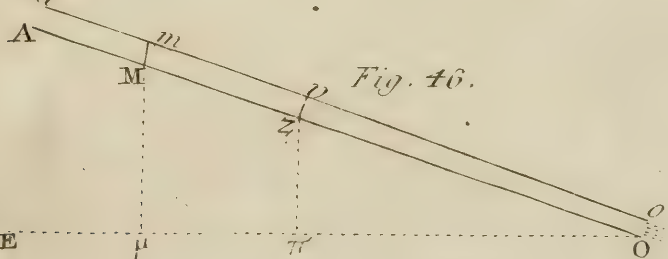


Fig. 46.

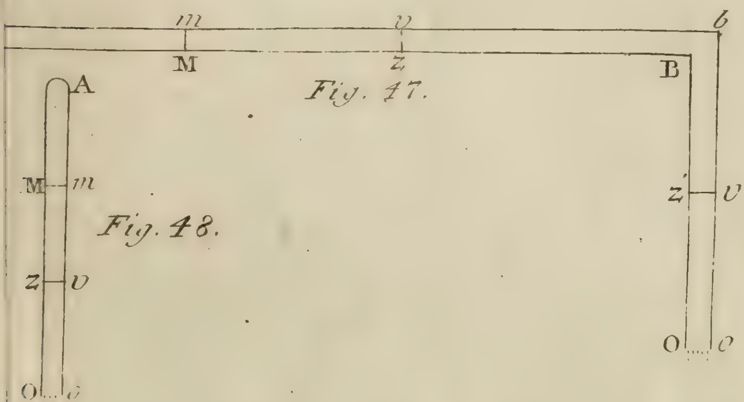
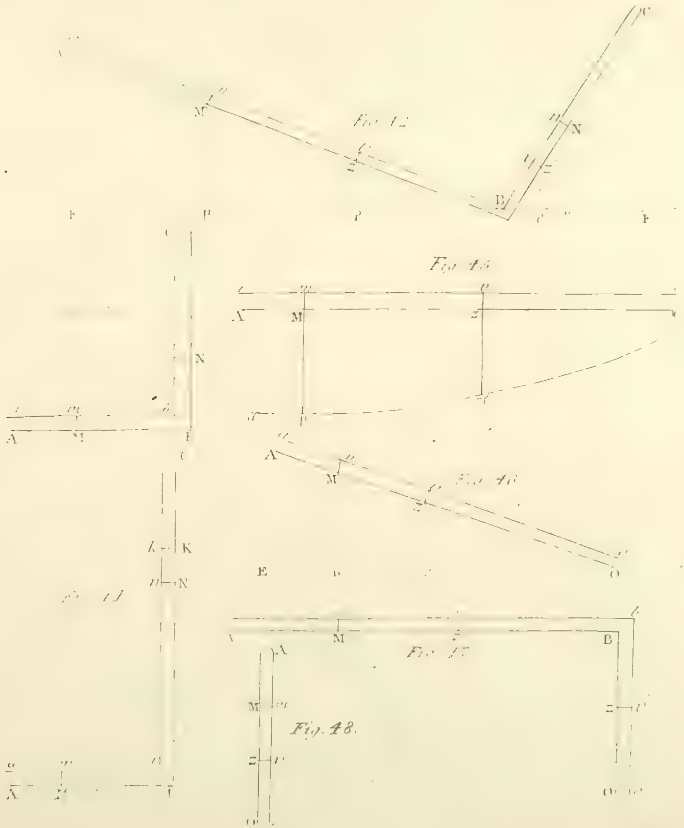


Fig. 47.

Fig. 48.


M
N
B
A
M
N
K
N
A
M
E
O
M
B
A
M
Fig. 48.

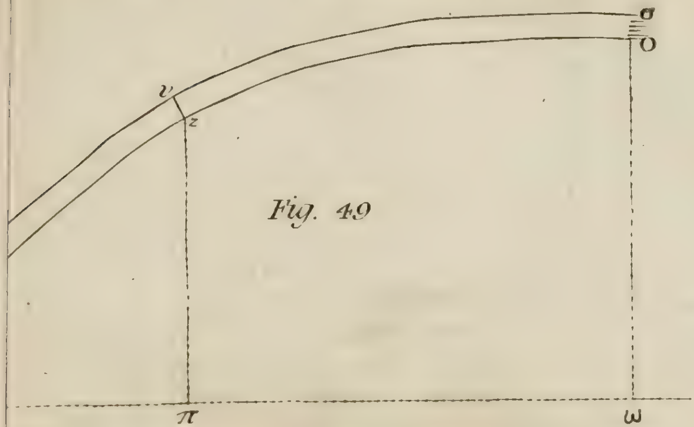


Fig. 49

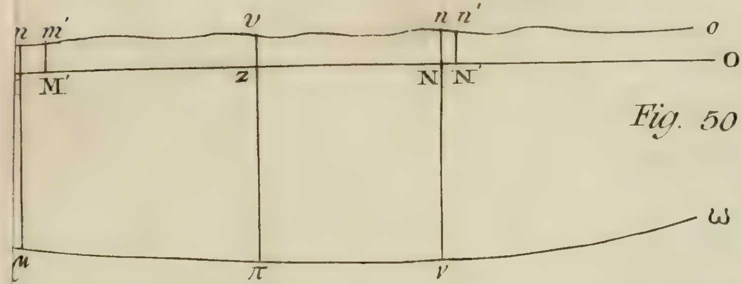


Fig. 50

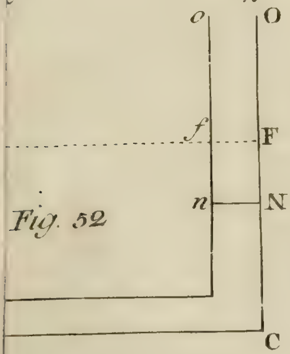


Fig. 52

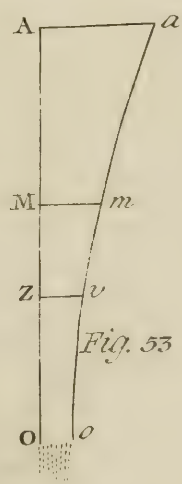


Fig. 53

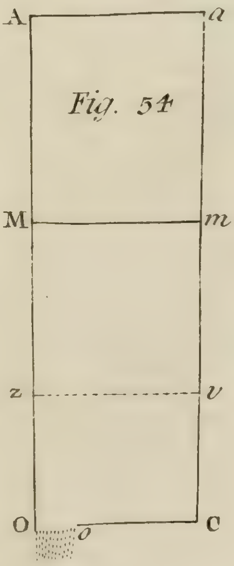


Fig. 54

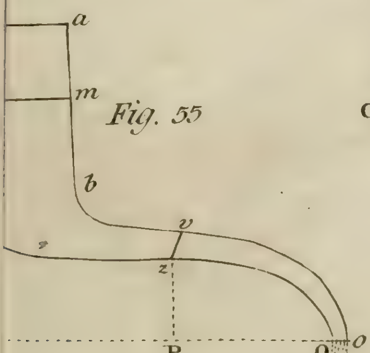


Fig. 55



Fig. 49

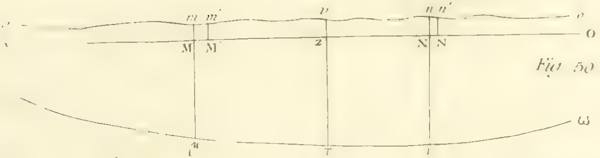


Fig. 50

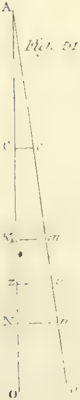


Fig. 51

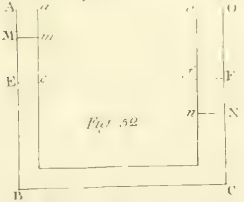


Fig. 52

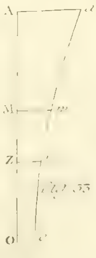


Fig. 53

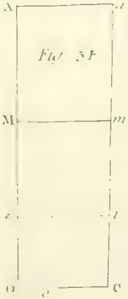


Fig. 54

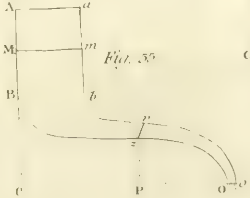
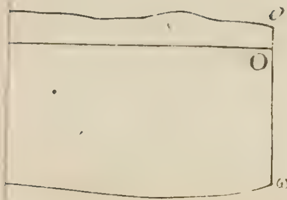


Fig. 55



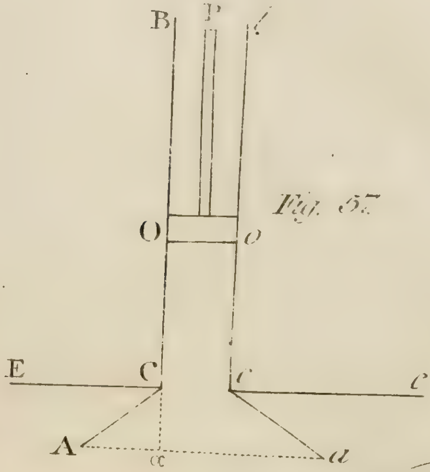


Fig. 57.

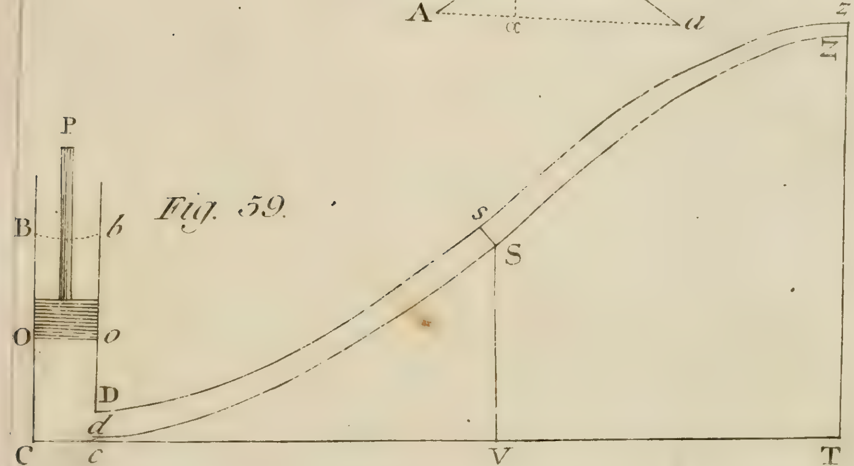
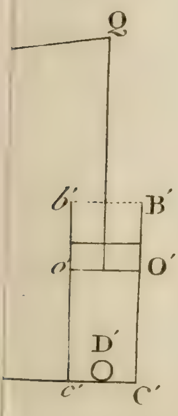


Fig. 59.



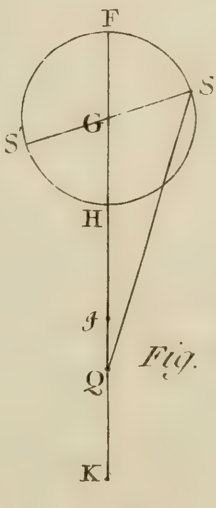


Fig. 62.

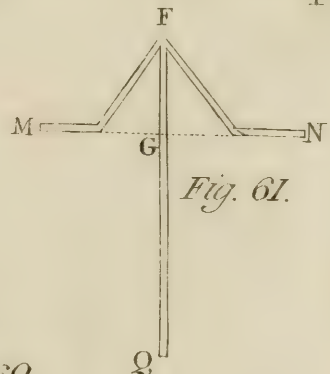


Fig. 61.

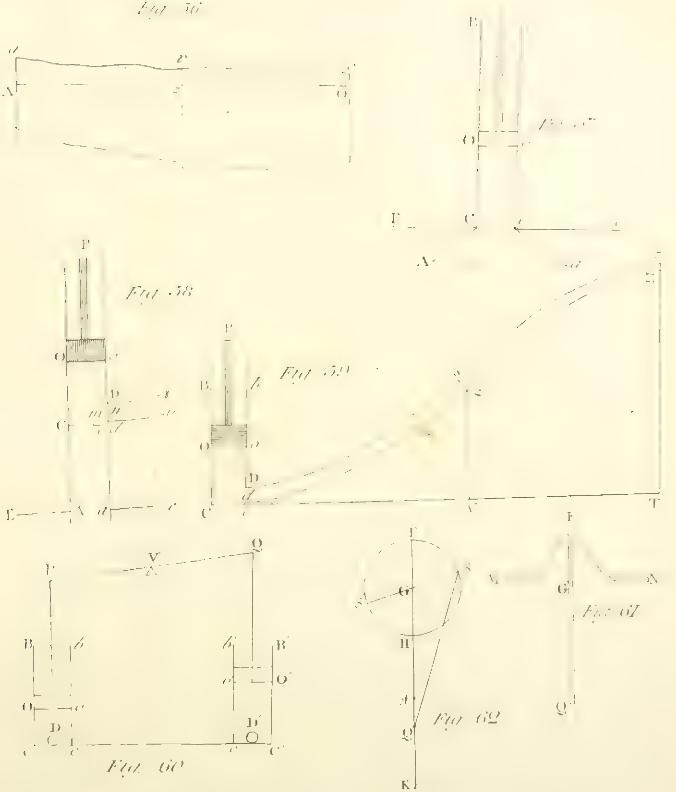


Fig. 56

Fig. 57

Fig. 58

Fig. 59

Fig. 60

Fig. 61

Fig. 62

Fig. 63.

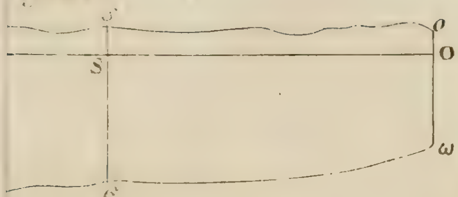
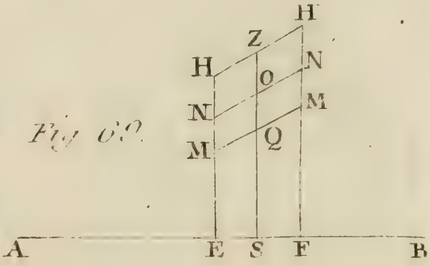
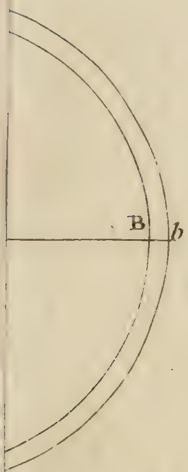


Fig. 69.





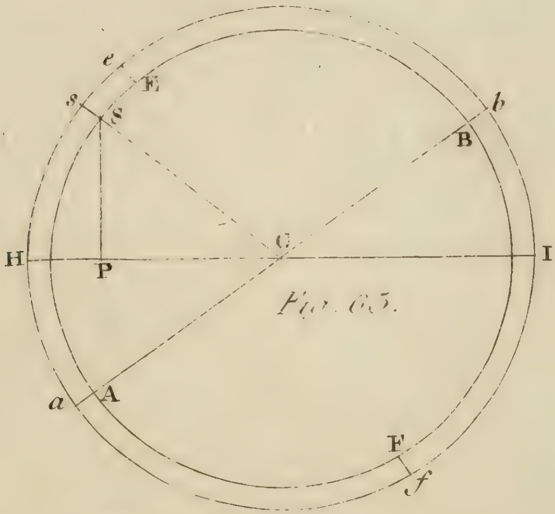


Fig. 65.

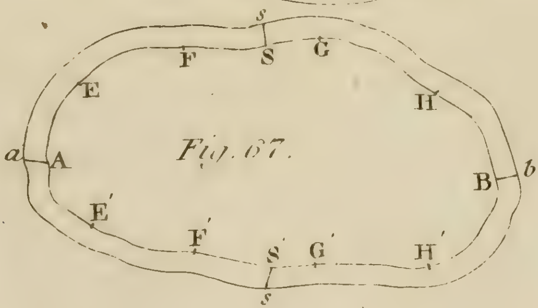
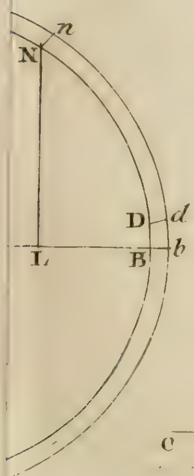


Fig. 67.



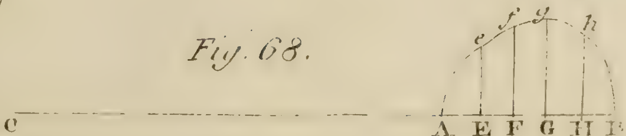
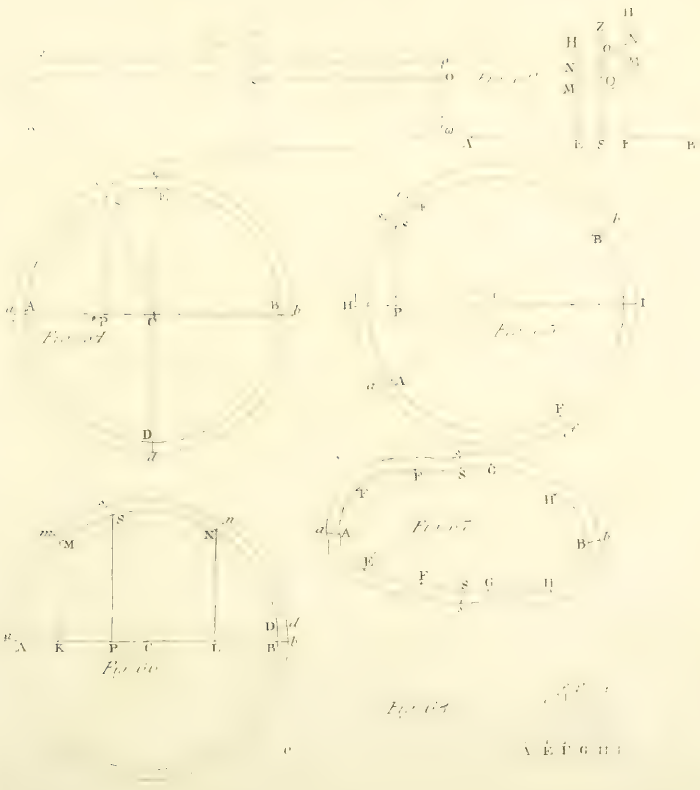


Fig. 68.



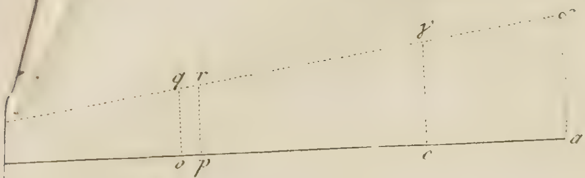


Fig. 2.

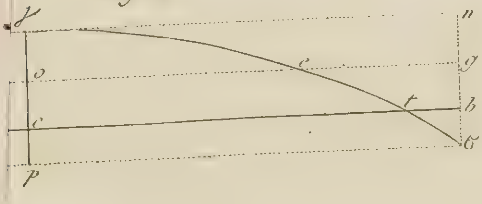
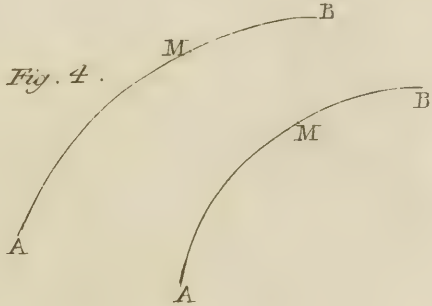




Fig. 4.



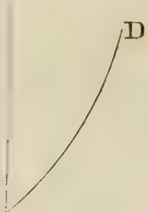


Fig. 6.

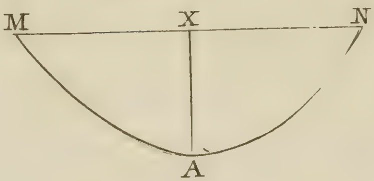
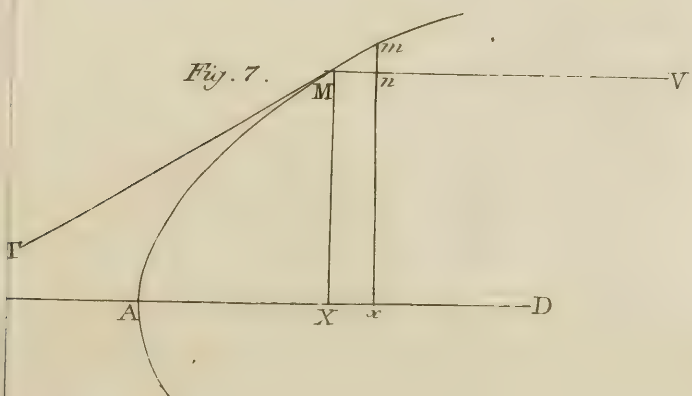
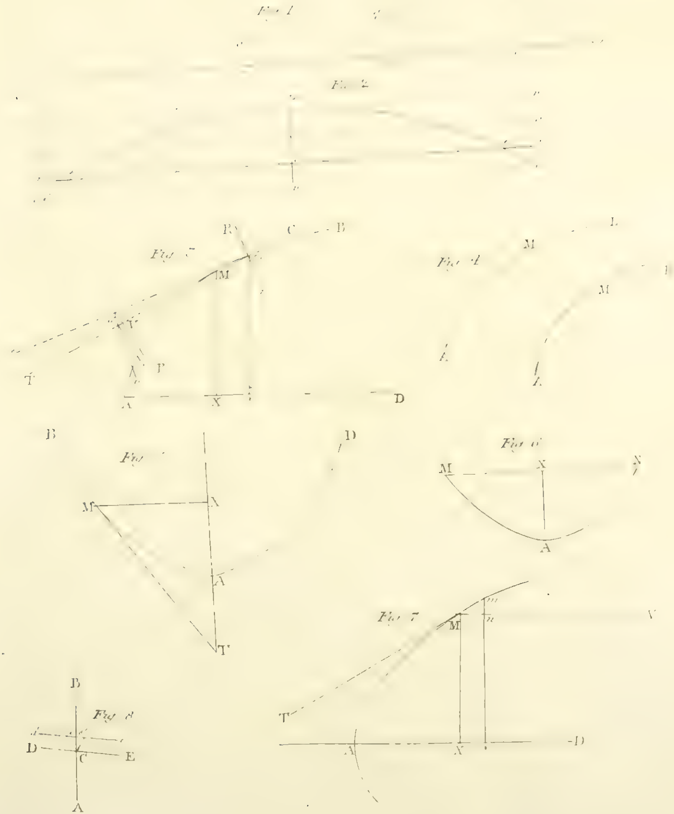


Fig. 7.




Fig. 2
Fig. 3
M
T
A
X
D
B
Fig. 4
Fig. 6
M
X
A
Fig. 7
M
m
n
T
A
X
D
Fig. 8
B
D
C
E
A







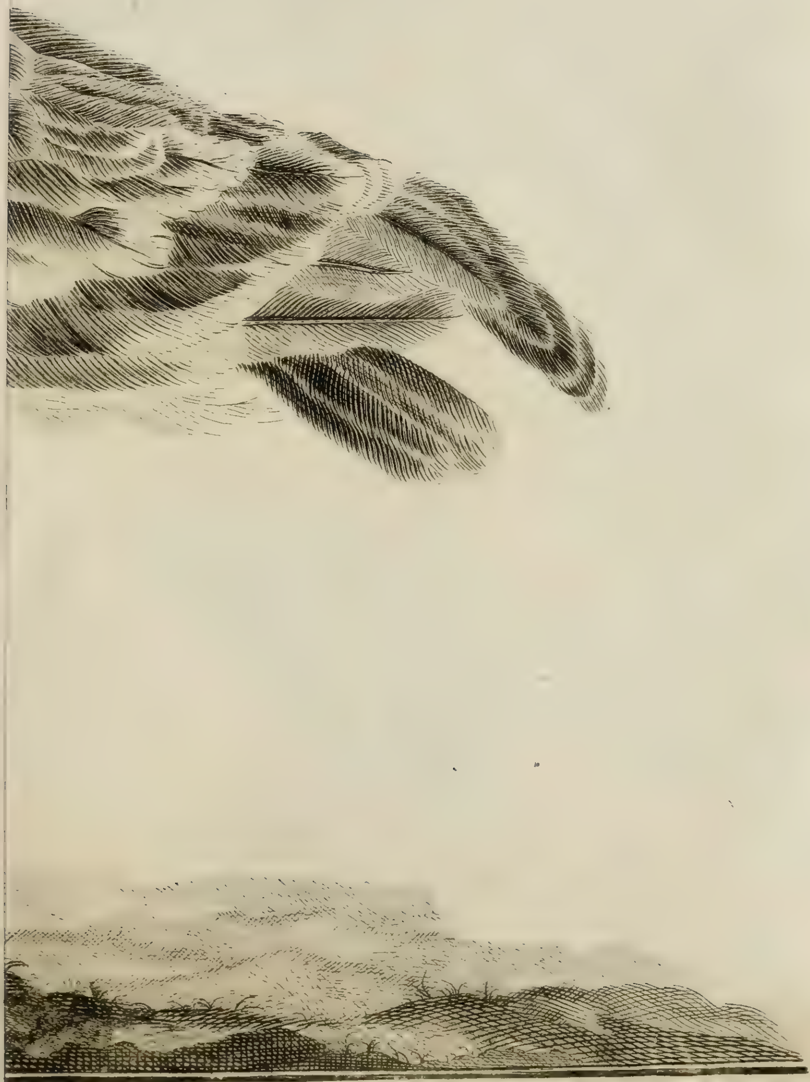












Nov. Act. Acad. Sc. Petrop. Tom. XI. Tab. XI.



























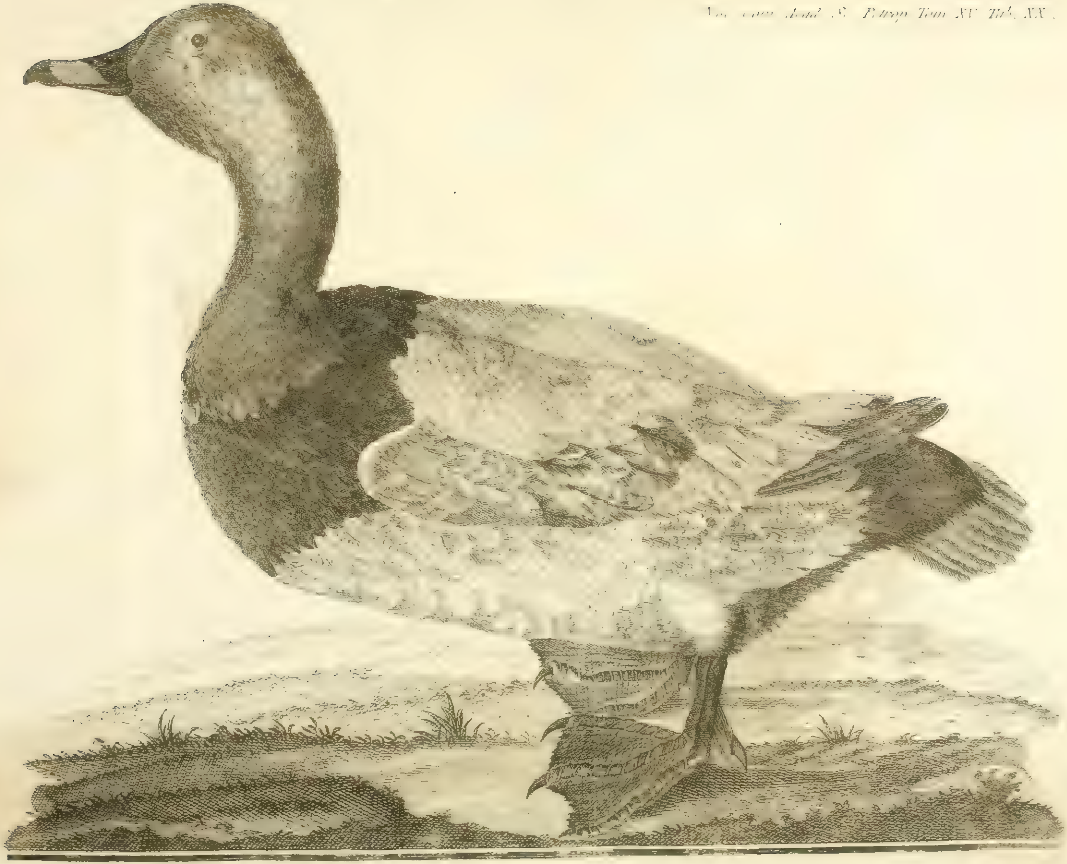
















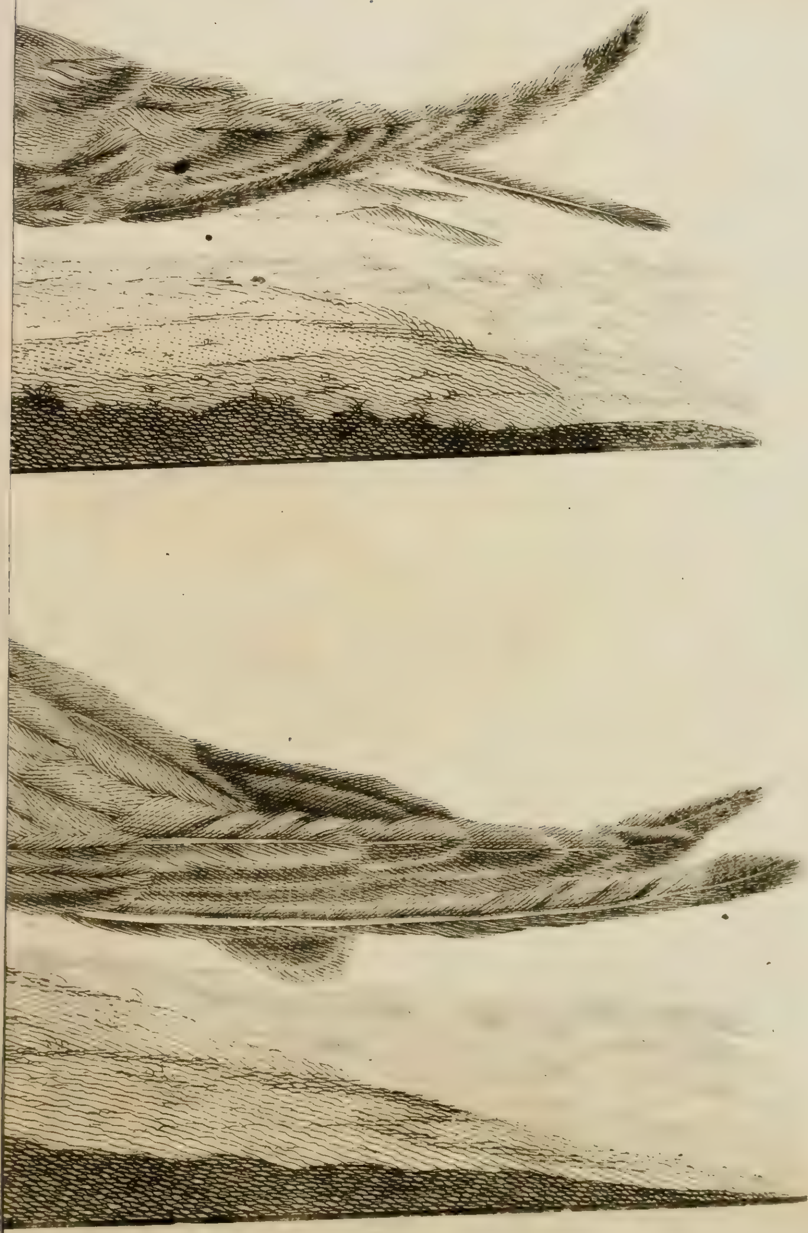




Fig. 1

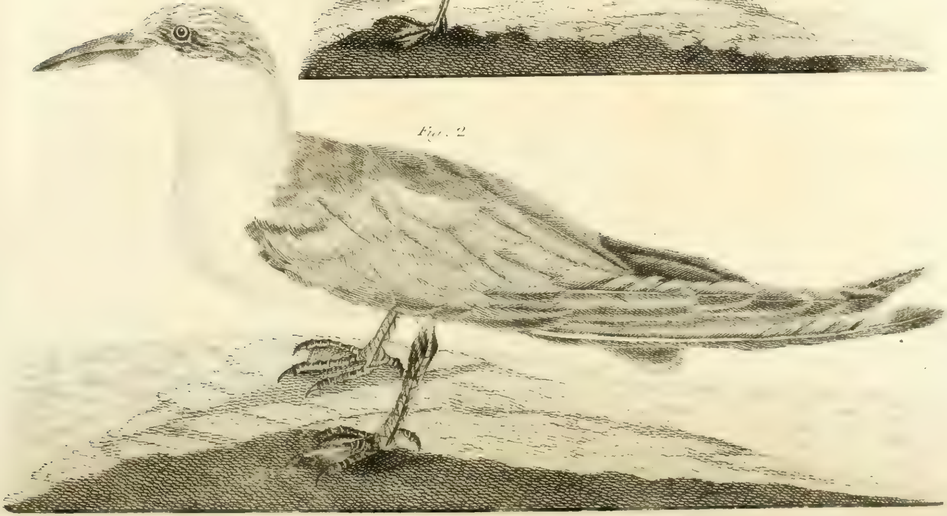


Fig. 2

Fig. 2.

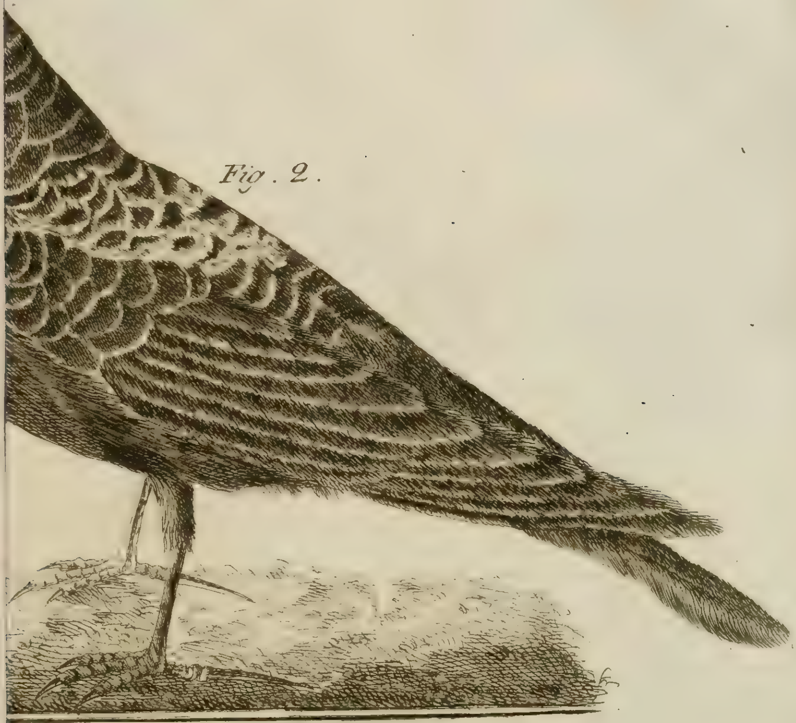
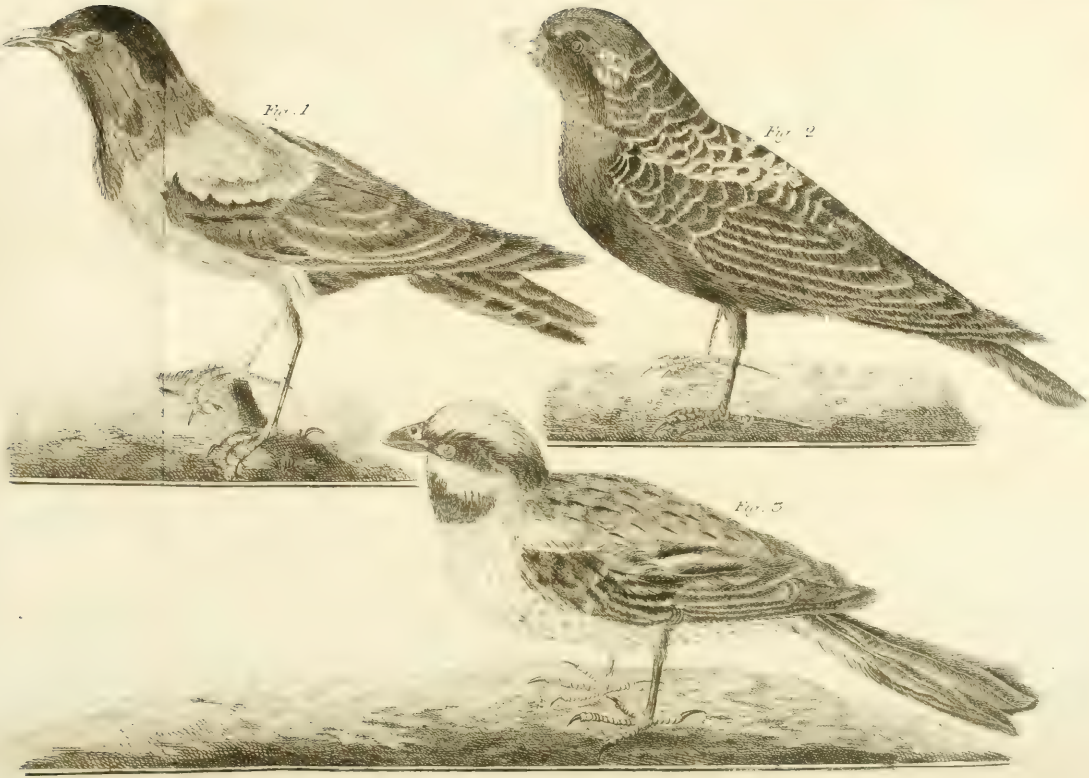
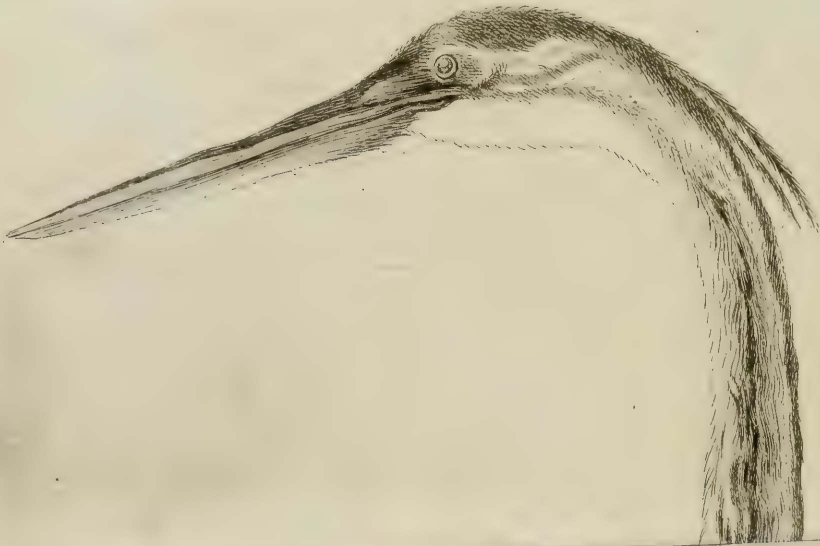


Fig. 3.




Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3

Nov. G



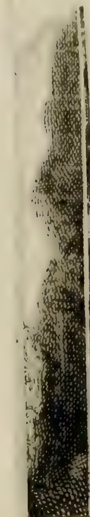






Fig. 2.



Fig. 3.

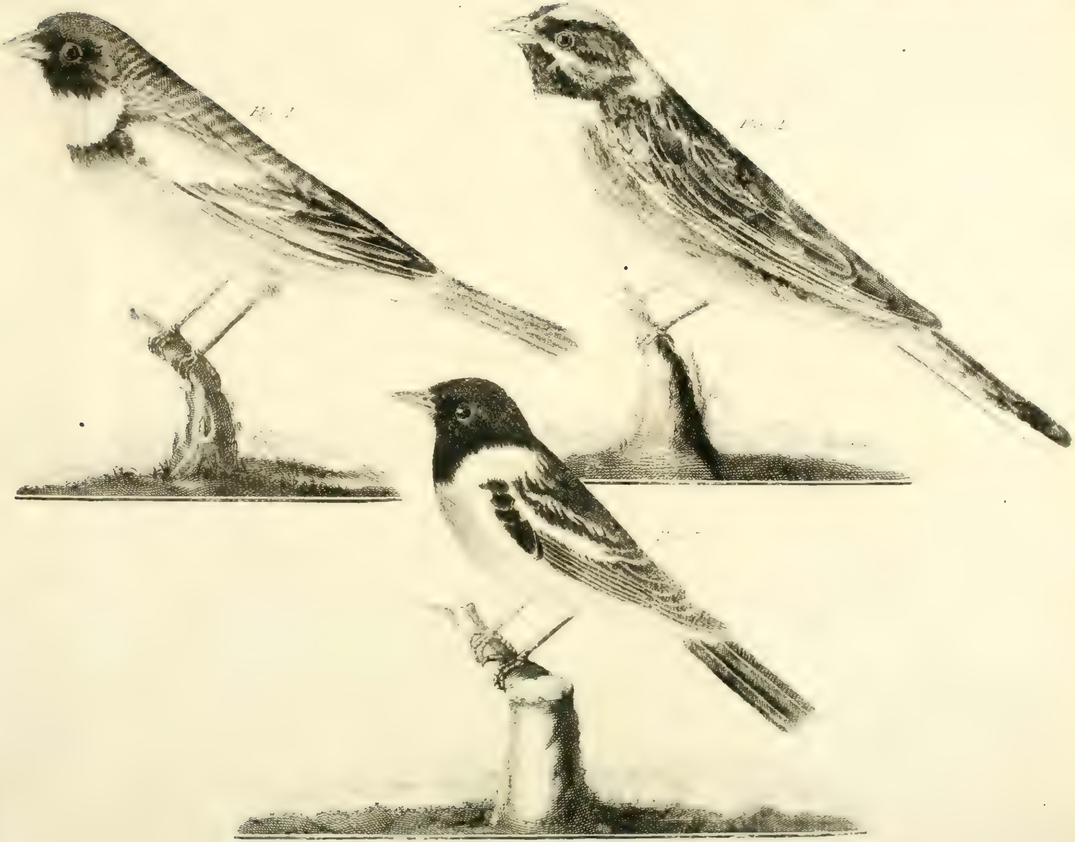




Fig. 1.

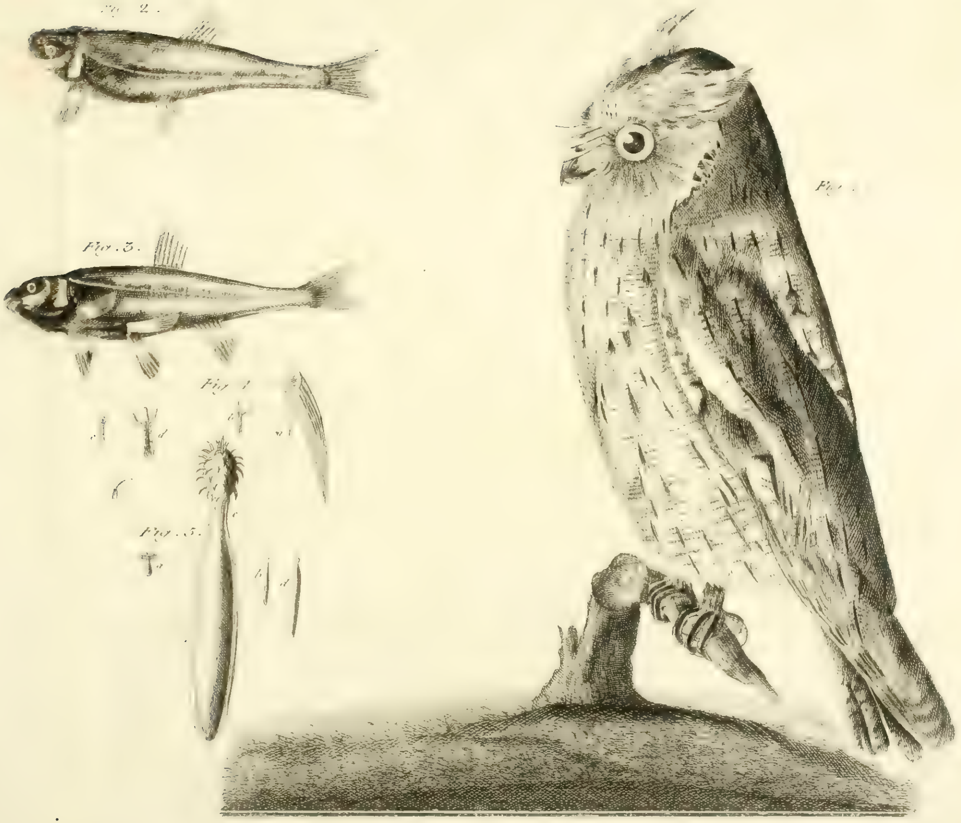

Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 1.

Fig. 1.





Fig. 2.





Fig. 3.

Fig. 2

Fig. 3

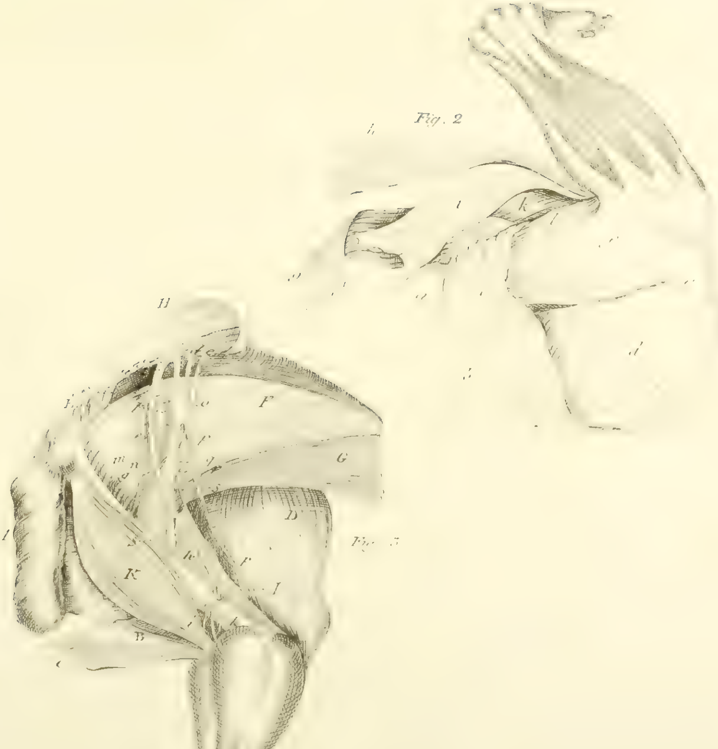


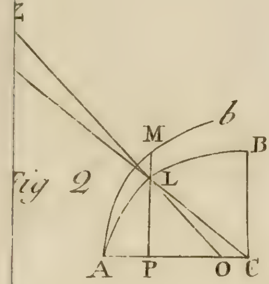



Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
a
b






Fig. 4.



ig 2

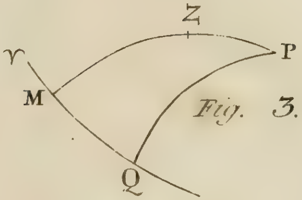


Fig. 3.

4.

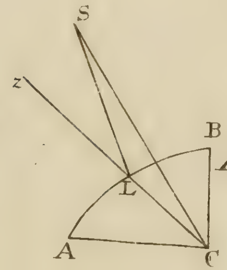


Fig. 5.

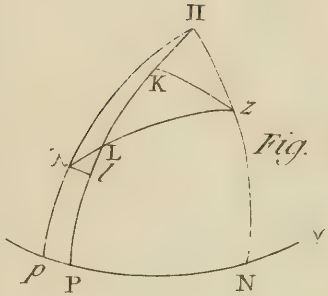


Fig. 6.

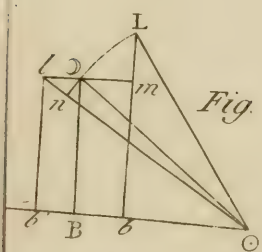


Fig. 8.

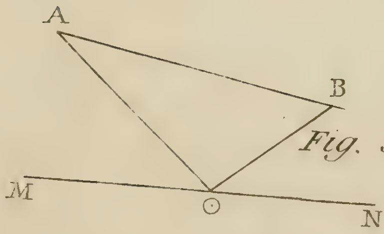
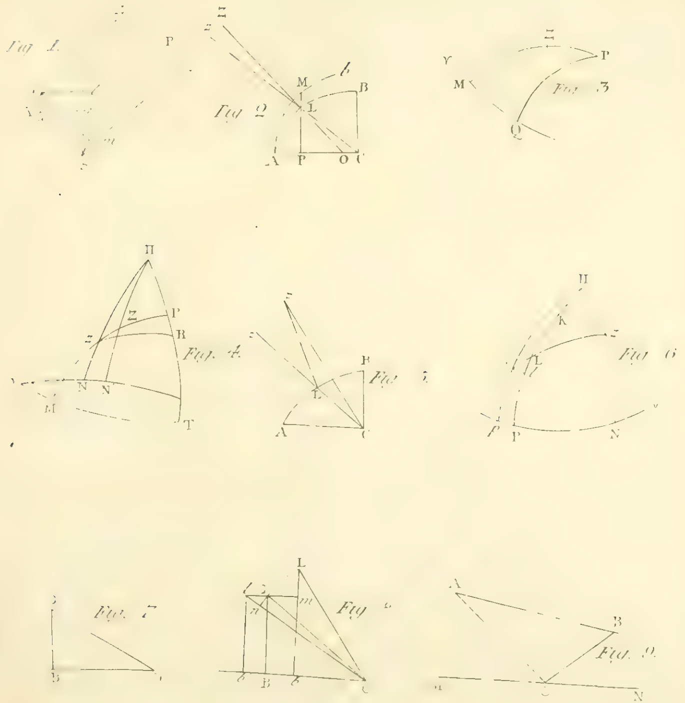


Fig. 9.


Fig. 1.
P
Z
z
M
L
b
B
Fig. 2.
A
P
O
C
Z
P
M
Fig. 3.
Q
Π
P
Z
z
B
Fig. 4.
N
N
M
T
z
z
B
Fig.
L
A
C
Π
K
z
Fig. 6
L
P
N
Fig. 7.
B
L
n
m
Fig.
b
B
b
C
A
B
Fig. 9.
N

Novi commentarii Ac
tanae 15 1770

DEC 1 1948
MAR 7 1960 c. Ja

AMNH LIBRARY
100125018